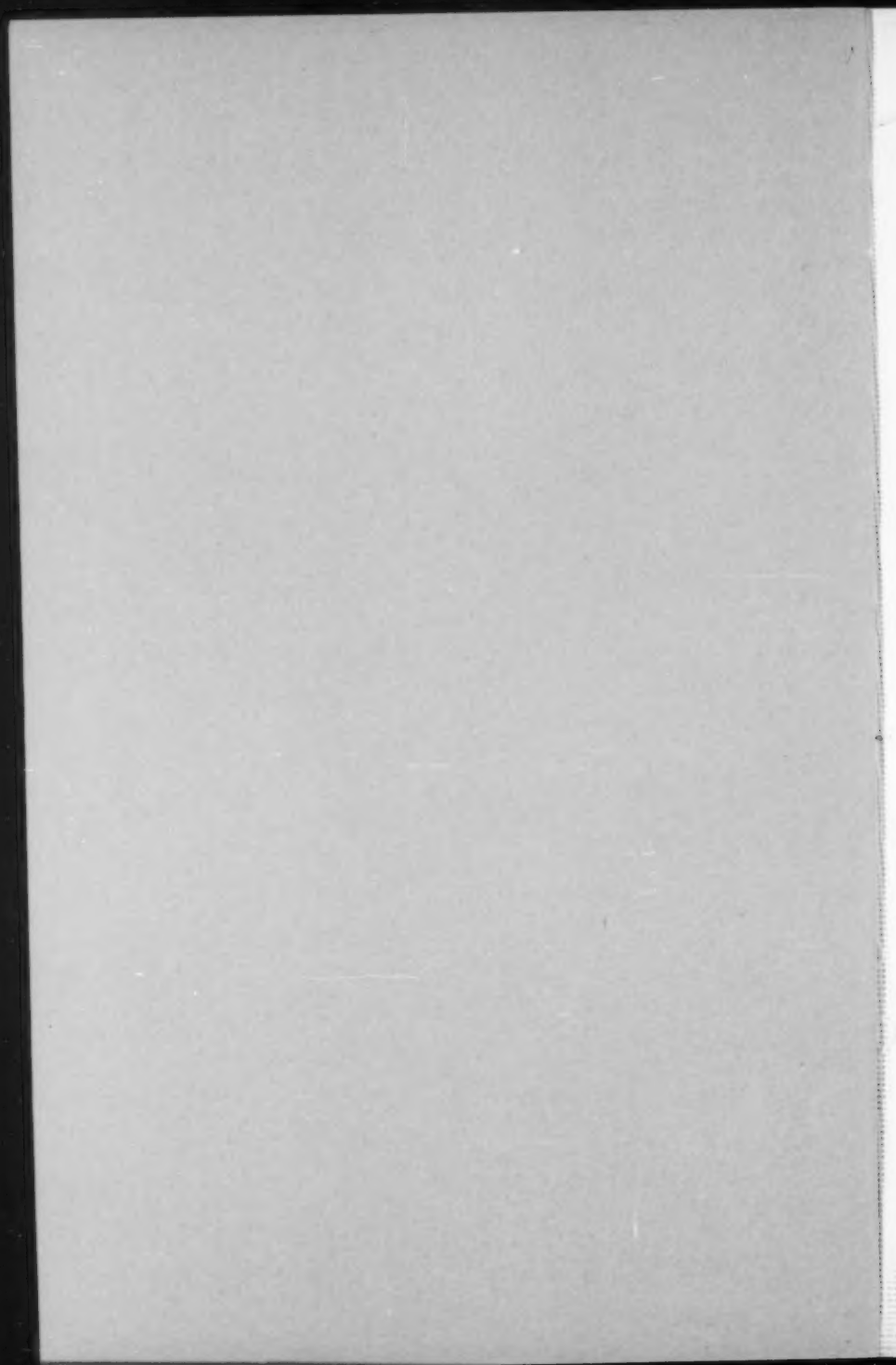


**MATHEMATISCHE
ANNALEN**

126. BAND



MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN DAVID HILBERT
OTTO BLUMENTHAL ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
HEINRICH BEHNKE RICHARD COURANT
MÜNSTER (WESTF.) NEW YORK
HEINZ HOFF KURT REIDEMEISTER
ZÜRICH MARBURG (LAHN)
FRANZ RELICH BARTEL L. VAN DER WAERDEN
GÖTTINGEN ZÜRICH

126. BAND



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1953

Unveränderter Nachdruck 1969
Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York

Alle Rechte vorbehalten.

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, einzelne Beiträge oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg

Printed in Germany

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, · München 22 · Bruderstraße 9

Inhalt des 126. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Artzy, R., Eigenschaften von ebenen Vierecken allgemeiner Lage	336
(Anschrift: Kiryat Hayim (Haifa), Israel, Gimmel 94).	
Bachmann, F., Eine Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Trans- formationen	79
(Anschrift: Kiel, Clausewitzstr. 12)	
Barner, M., Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I. Kom- plexflächen als Schiebflächen	119
Barner, M., Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. II. Kon- struktion und integrallose Darstellung spezieller Schiebungen	418
(Anschrift: Freiburg i. Br., Math. Institut, Hebelstr. 40)	
Cassels, J. W. S., A New Inequality with Application to the Theory of Diophantine Approximation	108
(Anschrift: Trinity College, Cambridge/England)	
Dixmier, J., Sur une inégalité de E. HEINZ	75
(Anschrift: 15 rue Le Brun, Paris 13e)	
Doetsch, G., Die lineare Differentialgleichung im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen	307
(Anschrift: Freiburg i. Br., Riedbergstr. 8)	
Erwe, F., siehe Peschl, E.	
Föllinger, O., Diskontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefälle- beschränkung	466
(Anschrift: Frankfurt a. M., Math. Institut der Universität)	
Habicht, W., Über Polynomabbildungen	149
(Anschrift: Heidelberg, Keplerstr. 55)	
Hirzebruch, F., Über vierdimensionale RIEMANNsche Flächen mehrdeutiger ana- lytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen	1
(Anschrift: The Institute for Advanced Study, School of Mathematics, Princeton, N. J., USA)	
Kaluza, Th., Ein Kriterium für das Vorhandensein von Faktoren in beliebigen Graphen	464
(Anschrift: Braunschweig, Grünwaldstr. 4)	
Kasch, F., Über den Endomorphismenring eines Vektorraumes und den Satz von der Normalbasis	447
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut, Bunsenstr. 3—5)	
Kato, T., On Some Approximate Methods Concerning the Operators T^*T	253
(Anschrift: Dep. of Physics, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo/Japan)	
Klein-Barmen, F., Zur Theorie der Operative und Assoziative	23
Klein-Barmen, F., Pseudoverband und Flechtwerk	138
(Anschrift: Wuppertal-Barmen, Muggenburg 62)	
Krull, W., Zur GALOISSchen Theorie der arithmetischen Körper	239
Krull, W., Über gewisse Homomorphismen von Polynomgruppen	377
(Anschrift: Bonn, Meckenheimer Allee 81)	
Kurepa, G., Über das Auswahlaxiom	381
(Anschrift: Zagreb/Jugoslawien, 6, Vinkovineva)	

	Seite
Maaß, H., Die Differentialgleichungen in der Theorie der SIEGELschen Modulfunktionen	44
(Anschrift: Heidelberg, Rottmannstr. 29)	
Mauler, H., Eine Darstellung für Identitäten zwischen den Kommutatoren eines Ringes	410
(Anschrift: Marburg/Lahn, Math. Seminar der Universität)	
Meinardus, G., Über das Partitionenproblem eines reell-quadratischen Zahlkörpers	343
(Anschrift: Heidelberg, Rosenbergweg 8)	
Moser, J., Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen	325
(Anschrift: 45 Fourth Avenue, Institute of Math. and Mech., New York 3, N. Y., USA)	
Nitsche, J. und J., Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta \varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$	69
(Anschrift: Berlin-Dahlem, Math. Institut der Freien Universität, Boltzmannstr.)	
Peschl, E., u. F. Erwe, Über beschränkte Systeme von Funktionen	185
(Anschriften: Eitorf/Sieg, Bahnhofstr. 35; Bonn, Math. Institut der Universität)	
Remmert, R., und K. Stein, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen	263
(Anschriften: Lengerich/Westf., Tecklenburger Str. 68; Münster/Westf., Hüfferstr. 71)	
Richter, H., Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung	362
(Anschrift: Haltingen/Baden, Elekraweg 2)	
Rose, A., Some Self-dual Primitive Functions for Propositional Calculi	144
(Anschrift: Department of Mathematics, The University, Nottingham/England)	
Rothstein, W., Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen	221
(Anschrift: Marburg/Lahn, Math. Seminar der Universität)	
Schiek, H., Bemerkung über eine Relation in freien Gruppen	375
(Anschrift: Bonn, Math. Institut d. Universität, Poppelsdorfer Allee 49)	
Schoeneberg, B., Über den Zusammenhang der EISENSTEINSchen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen	177
(Anschrift: Hamburg 20, Erikastr. 101)	
Stein, K., siehe Remmert, S.	
Stoll, W., Konstruktion Jacobischer und mehrfachperiodischer Funktionen zu gegebenen Nullstellenflächen	31
(Anschrift: Tübingen, Ebertstr. 8)	
van der Waerden, B. L., Ein neuer Test für das Problem der zwei Stichproben	93
(Anschrift: Zürich 38, Rainfußweg 7)	
Wang, H., Between Number Theory and Set Theory	385
(Anschrift: 1220 N. Broad St., Philadelphia, Pa., USA)	

Über vierdimensionale RIEMANNsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen¹⁾.

Von
FRIEDRICH HIRZEBRUCH in Erlangen.

Einleitung.

In der klassischen Funktionentheorie wird die „abstrakte“ RIEMANNsche Fläche in der bekannten Weise definiert. Die algebraischen Funktionselemente einer mehrdeutigen Funktion $f(z)$ lassen sich als Punkte einer „konkreten“ RIEMANNschen Fläche auffassen, die einem Teil der Zahlenkugel überlagert ist. Die Gegenüberstellung: „abstrakte RIEMANNsche Fläche“ — „RIEMANNsche Fläche einer Funktion“ ist einer der wichtigsten Gesichtspunkte der klassischen Theorie. Wie steht es mit der Übertragung dieser Begriffsbildungen und der zugehörigen Sätze auf höhere Dimensionen? Eine fast wörtliche Übertragung der Definition der „abstrakten“ RIEMANNschen Fläche führt zu dem Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit (von n komplexen Dimensionen)^{2) 3)}. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf den Fall von zwei komplexen Veränderlichen.

Die „algebroiden“ Funktionselemente einer mehrdeutigen Funktion $f(z_1, z_2)$, die in einer komplexen Mannigfaltigkeit M (von zwei komplexen Dimensionen) definiert ist, können zwar ohne weiteres als Punkte eines vierdimensionalen HAUSDORFFschen Raumes aufgefaßt werden, der einem Teil von M überlagert ist und den wir RIEMANNschen Bereich der Funktion f nennen wollen. Dieser RIEMANNsche Bereich ist aber im allgemeinen keine topologische Mannigfaltigkeit. Er besitzt nämlich im allgemeinen „nicht-sphärische“ Punkte. Das sind solche Punkte, die keine Umgebung besitzen, die dem Innern einer 4-dimensionalen Vollkugel homöomorph ist. Wie in der klassischen Theorie definiert man, was unter Uniformisierung eines Verzweigungspunktes zu verstehen ist. In einem RIEMANNschen Bereich gibt es im allgemeinen nicht-uniformisierbare Verzweigungspunkte. Nicht-sphärische Punkte sind erst recht nicht uniformisierbar.

Einfachstes Beispiel: $(z_1 z_2)^{1/2}$ im Punkt $(0,0)$. $z_1 = t_1^2$, $z_2 = t_2^2$, $(z_1 z_2)^{1/2} = t_1 t_2$ ist keine Uniformisierung, da (t_1, t_2) und $(-t_1, -t_2)$ für z_1, z_2 , $(z_1 z_2)^{1/2}$ dieselben Werte ergeben. In unserem Beispiel ist $(0,0)$ nicht-sphärisch. Die nicht-uniformisierbaren Punkte P_i eines RIEMANNschen Bereiches liegen in dem von uns betrachteten Fall von zwei komplexen Veränderlichen isoliert.

¹⁾ Diese Arbeit ist der durch einige Zusätze ergänzte 2. Teil meiner Dissertation (Münster 1950). Der erste Teil der Dissertation ist in Math. Ann. 124, 77—86 (1951) veröffentlicht worden.

²⁾ Zahlen in [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

³⁾ Zur Definition der komplexen Mannigfaltigkeit siehe z. B. [5], [7], [8].

„Sticht“ man aus dem RIEMANNschen Bereich B der mehrdeutigen Funktion f diese Punkte heraus, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit \hat{B} . Analog zur klassischen Theorie läßt f sich als eindeutige meromorphe Funktion in \hat{B} auffassen. Aus \hat{B} werden alle Unbestimmtheitsstellen von f herausgenommen. Man erhält eine komplexe Mannigfaltigkeit B^* ($B^* \subset \hat{B}$). Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist ein Satz, den wir so andeuten können:

Es gibt eine komplexe Mannigfaltigkeit \tilde{M} und eine stetige Abbildung t von \tilde{M} auf B , so daß folgendes gilt: t ist eine eineindeutige analytische Abbildung von $t^{-1}(B^*)$ auf B^* . Für jeden Ausnahmepunkt Q (d. h. $Q \in B$, $Q \notin B^*$) ist $t^{-1}(Q)$ Vereinigungsmenge von endlich vielen kompakten irreduziblen analytischen Flächen. f kann als meromorphe Funktion ohne Unbestimmtheitsstellen in \tilde{M} aufgefaßt werden. f ist also eine analytische Abbildung von \tilde{M} in die RIEMANNsche Zahlenkugel.

Eine Mannigfaltigkeit \tilde{M} mit diesen Eigenschaften nennen wir RIEMANNsche Mannigfaltigkeit von f oder auch (4-dimensionale) RIEMANNsche Fläche von f . Im Titel der Arbeit ist die letzte Bezeichnung benutzt worden, da der Ausdruck „RIEMANNsche Mannigfaltigkeit“ in der RIEMANNschen Geometrie vorkommt. Wir gehen nicht darauf ein, wie weit eine solche RIEMANNsche Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist. Diese Frage möchte ich in einer weiteren Arbeit behandeln.

Die Konstruktion, die wir angeben werden, führt zu einer ganz bestimmten RIEMANNschen Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$.

Ein Haupthilfsmittel dieser Arbeit ist der σ -Prozeß, der von H. HOPF [8] für komplexe Mannigfaltigkeiten eingeführt worden ist.

Durch den σ -Prozeß wird ein Punkt P einer komplexen Mannigfaltigkeit M (von zwei komplexen Dimensionen) aus M herausgenommen und durch die komplex-projektive Gerade (= RIEMANNsche Zahlenkugel) der komplexen Linienelemente in P ersetzt.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit und der Weg zu diesem Ergebnis stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit Begriffen und Sätzen aus der algebraischen Geometrie. Es handelt sich dabei um die Auflösung der Singularitäten algebraischer Kurven und die Ergebnisse von JUNG [9] über die lokale Darstellbarkeit einer algebraischen Funktion von zwei Veränderlichen^{3a)}.

Hat man in einer Umgebung des Punktes P der komplexen Mannigfaltigkeit M lokale Koordinaten z_1, z_2 mit $P = (0,0)$ ausgezeichnet, dann entspricht dem σ -Prozeß das Paar von birationalen Transformationen:

$$\begin{aligned} z_1 &= z'_1 & z_1 &= z''_1 z''_2 \\ z_2 &= z'_1 z'_2 & z_2 &= z''_2. \end{aligned}$$

Eine algebraische Fläche $F^{(2)}$ im komplex-projektiven Raum $P^{(3)}$ ⁴⁾ kann birational transformiert werden in eine algebraische Fläche $\tilde{F}^{(2)}$, die singu-

^{3a)} Man vergleiche B. L. VAN DER WAERDEN: Die Bedeutung des Bewertungsbegriffs für die algebraische Geometrie, Jber. Math. Ver. 52, 161–172 (1942), und die dort angegebene Literatur. Die Arbeit [9] von JUNG wird häufig benutzt.

⁴⁾ Obere Indices ohne Klammern: reelle Dimensionen, in Klammern: komplexe Dimensionen.

laritätenfrei in einem höher dimensional projektiven Raum eingebettet ist. (vgl. [13], S. 18ff.). Analog zu unserem Ergebnis gehen bei der birationalen Transformation gewisse „nicht-uniformisierbare“ Punkte von $F^{(2)}$ in algebraische Kurven von $\tilde{F}^{(2)}$ über.

Die Ergebnisse dieser Arbeit hängen sehr mit der algebraischen Geometrie zusammen und sind in gewissem Umfange als bekannt anzusehen. Doch scheint es mir, daß für die Funktionentheorie die Begriffe und Ergebnisse dieser Arbeit und die Sprache, in der sie formuliert sind, Interesse haben. Es ergeben sich erstens ganz neue Problemstellungen, und zweitens wird die Bedeutung von Sätzen der algebraischen Geometrie für die Funktionentheorie von mehreren Variablen vielleicht klarer herausgestellt als bisher.

§ 1. Zusammenstellung von Definitionen und Hilfssätzen.

Der σ -Prozeß.

1.1. $M^{(n)}$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit von n komplexen Dimensionen⁴⁾. Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung des Punktes P von $M^{(n)}$ meromorph und nicht identisch 0. f, g heißen äquivalent (in bezug auf Division) im Punkte P , wenn es eine Umgebung von P gibt, in der f/g regulär und ungleich 0 ist.

Eine Cousin-Verteilung C von meromorphen Ortsfunktionen in $M^{(n)}$ wird folgendermaßen gegeben:

Jedem Punkt P von $M^{(n)}$ ist eine Umgebung U_P und eine in U_P meromorphe (nicht identisch verschwindende) Funktion f_P so zugeordnet, daß gilt: Im Durchschnitt $U_P \cap U_Q$ zweier Umgebungen U_P, U_Q ist die Funktion f_P/f_Q regulär und ungleich 0. — Die Verteilungen C, \tilde{C} heißen „gleich“ (werden identifiziert), wenn f_P/\tilde{f}_P regulär und ungleich 0 in $U_P \cap \tilde{U}_P$ für alle $P \in M$. Alle folgenden Definitionen sind mit dieser Gleichheitsrelation verträglich.

Jede in $M^{(n)}$ meromorphe Funktion f läßt sich als Verteilung auffassen. Diese Verteilung wird ebenfalls mit f bezeichnet. Die Verteilungen C, C^* heißen äquivalent im Punkte P , wenn die lokalen Funktionen f_P von C und f_P^* von C^* in P äquivalent sind. Die Verteilung C heißt regulär, wenn alle f_P in U_P regulär sind.

C, C' seien Verteilungen in $M^{(n)}$ mit Ortsfunktionen f_P bzw. f'_P und Umgebungen U_P bzw. U'_P . Die Funktionen $f_P f'_P$ (Umgebungen $U_P \cap U'_P$) definieren eine Verteilung, die mit $C + C'$ bezeichnet werde. Die Verteilungen in $M^{(n)}$ bilden in bezug auf diese Addition eine abelsche Gruppe $\mathfrak{C}(M^{(n)})$. Das Nullelement dieser Gruppe wird durch die Funktion $f = 1$ gegeben.

1.2. $M_1^{(n)}, M_2^{(n)}$ seien komplexe Mannigfaltigkeiten. φ sei eine analytische Abbildung von $M_1^{(n)}$ in $M_2^{(n)}$ (d. h. φ wird „im Kleinen“ in bezug auf lokale Koordinaten in $M_1^{(n)}$ und $M_2^{(n)}$ durch ein n -tupel von regulären Funktionen gegeben). Die in bezug auf lokale Koordinaten gebildete Funktionaldeterminante von φ sei nicht identisch 0. Dann hat φ folgende Eigenschaft:

(1) Für jede Umgebung U eines jeden Punktes P von $M_1^{(n)}$ gilt: Es gibt kein analytisches Flächenstück $F^{(n-1)}$ in $M_2^{(n)}$, so daß $\varphi(U) \subset F^{(n-1)}$. φ bestimmt eine „Umkehrzuordnung“ φ^* :

(2) Für eine in einer offenen Menge $V \subset M_2^{(n)}$ reguläre Funktion f sei φ^*f die in $\varphi^{-1}(V)$ definierte reguläre Funktion $f\varphi$. $\varphi^*f = f\varphi$. Ist f nicht identisch 0, so ist wegen (1) auch φ^*f nicht identisch 0.

(3) Für eine in einer offenen Menge $V \subset M_2^{(n)}$ meromorphe Funktion $f = g/h$ (g, h in V regulär, h nicht identisch 0) sei φ^*f die in $\varphi^{-1}(V)$ definierte meromorphe Funktion φ^*g/φ^*h . Sind f_1, f_2 in V meromorph, so gilt:

$$(4) \quad \varphi^*(f_1 \pm f_2) = \varphi^*(f_1) \pm \varphi^*(f_2) \quad \text{und} \quad (5) \quad \varphi^*(f_1 f_2) = \varphi^*(f_1) \varphi^*(f_2).$$

(6) Ist f regulär in V und $f \neq 0$ in V , so ist $\varphi^*f \neq 0$ und regulär in $\varphi^{-1}(V)$.

(7) C sei eine Verteilung in $M_2^{(n)}$, gegeben durch Funktionen f_P . In $M_1^{(n)}$ ist dann durch die Funktionen φ^*f_P wegen (2), (3), (5), (6) eine Verteilung gegeben, die mit φ^*C bezeichnet werde. Ist C regulär, so ist auch φ^*C regulär.

1.3.⁵⁾ Wir beschränken uns von jetzt an auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. M (der Dimensionsindex wird weggelassen) sei eine solche komplexe Mannigfaltigkeit und P ein Punkt von M . Die komplexen Linienelemente (= analytische Flächenelemente) in P lassen sich als Punkte einer komplex-projektiven Geraden (= zweidimensionale Sphäre σ_P) auffassen. $M_P = (M - P) \cup \sigma_P$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, die aus M durch „Herausstechen“ von P und „analytisches Einsetzen“ von σ_P entsteht. Dieser σ -Prozeß, in [5] Einsetzen einer Trägersphäre genannt, ist ein lokaler Prozeß, der nur P und eine Umgebung von P betrifft:

(8) Es gibt eine analytische Abbildung t_P von M_P auf M mit folgenden Eigenschaften:

a) t_P bildet σ_P auf P ab.

b) t_P bildet $M_P - \sigma_P$ eineindeutig auf $M - P$ ab.

c) Wenn z_1, z_2 lokale Koordinaten in einer Umgebung von P mit $P = (0, 0)$ sind, dann gibt es in M_P lokale Koordinatensysteme $(z'_1, z'_2), (z''_1, z''_2)$, die eine Umgebung von σ_P überdecken und für die t_P gegeben wird durch:

$$\begin{aligned} z_1 &= z'_1 & z_1 &= z''_1 z''_2 \\ z_2 &= z'_1 z'_2 & z_2 &= z''_2. \end{aligned}$$

d) z_1, z_2 lassen sich als homogene Koordinaten für die komplex-projektive Gerade σ_P auffassen.

(9) σ_P ist eine analytische Fläche in M_P , die durch $z'_1 = 0, z''_2 = 0$ gegeben wird. σ_P ist als reguläre Cousinverteilung in M_P aufzufassen. z'_1, z''_2 sind Ortsfunktionen dieser Verteilung.

(10) Eine n -fache Iteration des in (8) beschriebenen einfachen σ -Prozesses erhält man so:

Im Punkte $P = P_1 \in M$ wird die Sphäre σ_P , eingesetzt. In M_{P_1} wird in einem Punkte $P_2 \in \sigma_{P_1}$ die Sphäre $\sigma_2 = \sigma_{P_2}$ eingesetzt. Man erhält die Mannigfaltigkeit $M_{P_1 P_2}$. In $M_{P_1 P_2}$ wird in einem Punkte P_3 , der auf $K_2 = t_{P_1}^{-1}(\sigma_{P_1}) \cup \sigma_{P_2}$ liegt (d. h. $t_{P_1}, t_{P_2}(P_3) = P$), die Sphäre $\sigma_3 = \sigma_{P_3}$ eingesetzt. Man erhält die Mannigfaltigkeit $M_{P_1 P_2 P_3}$ etc. In $M_{P_1 P_2 \dots P_{n-1}}$ wird in einem Punkte P_n , der auf $K_{n-1} = t_{P_{n-1}}^{-1}(K_{n-2}) \cup \sigma_{P_{n-1}}$ liegt (d. h. $t_{P_1}, t_{P_2}, \dots, t_{P_{n-1}}(P_n) = P$), die Sphäre

⁵⁾ Vgl. zum folgenden Abschnitt [8]. Siehe auch [1], S. 9, [5], S. 85 (Fußnote¹¹) und [6].

$\sigma_n = \sigma_{P_n}$ eingesetzt. Man erhält die Mannigfaltigkeit M_{P_1, P_2, \dots, P_n} . Wir sagen: M_{P_1, P_2, \dots, P_n} geht durch einen n -fachen σ -Prozeß in P aus M hervor.

(11) M^* gehe durch einen n -fachen σ -Prozeß in P aus M hervor. Man beweist durch Induktion über n : Es gibt in M^* n singularitätenfreie⁶⁾ kompakte analytische Flächen $\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*$ vom Geschlecht 0. Es ist $K_n = \sigma_1^* \cup \dots \cup \sigma_n^*$ (6a) Zwei σ_i^* haben keinen Schnittpunkt oder schneiden sich in genau einem Punkte einfach⁷⁾. Jeder Punkt von K_n liegt auf höchstens zwei σ_i^* . Es gibt eine analytische Abbildung t von M^* auf M mit folgenden Eigenschaften:

$$t(K_n) = P$$

t bildet $M^* - K_n$ eineindeutig auf $M - P$ ab.

K_n wird von H. HOFF als Sphärenbaum bezeichnet, da sich die Sphären σ_i^* eindeutig den Eckpunkten eines Baumes zuordnen lassen; Zwei σ_i^* haben genau dann einen Schnittpunkt, wenn die zugeordneten Eckpunkte im Baum eine Strecke begrenzen. Wir sagen auch: Die komplexe Mannigfaltigkeit M^* entsteht aus M durch (analytisches) Einsetzen eines Sphärenbaumes $t^{-1}(P)$ in P . M^* geht durch die „Transformation“ t^{-1} aus M hervor. $M^* = t^{-1}M$.

(12) P_j (j durchläuft endliche oder abzählbare Indexmenge) seien in M isoliert liegende Punkte. Nach dem vorangehenden ist klar, was die folgende Aussage bedeuten soll:

Die komplexe Mannigfaltigkeit M^* entsteht aus M durch Einsetzen von Sphärenbäumen K in die Punkte P_j . (Ein einfacher oder mehrfacher σ -Prozeß in P_j ist lokaler Natur. Er betrifft nur eine Umgebung von P_j . Die Punkte P_j liegen aber isoliert!).

Es sei K die Vereinigung aller K_j . Es gibt eine analytische Abbildung t von M^* auf M mit folgenden Eigenschaften:

$$t(K) = P_j$$

t bildet $M - K$ eineindeutig auf $M - \{P_j\}$ ab. ($\{P_j\}$ bedeutet die Menge aller Punkte P_j .)

Wir sagen: M^* geht durch die „Transformation“ t^{-1} aus M hervor. $M^* = t^{-1}M$.

(13) Bezeichnungstechnisch ist es manchmal bequem, wenn wir für irgendwelche Punkte $\{P_j\}$ von M den Übergang von M zu M^* als „Einsetzung der trivialen Sphärenbäume in die Punkte $\{P_j\}$ “ bezeichnen. (Es wird nichts verändert, jeder Punkt P_j wird durch sich selbst ersetzt.)

1.4. (1) Wir werden in diesem Abschnitt und später in 3.4. die folgende Tatsache verwenden: In einer (offenen) komplexen Mannigfaltigkeit ist die Schnittzahl einer ganzzahligen Homologieklass mit dem Nullstellengebilde N_f einer in M regulären Funktion f stets 0 (vgl. [12]). — Die irreduziblen Kompo-

⁶⁾ Der Punkt P der Fläche F in der komplexen Mannigfaltigkeit M heißt gewöhnlicher Punkt von F , wenn es in einer Umgebung von P ein lokales Koordinatensystem z_1, z_2 gibt, in dem F durch $z_1 = 0$ gegeben wird. Eine Fläche heißt singularitätenfrei, wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge von M ist und nur gewöhnliche Punkte hat. — Zwei Flächen F_1, F_2 schneiden sich in P einfach, wenn in bezug auf ein geeignetes Koordinatensystem z_1, z_2 mit $P = (0, 0)$ die Fläche F_1 durch $z_1 = 0$ und F_2 durch $z_2 = 0$ gegeben wird.

^{6a)} $\sigma_1^* = t_{P_n}^{-1} \dots t_{P_1}^{-1}(\sigma_1), \sigma_2^* = t_{P_n}^{-1} \dots t_{P_1}^{-1}(\sigma_2), \dots, \sigma_n^* = \sigma_n$ [vgl. (10)].

nenten von N_i sind mit den entsprechenden Vielfachheiten (= Ordnung des Verschwindens von f) zu versehen. „Schnittzahl“ wird durch „ \circ “ angedeutet.

(2) Im Punkte P_1 der komplexen Mannigfaltigkeit M werde die Sphäre σ_{P_1} eingesetzt. $\bar{\sigma}_{P_1}$ sei die von σ_{P_1} repräsentierte Homologiekategorie von M_{P_1} . Es ist $\bar{\sigma}_{P_1} \circ \bar{\sigma}_{P_1} = -1$.

Beweis: z_1, z_2 seien lokale Koordinaten in einer Umgebung U von P . Es sei $P_1 = (0,0)$. z_1 ist eine in $t_{P_1}^{-1}U$ reguläre Funktion, die σ_{P_1} und $(z_1'' = 0)$ als einfache Nullstellenfläche hat [vgl. 1.3. (8)]. Die Schnittzahl von σ_{P_1} mit dem Nullstellengebilde von z_1 ist wegen (1) gleich 0. Die Schnittzahl von σ_{P_1} mit $(z_1'' = 0)$ ist gleich 1. Daraus folgt die Behauptung. —

Setzt man in einem Punkte $P_2 \in \sigma_{P_1}$ die Sphäre ein, dann hat die Sphäre $t_{P_2}^{-1}(\sigma_{P_1})$ in der Mannigfaltigkeit $t_{P_2}^{-1}t_{P_1}^{-1}M$ mit sich selbst die Schnittzahl -2 . Beweis ebenfalls leicht mit Hilfe von (1). Allgemein: Die Schnittzahl einer Sphäre eines Sphärenbaumes verringert sich durch Anwendung des σ -Prozesses auf einen Punkt dieser Sphäre um 1. — Die „zuletzt eingesetzten“ Sphären eines Sphärenbaumes (das sind solche, die man durch einen einfachen (inversen) σ -Prozeß wieder herausnehmen kann), schneiden sich gegenseitig nicht und lassen sich durch „Selbstschnittzahl $= -1$ “ charakterisieren. Alle anderen Sphären des Baumes haben eine Selbstschnittzahl < -1 .

§ 2. Die Auflösung der algebraischen Singularitäten analytischer Flächen.

2.1. C sei eine reguläre Cousinverteilung in der komplexen Mannigfaltigkeit M (vgl. 1.1.). Für einen Punkt $P \in U_P$ läßt sich f_P in bezug auf lokale Koordinaten z_1, z_2 mit $P = (0,0)$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f_P = \mathfrak{P}_m(z_1, z_2) + \mathfrak{P}_{m+1}(z_1, z_2) + \cdots + \mathfrak{P}_k(z_1, z_2) + \cdots \quad (m \geq 0, k \geq m).$$

wo \mathfrak{P}_k ein in z_1, z_2 homogenes Polynom vom Grade k ist und \mathfrak{P}_m nicht identisch verschwindet. m hängt nur von C und P ab und heißt Ordnung von C in P .

Wir setzen in P die Sphäre σ_P ein (vgl. 1.3.) und betrachten die reguläre Verteilung t_P^*C in M_P [vgl. 1.2. (7), 1.3. (8)]. Im lokalen Koordinatensystem z'_1, z'_2 ist

$$\begin{aligned} t_P^* f_P &= \mathfrak{P}_m(z'_1, z'_1 z'_2) + \mathfrak{P}_{m+1}(z'_1, z'_1 z'_2) + \cdots = \\ &= z_1'^m (\mathfrak{P}_m(1, z'_2) + z'_1 \mathfrak{P}_{m+1}(1, z'_2) + \cdots). \end{aligned}$$

$t_P^* f_P$ ist Ortsfunktion für t_P^*C . Entsprechendes gilt für das (z'_1, z'_2) -System. σ_P [vgl. 1.3. (9)] ist m -fache Nullstellenfläche von t_P^*C . Die Verteilung $t_P^*C - m\sigma_P$ (vgl. 1.1.) werde mit $t_P^{**}C$ bezeichnet. $t_P^{**}C$ wird im (z'_1, z'_2) -System durch die Ortsfunktion $\mathfrak{P}_m(1, z'_2) + z'_1 \mathfrak{P}_{m+1}(1, z'_2) + \cdots$ gegeben. Entsprechendes gilt für das (z''_1, z''_2) -System. Es folgt:

(1) t_P^*C und $t_P^{**}C$ sind in jedem Punkte $Q \in M_P$, der nicht auf σ_P liegt, äquivalent und haben in Q die gleiche Ordnung wie C in $t_P(Q)$.

(2) Die Nullstellen N_i der Cousinverteilung $t_P^{**}C$ auf σ_P sind die Nullstellen des homogenen Polynoms $\mathfrak{P}_m(z_1, z_2)$. Man beachte 1.3. (8) d). N_i sei n_i -fache Nullstelle von $\mathfrak{P}_m(z_1, z_2)$. Die Anzahl dieser Nullstellen sei m' . Es ist $\sum_{i=1}^{m'} n_i = m$ und $m' \leq m$.

(3) $t_P^{**}C$ habe in N_i die Ordnung n'_i . Es ist $n'_i \leq n_i \leq m$.

(4) Wenn $t_P^* C$ in Q ($Q \in \sigma_P$) die Ordnung m hat, so ist wegen (2) und (3) $m' = 1$, also \mathfrak{P}_m die m -te Potenz eines Linearfaktors.

(5) Wenn f_P in P keine mehrfachen Faktoren hat, dann haben die Ortsfunktionen von $t_P^* f_P$ in keinem Punkte von σ_P mehrfache Faktoren.

2.2. (1) Bezeichnungen wie in 2.1. In P werde der Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ eingesetzt [vgl. 1.2., 1.3. (10), (11)]. Man hat in $t^{-1}M$ die Verteilung t^*C . Ist $t^{-1}M = M_{P_1, P_2, \dots, P_n}$, so ist $t^*C = t_{P_n}^* t_{P_{n-1}}^* \dots t_{P_1}^* C$. Wir definieren:
 $t^{**}C = t_{P_n}^{**} t_{P_{n-1}}^{**} \dots t_{P_1}^{**} C$.

$\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*$ seien die Sphären des Sphärenbaumes $t^{-1}(P)$. Ist die Ordnung von C in P gleich 0, dann ist $t^*C = t^{**}C$. Ist die Ordnung von C in P gleich $m \geq 0$, dann gilt: $t^*C - t^{**}C = a_1 \sigma_1^* + a_2 \sigma_2^* + \dots + a_n \sigma_n^*$. Die a_i sind $\geq m$ und sind durch den Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ und die lokale Funktion f_P von C bestimmt.

(2) Die Funktionen g, h seien in einer Umgebung von P regulär und h sei nicht identisch 0. In P werde wie in (1) der Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ eingesetzt. Wir bezeichnen die Verteilung $t^{**}g - t^{**}h$ mit $t^{**}(g/h)$. ($t^{**}g, t^{**}h$ sind Verteilungen in $t^{-1}M$, die Differenz ist im Sinne der Gruppenoperation von $\mathfrak{C}(t^{-1}M)$ zu bilden! (vgl. 1.1.)

(3) Es ist jetzt klar, was unter $t^*C, t^{**}C$ für eine beliebige (nicht notwendig reguläre) Verteilung C von M zu verstehen ist. t^* und t^{**} sind Isomorphismen von $\mathfrak{C}(M)$ in $\mathfrak{C}(t^{-1}M)$. t^{**} bildet $\mathfrak{C}(M)$ auf die Untergruppe derjenigen Verteilungen von $t^{-1}M$ ab, die keine Sphäre des eingesetzten Sphärenbaumes als Null- oder Polstellenfläche enthalten⁹⁾.

2.3.⁹⁾ Voraussetzung: f ist in der komplexen Mannigfaltigkeit U regulär. f hat im Punkte $P_1 \in U$ die Ordnung $m > 1$ und in allen anderen Punkten von U eine Ordnung ≤ 1 . (Im Punkte P_1 besitzt f dann keine mehrfachen Faktoren.) Wir verwenden die Bezeichnungen von 2.1. f wird als Verteilung C aufgefaßt.

Behauptung: Folgendes ist unmöglich (führt zum Widerspruch):

$t_{P_1}^{**} f$ hat in einem Punkte $P_2 \in \sigma_{P_1}$ die Ordnung m .

$t_{P_2}^{**} t_{P_1}^{**} f$ hat in einem Punkte $P_3 \in \sigma_{P_2}$ die Ordnung m .

\vdots

$t_{P_k}^{**} \dots t_{P_1}^{**} f$ hat in einem Punkte $P_{k+1} \in \sigma_{P_k}$ die Ordnung m .

usw. für jedes k .

⁷⁾ Wie in 1.3. (10) werde $P = P_1$ gesetzt.

⁹⁾ Den Beweis für „auf“ kann man so führen: Es genügt einen einfachen σ -Prozeß zu betrachten, $t^{-1}M = M_P$, und zu zeigen, daß es zu jeder regulären Cousinverteilung C^{**} , die in einer Umgebung $U \subset t^{-1}M$ von σ_P definiert ist, eine reguläre Verteilung C gibt, die in der Umgebung $tU \subset M$ von P definiert ist und für die $C^{**} = t^{**}C$. Vermöge t bildet sich C^{**} ab auf eine Cousinverteilung C , die in $tU - P$ definiert und dort regulär ist. Wie leicht aus bekannten Sätzen ([2], S. 49) zu folgern ist, läßt C sich regulär in P fortsetzen. C ist also in ganz tU definiert und regulär, und es ist $t^{**}C = C^{**}$.

⁹⁾ In diesem Abschnitt handelt es sich um eine genaue Übertragung der Überlegungen von JUNG ([9], S. 313–314) in unsere Bezeichnungsweise.

Beweis (Herleitung des Widerspruchs): Wegen 2.1. (4) hat f in bezug auf geeignete lokale Koordinaten z_1, z_2 mit $P_1 = (0, 0)$ die Entwicklung:

$$f = z_1^m + \mathfrak{P}_{m+1}(z_1, z_2) + \dots$$

f und $\partial f / \partial z_1$ sind teilerfremd, da f keine mehrfachen Faktoren enthält. Es gibt also lokale reguläre Funktionen h_1, h_2 von z_1, z_2 , so daß (*) $h_1 f + h_2 \partial f / \partial z_1 = h_3$, wo h_3 eine reguläre Funktion von z_2 allein ist, die nicht identisch Null ist und für $z_2 = 0$ eine r -fache Nullstelle habe.

Die Entwicklung von $t_{P_1}^* f$ in $P_2 \in \sigma_{P_1}$ beginnt mit der m -ten Potenz eines Linearfaktors, P_2 hat auf σ_{P_1} die homogenen Koordinaten $z_1 = 0, z_2 = 1$.

Die Entwicklung von $t_{P_k}^* \dots t_{P_1}^* f$ in $P_{k+1} \in \sigma_{P_k}$ beginnt mit der m -ten Potenz eines Linearfaktors. P_{k+1} ist nicht der Schnittpunkt von $t_{P_k}^{-1} \sigma_{P_{k-1}}$ und σ_{P_k} . Dem Sphärenbaum $(t_{P_1} \dots t_{P_k})^{-1} P_1$ ist daher der folgende (Strecken)-Baum zugeordnet: [vgl. 1.3 (11)]

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \sigma_{P_1}^*, \sigma_{P_1}^*, \sigma_{P_1}^*, \sigma_{P_{k-1}}^*, \sigma_{P_k}^* \end{array}$$

Ordnet man auch noch der Fläche $z_2 = 0$ einen Eckpunkt zu, dann kommt zu diesem Baum ein weiterer Eckpunkt hinzu, der nur mit dem $\sigma_{P_1}^*$ zugeordneten Eckpunkt zu verbinden ist. Es folgt:

- a) $t_{P_k}^* \dots t_{P_1}^* h_2$ hat σ_{P_k} als r -fache Nullstellenfläche.
- b) $t_{P_k}^* \dots t_{P_1}^* f$ hat σ_{P_k} als km -fache Nullstellenfläche.
- c) $t_{P_k}^* \dots t_{P_1}^* \partial f / \partial z_1$ hat σ_{P_k} mindestens als $k(m-1)$ -fache Nullstellenfläche, wie eine leichte Rechnung zeigt⁹⁾.

Aus (*), a), b), c) erhält man dann den erwünschten Widerspruch, da $r < k(m-1)$ für genügend großes k .

2.4. Voraussetzung wie in 2.3.

Behauptung: Man kann in P_1 einen Sphärenbaum $t^{-1}(P_1)$ einsetzen, so daß gilt:

$t^{**} f$ hat in jedem Punkte von $t^{-1} M$ eine Ordnung ≤ 1 .

Beweis: Wir definieren induktiv eine Folge von Mannigfaltigkeiten ${}^i M$ ($i = 1, 2, \dots$), die alle durch Einsetzen eines Sphärenbaumes $t_i^{-1}(P_1)$ in P_1 entstehen. ${}^i M = t_i^{-1} M$, ${}^1 M = M_{P_1}$, $t_1 = t_{P_1}$, ${}^i N_1, \dots, {}^i N_{l_i}$ seien diejenigen Punkte von ${}^i M$, in denen $t_i^{**} f$ eine Ordnung > 1 hat. Wegen 2.1. (1) liegen sie alle auf dem Sphärenbaum $t_i^{-1}(P_1)$. ${}^{i+1} M$ entsteht aus ${}^i M$ durch Einsetzen der Sphären (Anwendung des einfachen σ -Prozesses) in ${}^i N_1, \dots, {}^i N_{l_i}$. ${}^{i+1} M$ geht also durch mehrfachen σ -Prozeß in P aus M hervor. Die zugehörige Abbildung von ${}^{i+1} M$ auf M wird mit t_{i+1} bezeichnet. Wegen 2.1. (3) nehmen die Ordnungen der Verteilungen $t_i^{**} f$ nicht zu. Wendet man 2.3. auf die Mannigfaltigkeiten ${}^i M$ an, dann sieht man, daß die Ordnungen abnehmen. Es gilt daher: Die Folge der ${}^i M$ bricht ab, d. h. es gibt einen Index k derart, daß $t_k^{**} f$ in ${}^k M$ überall eine Ordnung ≤ 1 hat. Damit ist der Beweis geführt.

2.5. Wir setzen die Überlegungen von 2.4. fort. Die reguläre Funktion $t^{**} f$ hat als Nullstellenflächen die von $t^{**} f$ und die Sphären des Sphärenbaumes $t^{-1}(P)$, die mit den entsprechenden Vielfachheiten zu versehen sind [vgl. 2.2. (1)]. Es folgt:

Zu jedem Punkte Q von $t^{-1}M$ gibt es lokale Koordinaten u, v mit $Q = (0,0)$, so daß in einer Umgebung von Q gilt: [\sim für Äquivalenz in bezug auf Division; beachte 1.3. (11)]. $t^*f \sim u^r v^s (u + a v + \mathfrak{P}_2(u, v) + \dots)^k, r \geq 0, s \geq 0, k = 0$ oder $k = 1$. $u = 0$ (bzw. $v = 0$) stellt, wenn $r > 0$ (bzw. $s > 0$), eine der Sphären dar. $(u + a v + \mathfrak{P}_2(u, v) + \dots)^k$ stellt $t^{**}f$ dar. Wir setzen in Q , falls $k = 1$ und $r > 0$, die Sphäre σ_Q ein (einfacher σ -Prozeß), gehen also über zur Mannigfaltigkeit $t_Q^{-1}t^{-1}M$. Es ist dann im u', v' - (bzw. u'', v'')-Koordinatensystem:

$$(1) \quad \begin{aligned} t_Q^* t^* f &\sim u'^{r+s+1} v'^s (1 + a v' + u' \mathfrak{P}_2(1, v') + \dots) \\ t_Q^* t^* f &\sim u''^r v''^{r+s+1} (a + u'' + v'' \mathfrak{P}_2(u'', 1) + \dots). \end{aligned}$$

Ist $a = 0$, so sei $a_e v^e$ die niedrigste Potenz von v , die in $u + \mathfrak{P}_2(u, v)$ vorkommt. ($a_e \neq 0$). Eine solche Potenz gibt es, da $u + \mathfrak{P}_2(u, v) + \dots$ nicht u als Faktor enthalten kann. $u = 0$ stellt eine der Sphären dar!

In $u'' + v'' \mathfrak{P}_2(u'', 1) + \dots$ kommt dann die Potenz $a_e v''^{e-1}$ vor. Man setzt jetzt in dem Punkte mit $u'' = v'' = 0$ die Sphäre ein und kommt durch Wiederholung dieses Verfahrens schließlich zu einer Situation (1) mit $a \neq 0$. Damit ist folgendes bewiesen:

2.6. Voraussetzung: f ist in der komplexen Mannigfaltigkeit U regulär, f hat im Punkte $P \in U$ die Ordnung $m > 1$ und in allen anderen Punkten eine Ordnung ≤ 1 . In P besitzt f keine mehrfachen Faktoren.

Behauptung: Man kann in P einen Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ so einsetzen, daß gilt:

Für jeden Punkt Q von $t^{-1}U$ gibt es ein lokales Koordinatensystem u, v mit den folgenden Eigenschaften a), b), c).

a) $Q = (0,0)$,

b) $t^*f \sim u^r v^s$ ($r \geq 0, s \geq 0$),

c) Wenn $Q \in t^{-1}(P)$, dann liegt genau einer der drei folgenden Fälle vor:

1. Q liegt auf zwei Sphären von $t^{-1}(P)$. Es ist $t^*f \sim u^r v^s$ mit $r > 0$ und $s > 0$. Die beiden Sphären werden in der Umgebung von Q durch $u = 0$ und $v = 0$ gegeben.

2. Q liegt auf genau einer Sphäre und ist nicht Nullstelle von $t^{**}f$. Es ist $t^*f \sim u^r$ mit $r > 0$. Die Sphäre wird durch $u = 0$ gegeben.

3. Q liegt auf genau einer Sphäre und ist Nullstelle von $t^{**}f$. Es ist $t^*f \sim u^r v$ ($r > 0$) und $t^{**}f \sim v$. Die Sphäre wird durch $u = 0$ gegeben.

2.7. Voraussetzung: g ist in der komplexen Mannigfaltigkeit U meromorph und verschwindet nicht identisch. $P \in U$. In jedem Punkte $Q \in U, Q \neq P$, ist $g \sim v^s$ (s ganze Zahl) in bezug auf ein geeignetes lokales Koordinatensystem mit $Q = (0,0)$.

Behauptung: Man kann in P einen Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ einsetzen, so daß gilt:

In jedem Punkte Q von $t^{-1}U$ ist $t^*g \sim u^r v^s$ (r, s ganz) in bezug auf geeignete lokale Koordinaten mit $Q = (0,0)$. Ist g regulär in U , so sind für jeden Punkt Q die Exponenten $r, s \geq 0$.

Beweis: In einer Umgebung V von P hat g folgende Darstellung:

$g \sim f_1^{s_1} \dots f_l^{s_l}$ (f_i regulär in V und irreduzibel in P ; f_i, f_j teilerfremd in P für $i \neq j$; s_i ganze Zahl).

Wir wenden den Satz 2.6. auf die in V definierte reguläre Funktion $f = f_1 \dots f_l$ an. Den zu f nach 2.6. gehörigen Sphärenbaum setzen wir in P ein und beweisen unsere Behauptung für die so entstehende Mannigfaltigkeit $t^{-1}M$. Es genügt, Punkte $Q \in t^{-1}(P)$, die unter Punkt 3 in 2.6. fallen, zu betrachten. Es ist $t^{**}f \sim v$. Daher gilt für genau ein i ($1 \leq i \leq l$): $t^{**}f_i \sim v$ und für $j \neq i$ ($1 \leq j \leq l$): $t^{**}f_j \sim 1$.

Es folgt $t^{**}g \sim v^i$ und $t^*g \sim u^k v^i$ (k ganz), da $u = 0$ eine Sphäre darstellt und $t^*g - t^{**}g$ nur Sphären des Sphärenbaumes als Null- oder Polstellenflächen hat.

2.8. Hilfssatz: R sei der gewöhnliche z_1, z_2 -Raum. Wir betrachten die Funktion $f = z_1^r z_2^s$ (r, s ganze Zahlen) und behaupten: Man kann im Punkte $P_1 = (0,0)$ einen Sphärenbaum $t^{-1}(P_1)$ einsetzen, derart, daß t^*f in $t^{-1}R$ keine Unbestimmtheitsstelle hat und daß für jeden Punkt $Q \in t^{-1}R$ in bezug auf lokale Koordinaten u, v mit $Q = (0,0)$ gilt:

$t^*f \sim u^a v^b$, wobei die ganzen Zahlen a, b beide ≥ 0 oder beide ≤ 0 sind.

Beweis: Für $r, s \geq 0$ und $r, s \leq 0$ ist die Behauptung trivial. Es genügt, die Behauptung zu beweisen für $f = z_1^r / z_2^s$ (r, s beide positiv und $r \geq s$). Wir charakterisieren eine solche Unbestimmtheitsstelle durch Angabe des Zahlenpaares r, s . In P_1 werde die Sphäre σ_P eingesetzt. σ_P wird $(r-s)$ -fache Nullstellenfläche von t_P^*f . Ist $r = s$, so ist die Behauptung bereits bewiesen. Ist $r > s$, so gibt es in R_{P_1} genau eine Unbestimmtheitsstelle P_2 , nämlich den Schnittpunkt von σ_{P_1} und $z_2' = 0$. Zu P_2 gehört das Zahlenpaar $(r-s, s)$. Ist $r-s > s$, so gibt es in R_{P_1, P_2} genau eine Unbestimmtheitsstelle P_3 : $(r-2s, s)$. Ist $r-s = s$, so ist die Behauptung bewiesen. Ist $r-s < s$, so gibt es in R_{P_1, P_2} genau eine Unbestimmtheitsstelle P_3 : $(r-s, s-(r-s))$ Es wird nun fortlaufend in die jeweils einzige Unbestimmtheitsstelle P_k in $R_{P_1, \dots, P_{k-1}}$ die Sphäre σ_{P_k} eingesetzt. Man sieht, daß die Zahlenpaare, die die Unbestimmtheitsstellen charakterisieren, sich dem euklidischen Algorithmus für das Paar r, s entsprechend verhalten. Es gibt also ein k , so daß zur Unbestimmtheitsstelle P_k in $M_{P_1, \dots, P_{k-1}}$ ein Zahlenpaar (qs', s') gehört. Nach q weiteren Einsetzungen von Sphären in die jeweils einzige Unbestimmtheitsstelle gelangt man zu einer Mannigfaltigkeit $t^{-1}R$, in der t^*f keine Unbestimmtheitsstelle hat.

2.9. C sei eine Cousinverteilung in der komplexen Mannigfaltigkeit M (vgl. 1.1.). Wir nennen einen Punkt $P \in M$ gewöhnlichen Punkt von C , wenn es lokale Koordinaten u, v mit $P = (0,0)$ gibt, für die $f_P \sim v^s$ mit ganzem s . Ein (nicht gewöhnlicher) Punkt Q heißt Doppelpunkt von C , wenn $f_Q \sim u^a v^b$ (a, b ganz und beide $\neq 0$; u, v geeignete Koordinaten mit $Q = (0,0)$). Ein Doppelpunkt heißt bestimmter Doppelpunkt, wenn a, b beide positiv oder beide negativ sind. Jeder andere Doppelpunkt Q ist Unbestimmtheitsstelle von f_Q und heißt unbestimmter Doppelpunkt. Die nicht gewöhnlichen Punkte liegen bekanntlich isoliert. Es gibt daher nur abzählbar viele nicht gewöhn-

liche Punkte. Wir können nun den folgenden *Hauptsatz* beweisen, der die vorbereitenden lokalen Sätze dieses Paragraphen zusammenfaßt.

Voraussetzung: C ist eine Cousinverteilung in der komplexen Mannigfaltigkeit M . P_i sind die (abzählbar vielen) isoliert liegenden, nicht gewöhnlichen Punkte von M , die keine bestimmten Doppelpunkte sind.

Behauptung: Man kann in die isoliert liegenden Punkte P_i Sphärenbäume ${}_iK$ einsetzen, derart, daß für die dadurch entstehende komplexe Mannigfaltigkeit $t^{-1}M$ [vgl. 1.3. (12)] folgendes gilt:

t^*C hat in $t^{-1}M$ nur gewöhnliche Punkte und bestimmte Doppelpunkte. Es sei K die Vereinigung aller ${}_iK$. t bildet $M - K$ eineindeutig und analytisch auf $M - \{P_i\}$ ab. ($\{P_i\}$ bedeutet die Menge aller Punkte P_i). Die Verteilungen t^*C und C gehen dabei ineinander über. Identifiziert man $M - K$ und $M - \{P_i\}$ vermöge t , dann kann man also sagen: t^*C und C stimmen außerhalb der eingesetzten Sphärenbäume überein.

Der Beweis ergibt sich durch Anwendung von 2.7. auf paarweise fremde Umgebungen U_i der P_i , die außer P_i keinen nicht gewöhnlichen Punkt enthalten. Man setzt also nach 2.7. in jedes P_i , das kein Doppelpunkt ist, einen Sphärenbaum ein und gelangt zu einer Mannigfaltigkeit $t_i^{-1}M$, in der t_i^*C nur gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat. In die unbestimmten Doppelpunkte von t_i^*C setzt man nach 2.8. Sphärenbäume ein und gelangt so zu einer Mannigfaltigkeit $t^{-1}M = t_i^{-1}t_i^{-1}M$, in der t^*C nur gewöhnliche Punkte und bestimmte Doppelpunkte hat.

§ 3. Konstruktion der RIEMANNschen Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$ einer algebroiden Funktion f .

3.1. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Definitionen und Sätze über „algebroiden“ Funktionen zusammenstellen. M sei eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ein beschränktes algebroides Funktionselement mit dem Grundpunkt P von M wird definiert durch ein irreduzibles ausgezeichnetes Pseudopolynom π mit der Spitze P [vgl. [2], S. 57].

$$(1) \quad \pi = (w - w_0)^r + a_1(w - w_0)^{r-1} + \dots + a_r \quad (r > 0).$$

Die a_i sind in P reguläre Funktionen, die in P verschwinden. Die Diskriminante D_π dieses Polynoms (aufgefaßt als Polynom in $(w - w_0)$) ist nicht identisch 0. $D_\pi(P) = 0$ genau dann, wenn $r > 1$. Durch $\pi = 0$ werden lokale mehrdeutige Funktionen w_1, \dots, w_r definiert, die sich außerhalb von $D_\pi = 0$ regulär verhalten und von denen je zwei durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

(2) Ein algebroides Funktionselement mit dem Grundpunkt P wird definiert durch ein beschränktes algebroides Funktionselement (gegeben durch π) und eine in P reguläre Funktion g , die nicht identisch 0 ist. Durch dieses algebroides Funktionselement werden lokale mehrdeutige Funktionen $w_1 = w_1/g, \dots, w_r = w_r/g$ gegeben, die sich außerhalb von $D_\pi = 0$ meromorph verhalten und von denen je zwei durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

(w_1, \dots, w_r sind die durch $\pi = 0$ definierten Funktionen.) (π, g) und (π', g') definieren dasselbe algebroides Funktionselement, wenn die von ihnen erzeugten lokalen mehrdeutigen Funktionen übereinstimmen.

Algebroiden Funktionen mit dem Grundpunkt P werden wir durch A_P andeuten.

A_P sei gegeben durch das Pseudopolynom π und die in P reguläre Funktion g . Es gibt eine Umgebung U von P , in der π und g noch definiert sind. π besitzt in jedem Punkte Q von U eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Pseudopolynome mit der Spitze Q . Mehrfache Faktoren treten nicht auf. Diese Pseudopolynome und g repräsentieren algebroiden Funktionselemente ${}^1A_Q, \dots$

${}^sA_Q (s \leq r)$. Wir sagen: A_P und 1A_Q sind benachbart (vgl. [2], S. 16). In üblicher Weise kann jetzt die analytische Fortsetzung von A_P längs in M verlaufenden von P ausgehenden Wegen und die Verbindbarkeit zweier algebroiden Funktionselemente definiert werden. Wir definieren (vgl. [2], S. 16):

(3) Die Gesamtheit aller mit A_P verbindbaren algebroiden Funktionselemente heißt der *RIEMANNsche Bereich* der durch *Fortsetzung von A_P in M* erzeugten algebroiden Funktion f . Ein *RIEMANNscher Bereich* ist in naheliegender Weise als zusammenhängender HAUSDORFFscher Raum aufzufassen, der einem Teil von M überlagert ist.

Die Überlagerungsabbildung $(A_P \rightarrow P)$ wollen wir mit ψ bezeichnen.

(4) B sei der *RIEMANNsche Bereich* der algebroiden Funktion f . $A_P \in B$ sei gegeben durch π, g [vgl. (1), (2)]. Wir definieren in B eine *eindeutige Funktion f* durch $f(A_P) = w_0/g(P)$. f ist nur erklärt, wenn $g(P) \neq 0$.

(5) Ein Punkt (= algebroides Funktionselement A_P) des *RIEMANNschen Bereiches* B heiße *uniformisierbar* ([2], S. 14), wenn es eine Umgebung U von $A_P (A_P \in U \subset B)$, eine Umgebung \tilde{U} des Nullpunktes des komplexen (t_1, t_2) -Raumes und eine topologische Abbildung $\tilde{\kappa}$ von \tilde{U} auf U gibt, so daß $\psi \circ \tilde{\kappa}$ eine analytische Abbildung von \tilde{U} auf $\psi(U)$ ist.

t_1, t_2 heißen *ortsuniformisierende Parameter*.

Jeder Punkt A_P mit $r = 1$ [vgl. (1)] ist *uniformisierbar*.

(6) Ein Punkt A_P mit $r > 1$ heißt *Verzweigungspunkt*. In ihm hängen r „Blätter“ des *RIEMANNschen Bereiches* zusammen. Die durch P gehende zu A_P gehörende Verzweigungsflche ist in $D_\pi = 0$ enthalten.

(7) Wenn D_π in P einen gewöhnlichen Punkt hat, d. h. wenn D_π in bezug auf ein geeignetes lokales Koordinatensystem durch $D_\pi \sim u^s (s > 0; \text{vgl. 2.9.})$ gegeben werden kann, so ist A_P *uniformisierbar* ([4], S. 3 und [10]. Verzweigungsstelle 1. Art!). Aus (7) folgt:

(8) Die nicht-uniformisierbaren Verzweigungspunkte eines *RIEMANNschen Bereiches* liegen isoliert.

(9) *Satz:* Die Menge aller uniformisierbaren Punkte eines *RIEMANNschen Bereiches* B ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren komplexe Struktur durch die ortsuniformisierenden Parameter gegeben wird.

Beweis: Es genügt zu zeigen: Wenn durch die topologischen Abbildungen κ, κ' [vgl. (5)] zwei Systeme $(t_1, t_2), (t'_1, t'_2)$ von ortsuniformisierenden Para-

metern des Punktes $A_P \in B$ festgelegt werden, so ist die Abbildung $\kappa'^{-1} \kappa$ in einer Umgebung des Nullpunktes des t_1, t_2 -Raumes analytisch¹⁰⁾. Diese Behauptung folgt zunächst ohne weiteres für Punkte A_P mit $r = 1$, und unter Verwendung hiervon ergibt sie sich für (uniformisierbare) Verzweigungspunkte aus einem bekannten Satz über aufhebbare Singularitäten¹¹⁾.

(10) Aus (4) ergibt sich dann wieder mit Hilfe des erwähnten Satzes über aufhebbare Singularitäten: In der komplexen Mannigfaltigkeit der uniformisierbaren Punkte ist f eine meromorphe Funktion. (f läßt sich in die Punkte mit $g(P) = 0$ meromorph fortsetzen.)

(11) Eine in einer komplexen Mannigfaltigkeit definierte meromorphe Funktion ohne Unbestimmtheitsstellen ist eine Abbildung der Mannigfaltigkeit in die RIEMANNsche Zahlenkugel S^2 . Die a -Stellenflächen schneiden sich nicht. Wir wollen eine solche Funktion *meromorph und bestimmt* nennen.

(12) B sei der RIEMANNsche Bereich einer algebroiden Funktion f , der einem Teil einer komplexen Mannigfaltigkeit M überlagert ist. ψ sei die Überlagerungsabbildung von B in M .

Definition: Eine komplexe Mannigfaltigkeit \tilde{M} heißt eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit von f , wenn es eine stetige Abbildung t von \tilde{M} auf B gibt, so daß folgendes gilt:

1. ψt ist eine analytische Abbildung von \tilde{M} auf $\psi(B) \subset M$.

2. Die Funktion $\tilde{f} = f t$ [siehe (4), (10), (11)] ist in \tilde{M} meromorph und bestimmt.

(\tilde{f} ist so definiert: für Q von \tilde{M} sei $t(Q) = A_P \in B$, dann ist $\tilde{f}(Q) = f(A_P) = w_0/g(P)$).

3. B^* sei die komplexe Mannigfaltigkeit, die aus B durch „Herausstechen“ der isolierten nicht uniformisierbaren Punkte und der Unbestimmtheitsstellen von f entsteht. [Beachte (10).]

Für jeden solchen Ausnahmepunkt Q ($Q \in B$, $Q \notin B^*$) ist $t^{-1}(Q)$ Vereinigungsmenge S_Q von endlich vielen kompakten irreduziblen analytischen Flächen, die in \tilde{M} eingebettet sind.

4. t ist eine eindeutige analytische Abbildung von $\tilde{M} - \{S_Q\}$ auf B^* . $\{S_Q\}$ bezeichnet dabei die Vereinigungsmenge aller S_Q . M entsteht, anschaulich gesagt, aus B , indem man jeden Ausnahmepunkt Q durch S_Q ersetzt.

Das Ziel dieses § 3 ist, zu beweisen, daß es zu jeder algebroiden Funktion f eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit gibt. Die Einsetzung von S_Q in einem Ausnahmepunkt Q wird, so wie das Einsetzen von Sphärenbäumen, ein rein lokaler Prozeß sein. Die lokalen Überlegungen werden in den nächsten Abschnitten durchgeführt.

(13) Jeder RIEMANNsche Bereich im Sinne von (3) ist ein RIEMANNsches Gebiet im Sinne von [1]. In [1] haben H. BEHNKE und K. STEIN für RIEMANNsche Gebiete G den Begriff „Modifikation von G in einer abgeschlossenen

¹⁰⁾ Man beachte: Aus „analytisch und eineindeutig“ folgt ([3], S. 179), daß die Funktionaldeterminante stets von 0 verschieden ist.

¹¹⁾ Siehe [11], Kap. 3, § 5, 1 (S. 191) oder [3], S. 173.

Teilmenge $\mathfrak{R} \subset G^*$ definiert. Wenn \mathfrak{R} speziell eine Menge von in G isoliert liegenden Punkten ist ($\mathfrak{R} = \{P_j\}$; j durchläuft höchstens abzählbare Indexmenge), dann kann „Modifikation von G in \mathfrak{R} “ so definiert werden:

Das RIEMANNSCHE Gebiet $*G$ ist Modifikation von G in \mathfrak{R} , wenn folgendes gilt: Es gibt eine stetige Abbildung t von $*G$ auf G . t ist analytischer Homöomorphismus von $*G - t^{-1}(\mathfrak{R})$ auf $G - \mathfrak{R}$. (In [1] werden $*G - t^{-1}(\mathfrak{R})$ und $G - \mathfrak{R}$ identifiziert.) Wir nennen $*G$ *kompakte Modifikation von G in $\mathfrak{R} = \{P_j\}$* , wenn für jeden Punkt P_j das Urbild $t^{-1}(P_j)$ kompakt ist.

Aus [1], 5. (c) folgt: Wenn die komplexe Mannigfaltigkeit M kompakte Modifikation von G in $\mathfrak{R} = \{P_j\}$ ist, dann ist für jeden Punkt P_j das Urbild $t^{-1}(P_j)$ Vereinigungsmenge von endlich vielen in M liegenden irreduziblen kompakten analytischen Flächen oder (Trivialfall) ein einzelner Punkt von M . Wir können nun die Definition (12) auch so fassen:

Die komplexe Mannigfaltigkeit \tilde{M} heißt eine RIEMANNSCHE Mannigfaltigkeit von f , wenn \tilde{M} eine kompakte Modifikation des RIEMANNschen Bereiches B der Funktion f in den nicht-uniformisierbaren Punkten von B und den Unbestimmtheitsstellen von f ist und wenn die Funktion ft in ganz \tilde{M} meromorph und bestimmt ist. (t ist die Modifikationsabbildung von \tilde{M} auf B)

Anmerkung: M sei eine komplexe Mannigfaltigkeit, P ein Punkt von M . H. HOFF [8] hat bewiesen, daß jede kompakte Modifikation M^* von M in P durch Einsetzen eines Sphärenbaumes in P aus M hervorgeht. [Beachte 1.3. (13).]

3.2. Wir wollen in diesem Abschnitt die nicht-uniformisierbaren Punkte eines RIEMANNschen Bereiches B untersuchen. Es genügt, *beschränkte algebroid Funktionselemente* zu betrachten. Es handelt sich um ein lokales Problem: U sei eine Umgebung des Nullpunktes $P = (0,0)$ des z_1, z_2 -Raumes. Wir fassen U als komplexe Mannigfaltigkeit auf. A_P sei ein beschränktes algebroides Funktionselement, gegeben durch ein Pseudopolynom π mit der Spitze P .

$$\pi = (w - w_0)^r + a_1(w - w_0)^{r-1} + \dots + a_r.$$

U sei bereits so klein gewählt, daß alle a_i in U regulär sind und daß die Voraussetzung von 2.7 für $y = D_\pi$ erfüllt ist. Durch $\pi = 0$ wird in U eine algebroid Funktion $w = w(z_1, z_2)$ definiert, deren RIEMANNschen Bereich wir $B(A_P)$ nennen wollen. w ist in $B(A_P) - A_P$ regulär und in A_P stetig [vgl. 3.1. (9), (10)].

Aus 2.7. folgt: Man kann in P einen Sphärenbaum $t^{-1}(P)$ so einsetzen, daß t^*D_π in $t^{-1}(M)$ nur gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat. In $t^{-1}(M)$ gilt nun folgendes: Durch $t^*\pi = (w - w_0)^r + (t^*a_1)(w - w_0)^{r-1} + \dots + t^*a_r = 0$ wird in $t^{-1}(M)$ eine algebroid Funktion definiert, die mit t^*w bezeichnet werde. Der RIEMANNsche Bereich dieser Funktion ist $t^{-1}(M)$ überlagert. Wir nennen ihn $t^*B(A_P)$. In $t^*B(A_P)$ ist t^*w eine eindeutige Funktion, die auf den Überlagerungen der Sphären des eingesetzten Sphärenbaumes den Wert w_0 hat. t^*D_π ist Diskriminante von $t^*\pi$. Hieraus folgt [vgl. 3.1. (7)]:

Die nicht-uniformisierbaren Verzweigungspunkte von $t^*B(A_P)$, die einem Punkte Q von $t^{-1}(M)$ überlagert sind, haben in Q zwei Verzweigungsflächen, die sich in Q einfach schneiden (und in bezug auf ein geeignetes Koordinaten-

system u, v mit $Q = (0,0)$ durch $u = 0$ und $v = 0$ gegeben werden können). Der Punkt Q ist Schnittpunkt zweier Sphären von $t^{-1}(P)$ oder Schnittpunkt einer Sphäre mit $t^{**}D_n$.

3.3. In dem RIEMANNschen Bereich $t^*B(A_P)$ kommen nur nicht-uniformisierbare Verzweigungspunkte von einem gewissen Typus vor, den wir lokal so kennzeichnen können:

(1) In einer Umgebung des Nullpunktes des z_1, z_2 -Raumes, $P = (0,0)$, ist ein beschränktes algebroides Funktionselement gegeben, dessen Verzweigungsflächen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ sind.

(2) *Definition:* A_P, A'_Q seien zwei algebroiden Funktionselemente, die wir als Punkte in zwei RIEMANNschen Bereichen $B(A_P), B(A'_Q)$ auffassen können. A_P, A'_Q besitzen Umgebungen U, U' in $B(A_P)$ bzw. $B(A'_Q)$, so daß $U - A_P, U' - A'_Q$ komplexe Mannigfaltigkeiten sind, also von nicht-uniformisierbaren Punkten frei sind. A_P, A'_Q heißen analytisch äquivalent, wenn es solche Umgebungen U, U' und eine topologische Abbildung φ von U auf U' gibt, die A_P auf A'_Q abbildet und $U - A_P$ analytisch auf $U' - A'_Q$ abbildet.

Eine Abbildung mit diesen Eigenschaften heiße analytischer Homöomorphismus von U auf U' .

(3) Das algebroiden Funktionselement $A_{n,q}: w^n - z_1 z_2^{n-q} \quad (1 \leq q < n; n, q \text{ teilerfremd})$ ist vom Typus (1). Die zugehörige algebroiden Funktion $(z_1 z_2^{n-q})^{1/n}$ betrachten wir im (offenen) z_1, z_2 -Raum, sie erzeugt eine n -blättrige Überlagerung $B(n, q)$. Im Punkte $A_{n,q} \in B(n, q)$ hängen alle n Blätter zusammen. $A_{n,q}$ ist nicht uniformisierbar. Dies kann man auf verschiedene Weise einsehen.

a) In [1], S. 4, wird bewiesen, daß $A_{2,1}$ nicht uniformisierbar ist. Dieser Beweis läßt sich auch für $A_{n,q}$ durchführen.

b) Der Rand einer geeigneten Umgebung von $A_{n,q}$ in $B(n, q)$ ist der Linsenraum $L(n, q)$. ($L(n, q) = \text{Diskontinuitätsbereich der Drehgruppe}$
 $t'_1 = e^{2\pi i \nu q/n} t_1, t'_2 = e^{2\pi i \nu/n} t_2, 0 \leq \nu < n$, auf der $S^3: |t_1|^2 + |t_2|^2 = 1$).

$L(n, q)$ ist nicht vom Homologietyp der 3-Sphäre. $A_{n,q}$ besitzt daher kein 4-dimensionales Element als Umgebung.

c) Vgl. 3.4. (14).

(4) Jeder Verzweigungspunkt vom Typ (1) ist uniformisierbar oder einem algebroiden Funktionselement $A_{n,q}$ analytisch äquivalent.

Der Beweis ergibt sich aus [9], S. 295—300.

3.4. Wir untersuchen in diesem Abschnitt das algebroiden Funktionselement $A_{n,q}$ und den RIEMANNschen Bereich $B(n, q)$. Wir werden eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit [vgl. 3. 1. (12)] von $(z_1 z_2^{n-q})^{1/n}$ konstruieren. Wir werden dabei das folgende Prinzip verwenden:

N_1, N_2 seien topologische Mannigfaltigkeiten. U_1 sei eine offene Menge von N_1, U_2 eine offene Menge von N_2 und φ eine topologische Abbildung von U_1 auf U_2 .

Wir identifizieren zwei Punkte P_1 von N_1 und P_2 von N_2 , wenn $P_2 = \varphi(P_1)$.

Durch diese Identifizierung entsteht ein topologischer Raum, aber im allgemeinen kein HAUSDORFFscher Raum, da das Trennungsaxiom „zwei

verschiedene Punkte besitzen punktfremde Umgebungen“ nicht erfüllt zu sein braucht. Damit ein HAUSDORFFScher Raum entsteht, dieser ist dann eine topologische Mannigfaltigkeit, ist notwendig und hinreichend:

(1) Wenn Q_1 irgendein Randpunkt von U_1 ist ($Q_1 \in N_1$) und wenn Q_2 irgendein Randpunkt von U_2 ist ($Q_2 \in N_2$), so gibt es eine Umgebung V_1 von Q_1 und eine Umgebung V_2 von Q_2 ($V_1 \subset N_1$, $V_2 \subset N_2$), so daß V_1, V_2 keine zu identifizierenden Punkte enthalten. —

(2) Sind N_1, N_2 komplexe Mannigfaltigkeiten (gleicher Dimension) und ist φ eine analytische Abbildung von U_1 auf U_2 , so ist, wenn die Bedingung (1) erfüllt ist, die durch Identifizierung entstehende Mannigfaltigkeit eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der sich sowohl die zulässigen Koordinaten von N_1 als auch die von N_2 als lokale zulässige Koordinaten verwenden lassen.

Wir kommen nun zur Untersuchung von $A_{n,q}$ [vgl. 3.3. (3)]. Wir betrachten einen etwas abgewandelten Euklidischen Algorithmus für das Zahlenpaar n, q .

Wir setzen $\lambda_0 = n, \lambda_1 = q$.

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 & = b_1 \lambda_1 - \lambda_2, & 0 \leq \lambda_2 < \lambda_1, \quad 1 < b_1, \\ \lambda_1 & = b_2 \lambda_2 - \lambda_3, & 0 \leq \lambda_3 < \lambda_2, \quad 1 < b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{s-1} & = b_s \lambda_s - \lambda_{s+1}, & \lambda_{s+1} = 0, \lambda_s = 1, \quad 1 < b_s. \end{array}$$

Die Zahlen λ_k ($0 \leq k \leq s+1$) können mit Hilfe der b_k induktiv berechnet werden:

$$(3) \quad \lambda_0 = n, \quad \lambda_1 = q, \quad \lambda_k = b_{k-1} \lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}.$$

Wir definieren induktiv Zahlen μ_k durch:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_k = b_{k-1} \mu_{k-1} - \mu_{k-2}$$

und Zahlen ν_k durch:

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_k = b_{k-1} \nu_{k-1} - \nu_{k-2}.$$

Man beweist induktiv:

$$(4) \quad \lambda_k + (n - q) \mu_k = n \nu_k$$

$$(5) \quad \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k = n$$

$$(6) \quad \mu_{k+1} \nu_k - \mu_k \nu_{k+1} = 1.$$

Es gilt ferner:

$$(7) \quad \begin{array}{lll} \mu_0 = 0, & 0 < \mu_k < \mu_{k+1}, & \mu_{s+1} = n \quad (0 < k \leq s), \\ & 0 < \nu_k \leq \nu_{k+1}, & \nu_{s+1} = n - q \quad (0 \leq k \leq s). \end{array}$$

Wir betrachten nun $s+1$ Exemplare des (offenen) komplexen u, v Raumes: R_0, \dots, R_s . Die Koordinaten in R_k sollen mit u_k, v_k bezeichnet werden.

Wir nehmen aus dem R_k die analytische Ebene $u_k = 0$ heraus und erhalten eine komplexe Mannigfaltigkeit, die wir R'_k nennen. Nehmen wir die analytische Ebene $v_k = 0$ heraus, so erhalten wir eine komplexe Mannigfaltigkeit R''_k .

(8) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1}^{b_k} v_{k-1} \\ v_k &= 1/u_{k-1} \end{aligned} \quad (1 \leq k \leq s)$$

stellen eine analytische und topologische Abbildung φ_{k-1} von R'_{k-1} auf R'_k dar. Wir identifizieren durch φ_{k-1} aufeinander bezogene Punkte von R'_{k-1} und R'_k . Die Bedingung (1) ist erfüllt. Es entsteht eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ausgehend von R_0 und R_1 konstruieren wir so eine Mannigfaltigkeit R_{01} . R_1 kann als offene Menge von R_{01} aufgefaßt werden. Durch Identifizierung von R'_1 mit R'_2 , vermittelt durch die Abbildung φ_1 , erhalten wir aus R_{01} und R_2 eine komplexe Mannigfaltigkeit R_{012} . Die Bedingung (1) war nämlich wieder erfüllt. Wir gelangen durch Wiederholung dieses Verfahrens schließlich zu einer Mannigfaltigkeit $R_{01 \dots s}$, die wir $R(n, q)$ nennen wollen. $R(n, q)$ ist mit $s+1$ zulässigen Koordinatensystemen $u_k, v_k, 0 \leq k \leq s$, überdeckt.

(8) ist als Koordinatentransformation in $R(n, q)$ aufzufassen. In $R(n, q)$ sind s kompakte analytische Flächen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ vom Geschlecht 0 (d. h. Sphären) singularitätenfrei eingebettet:

(9) σ_k wird im k -ten Koordinatensystem durch $u_k = 0$ gegeben und v_k ist laufende inhomogene Koordinate auf σ_k , im $(k-1)$. Koordinatensystem wird σ_k durch $v_{k-1} = 0$ gegeben und u_{k-1} ist laufende Koordinate auf $\sigma_k, (1 \leq k \leq s)$.

$$(10) \quad \text{Durch } \begin{cases} z_1 = u_k^{1/k} v_k^{1/k+1} \\ z_2 = u_k^{\mu_k} v_k^{\mu_k+1} \\ w = u_k^{\nu_k} v_k^{\nu_k+1} \end{cases} \quad \text{wird eine Abbildung } \gamma \text{ von } R(n, q) \text{ in } B(n, q) \text{ definiert.}$$

Beweis: Zu zeigen ist erstens, daß $w^n = z_1 z_2^{n-s}$ identisch in u_k, v_k erfüllt ist. Das folgt aus (4). Zweitens ist zu zeigen, daß der Bildpunkt (z_1, z_2, w) in $B(n, q)$ nicht von dem speziell gewählten Koordinatensystem von $R(n, q)$ abhängt. Dies beweist man mit Hilfe von (3) und (8).

(11) γ bildet alle Flächen σ_k auf $(z_1 = 0, z_2 = 0, w = 0)$ ab, d. h. auf den Punkt $A_{n,q}$ von $B(n, q)$. [Man beachte (7), (9).] Man zeigt ferner ohne Schwierigkeit:

(12) γ bildet $R(n, q) - (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_s)$ topologisch und analytisch auf $B(n, q) - A_{n,q}$ ab.

Aus (10) bis (12) erhält man: $R(n, q)$ ist eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit von $(z_1 z_2^{n-s})^{1/n}$ im Sinne von 3.1 (12).

(13) Die Flächen $\sigma_k, \sigma_{k+1} (0 < k \leq s)$ schneiden sich in genau einem Punkte, nämlich in dem Punkte $u_k = v_k = 0$, einfach (Schnittzahl 1). Die Flächen $\sigma_i, \sigma_k (i < k)$ schneiden sich nicht, wenn sie nicht aufeinander folgen, d. h. wenn $k - i \neq 1$.

(14) Die Fläche σ_k repräsentiert eine (ganzzahlige) Homologiekasse $\bar{\sigma}_k$ von $R(n, q)$.

Es ist $\bar{\sigma}_k \circ \bar{\sigma}_k = -\bar{b}_k$. (\circ bedeutet Schnittzahl.)

Beweis: Die analytische Fläche $u_0 = 0$ bezeichnen wir mit σ_0 und $v_s = 0$ mit σ_{s+1} . z_1 läßt sich als reguläre Funktion in $R(n, q)$ auffassen, die σ_k als λ_k -fache Nullstellenfläche hat und keine weiteren Nullstellen hat ($0 \leq k \leq s+1$).

Die Schnittzahl der Homologiekasse \bar{o}_k mit dem Nullstellengebilde

$$\lambda_0 \sigma_0 + \lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_s \sigma_s + \lambda_{s+1} \sigma_{s+1} \text{ von } z_1 \text{ ist } 0.^{12)}$$

Es folgt aus (13): $\lambda_{k-1} + \lambda_k (\bar{o}_k \circ \bar{o}_k) + \lambda_{k+1} = 0$.

Aus (3) folgt dann die Behauptung.

$A_{n,q}$ ist nicht uniformisierbar. Wäre $A_{n,q}$ nämlich uniformisierbar, dann müßte nach H. HOFF [vgl. 3.1. (13), Anmerkung] $\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$ ein Sphärenbaum sein, der einem mehrfachen σ -Prozeß entspricht. Das ist unmöglich, da alle Selbstschnittzahlen der $\sigma_i < -1$ sind¹³⁾.

(15) Aus dem Euklidischen Algorithmus folgt für n/q die Darstellung als Kettenbruch:

$$n/q = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{\ddots}}}$$

(Vgl. zu diesem Abschnitt [9], S. 303. Ich weiß nicht, ob der hier besprochene Euklidische Algorithmus in der algebraischen Geometrie bekannt ist.)

(16) *Voraussetzungen:* \tilde{R} ist eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit der Funktion $(z_1 z_2^n - q)^{1/n}$ (= kompakte Modifikation von $B(n, q)$ in $A_{n,q}$). Die Modifikations-Abbildung von \tilde{R} auf $B(n, q)$ wird mit \tilde{t} bezeichnet. \tilde{U}, U sind Umgebungen von $A_{n,q}$ in $B(n, q)$ und ψ ist ein analytischer Homöomorphismus von \tilde{U} auf U . ($\psi(A_{n,q}) = A_{n,q}$). γ bezeichnet wie in (10) die Modifikations-Abbildung von $R(n, q)$ auf $B(n, q)$.

Behauptung: Der analytische Homöomorphismus $\gamma^{-1} \psi \tilde{t}$ von

$$\tilde{t}^{-1} \tilde{U} - \tilde{t}^{-1}(A_{n,q}) \text{ auf } \gamma^{-1} U - \gamma^{-1}(A_{n,q})$$

läßt sich zu einer analytischen Abbildung $\tilde{\psi}$ von $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ auf $\gamma^{-1} U$ erweitern. $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ entsteht aus $\gamma^{-1} U$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen $\tilde{\psi}^{-1}(P_i)$ in (endlich vielen) Punkten P_i von $\gamma^{-1}(A_{n,q}) = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$. [Beachte 1.3. (13).] Es gilt also: Jede kompakte Modifikation von $B(n, q)$ in $A_{n,q}$ kann aus $R_{n,q}$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen erhalten werden.

Beweis: z_1, z_2, w sind reguläre Funktionen in $\gamma^{-1} U$. z_1, z_2, w lassen sich daher als reguläre Funktionen in $\tilde{t}^{-1} \tilde{U} - \tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ auffassen, die auf $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ noch stetig sind und dort den Wert 0 haben. $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ ist Vereinigungsmenge von analytischen Flächen.

Aus dem bekannten Satz über aufhebbare Singularitäten¹⁴⁾ folgt: z_1, z_2, w sind in $\tilde{t}^{-1} U$ regulär. — Die Koordinaten u_k, v_k von $R(n, q)$ [vgl. (8)] können als in ganz $R(n, q)$ definierte meromorphe Funktionen aufgefaßt werden¹⁴⁾; dort wo u_k, v_k Koordinaten sind, sind die Funktionen u_k, v_k regulär.

u_k, v_k ($0 \leq k \leq s$) können also auch als meromorphe Funktionen in $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ aufgefaßt werden. Die Funktionen u_k, v_k haben in $\tilde{t}^{-1} \tilde{U}$ endlich viele Unbestimmtheitsstellen, die alle auf $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ liegen. In die endlich vielen Unbc-

¹²⁾ Vgl. 1.4. (1).

¹³⁾ Jeder nicht triviale [1.3. (13)] Sphärenbaum enthält Sphären mit der Selbstschnittzahl -1 . Vgl. 1.4. (2).

¹⁴⁾ Das ergibt sich aus (10) wegen (6) $\mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} = 1$.

stimmtheitsstellen Q_i aller Funktionen u_k, v_k ($0 \leq k \leq s$) setzen wir Sphärenbäume $t_i^{-1}(Q_i)$ so ein, daß in der entstehenden Mannigfaltigkeit $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}U$ alle u_k, v_k keine Unbestimmtheitsstellen haben. Es ergibt sich dann leicht: Für jeden Punkt P von $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ sind für wenigstens ein k die Funktionen u_k, v_k regulär. Ordnet man P jetzt denjenigen Punkt von $\gamma^{-1}U$ zu, der im k -ten Koordinatensystem die Koordinaten $u_k(P), v_k(P)$ hat, dann erhält man eine analytische Abbildung ψ_1 von $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ auf $\gamma^{-1}U$, die $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}U - t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ einindeutig auf $\gamma^{-1}U - \gamma^{-1}(A_{n,q})$ abbildet und dort mit $\gamma_i^{-1}\psi t t_i$ übereinstimmt. Nach H. HOPF [vgl. 3.1. (13), Anmerkung] geht $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ aus $\gamma^{-1}U$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen $\psi_i^{-1}(A_i)$ in endlich vielen Punkten A_i von $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ aus $\gamma^{-1}U$ hervor. $\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ entsteht also aus $\gamma^{-1}U$, indem man in endlich vielen Punkten A_i von $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ Sphärenbäume $\psi_i^{-1}(A_i)$ einsetzt und indem man dann die Sphärenbäume $t_i^{-1}(Q_i)$ aus $\psi_i^{-1}\gamma^{-1}U$ herausnimmt:

$$t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U} = \psi_i^{-1}\gamma^{-1}U.$$

Die analytischen Flächen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ von $\gamma^{-1}U$ haben Selbstschnittzahlen < -1 . Faßt man $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ als Flächen in $\psi_i^{-1}\gamma^{-1}U$ auf, dann wird ihre Selbstschnittzahl noch kleiner¹⁵⁾. Die „zuletzt eingesetzten“ Sphären eines Sphärenbaumes (das sind solche, die durch einen inversen einfachen σ -Prozeß wieder herausgenommen werden können) lassen sich dadurch charakterisieren, daß ihre Selbstschnittzahl -1 ist. Eine „zuletzt eingesetzte“ Sphäre eines Baumes $t_i^{-1}(Q_i)$ ist daher stets eine „zuletzt eingesetzte“ Sphäre eines Baumes $\psi_i^{-1}(A_i)$, da sie mit keiner der Flächen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ zusammenfallen kann. Nimmt man nun die „zuletzt eingesetzten“ Sphären der Bäume $t_i^{-1}(Q_i)$ aus $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U} = \psi_i^{-1}\gamma^{-1}U$ heraus, dann erhält man eine Mannigfaltigkeit $t_i^{-1}\tilde{t}^{-1}\tilde{U} = \psi_i^{-1}\gamma^{-1}U$, die aus $\tilde{t}^{-1}\tilde{U}$ und aus $\gamma^{-1}U$ durch Einsetzen von Bäumen $t_i^{-1}(Q_i)$ bzw. $\psi_i^{-1}(A_i)$ in Punkten Q_i bzw. A_i von $\tilde{t}^{-1}(A_{n,q})$ bzw. $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ entsteht. Aus dieser Mannigfaltigkeit nimmt man die „zuletzt eingesetzten“ Sphären der Bäume $t_i^{-1}(Q_i)$ heraus und erhält durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schließlich

$$\tilde{\psi}\tilde{t}^{-1}U = \gamma^{-1}U.$$

(17) *Voraussetzungen:* U ist eine Umgebung von $A_{n,q}$ in $B(n, q)$ und U' eine Umgebung von $A_{n',q'}$ in $B(n', q')$. γ, γ' bezeichnen die Modifikations-Abbildungen von $R(n, q)$ auf $B(n, q)$ und von $R(n', q')$ auf $B(n', q')$ [vgl. (10)]. ψ ist ein analytischer Homöomorphismus von U auf U' ;

$$\psi(A_{n,q}) = A_{n',q'}.$$

Behauptung: 1) Der analytische Homöomorphismus $\gamma'^{-1}\psi\gamma$ von $\gamma^{-1}U - \gamma^{-1}(A_{n,q})$ auf $\gamma'^{-1}U' - \gamma'^{-1}(A_{n',q'})$ läßt sich zu einem analytischen Homöomorphismus $\tilde{\psi}$ von $\gamma^{-1}U$ auf $\gamma'^{-1}U'$ erweitern.

2) $n = n'$ und $(q = q' \text{ oder } qq' \equiv 1 \pmod{n})$.

¹⁵⁾ Vgl. 1.4.

Beweis: $\gamma^{-1}(A_{n,q})$ ist nach (8)–(14) Vereinigungsmenge von Sphären $\sigma_1, \dots, \sigma_s$.

$$\gamma^{-1}(A_{n,q}) = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s.$$

Entsprechend

$$\gamma'^{-1}(A_{n',q'}) = \sigma'_1 \cup \dots \cup \sigma'_s.$$

Die Sphären σ_i, σ'_i haben Selbstschnittzahlen b_i, b'_i , die alle < -1 sind. Daraus folgt mit Hilfe von (16) sofort der 1. Teil der Behauptung¹³⁾. — Der analytische Homöomorphismus $\tilde{\gamma}$ bildet $\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$ auf $\sigma'_1 \cup \dots \cup \sigma'_s$ ab. Es ist also $s = s'$. Aus (13) bis (15) folgt weiter:

$$b_1 = b'_1, \quad b_2 = b'_2, \quad \dots, \quad b_s = b'_s$$

oder

$$b_1 = b'_s, \quad b_2 = b'_{s-1}, \quad \dots, \quad b_s = b'_1.$$

Im ersten Falle ist wegen (15) $n = n'$ und $q = q'$.

Im zweiten Falle ist

$$n/q = b_1 - \frac{1}{b_2 - \dots - \frac{1}{b_s}} \quad \text{und} \quad n'/q' = b_s - \frac{1}{b_{s-1} - \dots - \frac{1}{b_1}}$$

Es folgt $n = n'$, aus (3) erhält man $q' = \mu_s$ und aus (4) für $k = s$: $qq' \equiv 1 \pmod{n}$.

(18) Es ist leicht zu sehen, daß $A_{n,q}$ und $A_{n',q'}$ analytisch äquivalent sind, wenn $qq' \equiv 1 \pmod{n}$. Aus (17) erhält man also:

$A_{n,q}$ und $A_{n',q'}$ sind in den folgenden Fällen und nur in diesen Fällen analytisch äquivalent:

- 1) $n = n'$ und $q = q'$ 2) $n = n'$ und $qq' \equiv 1 \pmod{n}$.

3.5. Wir kommen nun zur Konstruktion einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit [3.1. (12)] einer algebroiden Funktion f .

(1) f sei eine algebroid Funktion in der komplexen Mannigfaltigkeit M , die sich auf allen Wegen algebroid fortsetzen läßt. $B(f)$ sei der RIEMANNsche Bereich von f . In die nicht-gewöhnlichen Punkte P_i der Verzweigungsfläche W von f in M werden Sphärenbäume $t^{-1}(P_i)$ so eingesetzt, daß in $t^{-1}M$ die Fläche t^*W nur noch gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat. (Anwendung von 2.9. auf die reguläre Cousinverteilung W .) $t^{-1}M$ werde „minimal“ gewählt, das soll heißen: Jede Mannigfaltigkeit $t'^{-1}M$ (Einsetzen von Sphärenbäumen $t'^{-1}(P_i)$), in der t'^*W nur gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte hat, geht aus $t^{-1}M$ durch Einsetzen von Sphärenbäumen hervor. Man erhält die minimale Mannigfaltigkeit $t^{-1}M$, wenn man „unnötiges“ Einsetzen von Sphären vermeidet und also so vorgeht:

Man setzt in die nicht-gewöhnlichen Punkte von W , die keine Doppelpunkte sind, die Sphäre ein (einfacher σ -Prozeß) und erhält eine Mannigfaltigkeit $t_1^{-1}M$. In die nicht-gewöhnlichen Punkte von t_1^*W , die keine Doppelpunkte sind, setzt man die Sphäre ein und erhält eine Mannigfaltigkeit $t_2^{-1}t_1^{-1}M$ usw. Nach endlich vielen (k) Schritten hat $t_k^* \dots t_1^*W$ in $t_k^{-1} \dots t_1^{-1}M$ nur noch gewöhnliche Punkte und Doppelpunkte.

$t^{-1}M = t_k^{-1} \dots t_1^{-1}M$ ist die minimale Mannigfaltigkeit.

(2) f läßt sich als algebroid Funktion t^*f in $t^{-1}M$ auffassen (vgl. 3.2.). Der RIEMANNsche Bereich von t^*f ist $t^{-1}M$ überlagert und werde mit $t^*B(f)$

bezeichnet. Jeder nicht-uniformisierbare Punkt A_i von $t^*B(f)$ ist vom Typus 3.3. (1) und einem algebroiden Funktionselement A_{n_i, q_i} analytisch äquivalent¹⁸⁾. In jeden solchen nicht-uniformisierbaren Punkt $A_i \in t^*B(f)$ wird nach 3.4. (11), (12) eine Vereinigungsmenge $\sigma_i^1 \cup \dots \cup \sigma_i^k$ von Sphären eingesetzt.

Das Einsetzen von $\sigma_i^1 \cup \dots \cup \sigma_i^k$ ist so zu beschreiben: Es gibt eine Umgebung V_i von A_i in $t^*B(f)$, eine Umgebung U_i von A_{n_i, q_i} in $B(n_i, q_i)$ und einen analytischen Homöomorphismus κ_i von V_i auf U_i mit $\kappa_i(A_i) = A_{n_i, q_i}$. Die Umgebungen V_i der Punkte A_i können so gewählt werden, daß sie paarweise punktfremd sind. γ_i bezeichne die Modifikations-Abbildung von $R(n_i, q_i)$ auf $B(n_i, q_i)$ [vgl. 3.3 (10)].

$\gamma_i^{-1} \kappa_i$ ist ein analytischer Homöomorphismus von $V_i - A_i$ auf $\gamma_i^{-1} U - (\sigma_i^1 \cup \dots \cup \sigma_i^k)$.

Wir betrachten nun die komplexe Mannigfaltigkeit $t^*B(f) - \{A_i\}$ und die Mannigfaltigkeiten $\gamma_i^{-1} U_i$ (für alle i ; diese Mannigfaltigkeiten sind als punktfremd anzusehen!) und identifizieren durch $\gamma_i^{-1} \kappa_i$ aufeinander abgebildete Punkte von $t^*B(f) - \{A_i\}$ und $\gamma_i^{-1} U_i$. Man erhält eine komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$, deren komplexe Struktur durch $t^*B(f)$ und damit auch durch die algebroiden Funktion f eindeutig bestimmt ist (und nicht von der Wahl der U_i , V_i und der analytischen Homöomorphismen κ_i abhängt). Beweis mit Hilfe von 3.4. (17).

(3) f läßt sich als meromorphe Funktion \hat{f} in $\hat{M}(f)$ auffassen. In die Unbestimmtheitsstellen von \hat{f} werden nach 2.8 Sphärenbäume eingesetzt. Man erhält eine komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$, in der f sich als meromorphe und bestimmte Funktion \tilde{f} auffassen läßt. Die Konstruktion von $\tilde{M}(f)$ ist wieder eindeutig festgelegt, wenn man genau nach 2.8. vorgeht und keine „un nötigen Sphären“ einsetzt.

(4) Durch genaue Verfolgung der angegebenen Konstruktion erkennt man:

1. Die komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{M}(f)$ ist eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit von f [vgl. 3.1. (12)]. $\tilde{M}(f)$ entsteht also aus dem RIEMANNschen Bereich $B(f)$, indem man in jeden Ausnahmepunkt Q eine Vereinigungsmenge S_Q von endlich vielen kompakten irreduziblen analytischen Flächen einsetzt.

2. Jede (irreduzible) analytische Fläche von S_Q liegt singularitätenfrei (d. h. hat nur gewöhnliche Punkte) in $\tilde{M}(f)$. Zwei analytische Flächen von S_Q schneiden sich nicht oder haben genau einen Punkt gemeinsam, in dem sie sich einfach schneiden. Ein Punkt von S_Q liegt höchstens auf zwei analytischen Flächen von S_Q . Man kann S_Q einen Streckenkomplex zuordnen: Jeder Fläche von S_Q entspricht ein Eckpunkt. Zwei Eckpunkte begrenzen eine Kante des Streckenkomplexes genau dann, wenn die zugeordneten Flächen sich schneiden. Dieser S_Q zugeordnete Streckenkomplex ist zusammenhängend und zyklisfrei, also ein Baum.

Wir sagen daher: $\tilde{M}(f)$ entsteht aus $B(f)$ durch Einsetzen von Bäumen analytischer Flächen in die Ausnahmepunkte Q .

¹⁸⁾ Vgl. 3.3. (4).

3.6. Wir haben in 3.1. (13) bereits darauf hingewiesen, daß ein RIEMANNscher Bereich einer algebraiden Funktion ein RIEMANNsches Gebiet im Sinne von BEHNKE u. STEIN [1] ist. Wir wollen hier unter einem abstrakten RIEMANNschen Bereich (von zwei komplexen Dimensionen) ein RIEMANNsches Gebiet verstehen, das folgende zusätzliche Eigenschaft hat: Jeder Punkt des RIEMANNschen Gebietes besitzt eine Umgebung, die analytisch homöomorph ist einer solchen verzweigten Überlagerung einer „Hyperkugel“ $|z_1|^2 + |z_2|^2 < \varepsilon$, die durch ein algebraides Funktionselement im Nullpunkt erzeugt wird.

Es ist mir nicht bekannt, ob jede „analytische Überlagerung“, [1] S. 6, der Hyperkugel durch ein algebraides Funktionselement erzeugt werden kann. Ich weiß daher auch nicht, ob die beiden Begriffe „abstrakter RIEMANNscher Bereich“ und „RIEMANNsches Gebiet“ zusammenfallen oder nicht.

Das Einsetzen von Bäumen analytischer Flächen in die nicht-uniformisierbaren Punkte eines RIEMANNschen Bereiches ist ein lokaler Prozeß, den wir auf jeden nicht-uniformisierbaren Punkt eines abstrakten RIEMANNschen Bereiches anwenden können. (Der Konstruktionsschritt (3) von 3.5. fällt fort.)

Wir erhalten dadurch den

Satz: Zu jedem abstrakten RIEMANNschen Bereich B gibt es eine komplexe Mannigfaltigkeit, die aus B durch kompakte Modifikation in den nicht-uniformisierbaren Punkten von B hervorgeht.

Die Frage, ob der letzte Satz auch für beliebige RIEMANNsche Gebiete gilt, habe ich nicht untersucht.

Literatur.

- [1] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). — [2] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. **3**, H. 3 (1935) (Springer-Verlag). — [3] BOCHNER, S., and W. T. MARTIN: Several complex variables. Princeton University Press 1948. — [4] BRAUNER, K.: Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6**, 1—55 (1928). — [5] HIRZEBRUCH, F.: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **124**, 77—86 (1951). — [6] HIRZEBRUCH, F.: Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. Erscheint demnächst in J. reine angew. Math. — [7] HOFF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant, p. 167—185. New York 1948. — [8] HOFF, H.: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. e Appl. Serie V, **10**, 169—182 (1951). — [9] JUNG, H. W. E.: Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a, y = b$. J. reine angew. Math. **133**, 289—314 (1908). — [10] KÄHLER, E.: Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle. Math. Z. **30**, 188—204 (1929). — [11] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II/1, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1929. — [12] STEIN, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727—757 (1941). — [13] ZARISKI, O.: Algebraic Surfaces. Erg. Math. **3**, H. 5 (1935) (Springer-Verlag).

(Eingegangen am 14. Juli 1952.)

Zur Theorie der Operative und Assoziative.

Von

FRITZ KLEIN-BARMEN in Wuppertal.

Einleitung.

Das *Operativ* ist der primitivste verknüpfungstheoretische Operationsbereich der abstrakten Algebra, aus dem dadurch, daß geeignete Axiome hinzugenommen werden, alle übrigen Operationsbereiche hervorgehen. Das *Assoziativ*¹⁾, durch ein einziges Zusatzaxiom erzeugt, ist als Ausgangspunkt einer Entwicklung, die einerseits zur Gruppe und zum Körper, andererseits zum Halbverband, Verband und Pseudoverband²⁾ führt, zu einer wichtigen Begriffsbildung der Mathesis universalis geworden.

In § 1 der vorliegenden Arbeit wird das bisher sehr vernachlässigte Operativ in dem für das folgende erforderlichen Umfang behandelt. In § 2 und § 3 baue ich das Teilstück der Assoziativtheorie aus, dessen Zentrum der Begriff der potenzgebundenen Elemente ist. In § 4 wird das Problem der Konstruktion von eng gebundenen Assoziativen in Angriff genommen und eine Teillösung angegeben.

§ 1. Das Operativ.

1. Grundgegebenheit sei eine Menge M , die endlich oder unendlich sein kann. Kleine lateinische Buchstaben — außer k , m und n — sollen Elemente von M , kleine griechische Buchstaben stets natürliche Zahlen bedeuten. Die Elemente von M seien wohl unterscheidbar in dem Sinn, daß für alle x , y entweder $x = y$ oder $x \neq y$ stattfindet.

M heißt ein *Operativ*³⁾ in bezug auf eine durch \circ symbolisierte binäre und einwertige Verknüpfung, wenn das folgende Axiom in Kraft ist:

I. Zu jedem geordneten Paar (x, y) gibt es ein z derart, daß $x \circ y = z$ ist.

Daß I erfüllt ist, wird auch durch die Wendung wiedergegeben: Die Elemente von M sind der Verknüpfung \circ fähig. Statt $x \circ y$ wird, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, einfach xy geschrieben. Für je drei Elemente eines Operativs gilt entweder $xy = z$ oder $xy \neq z$.

Hinsichtlich der Mächtigkeit unterscheidet man *endliche* und *unendliche* Operative. Unter der *Ordnung* eines endlichen Operativs versteht man die Anzahl der Elemente, aus denen das Operativ besteht.

¹⁾ Die synonym mit Assoziativ gebrauchten, aus einer einseitigen Betrachtungsweise herrührenden Bezeichnungen Halbgruppe, semigroup und demi-groupe sollte man vermeiden.

²⁾ ELLIS [2] und KLEIN [N. 1].

³⁾ Operativ ist dasselbe wie groupoid. Aus dem in Fußnote ¹⁾ dargelegten Grund ziehe ich die erste Bezeichnung vor. Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß man in Deutschland unter einem *Grupoid* auch einen Operationsbereich versteht, für den das Axiom I nur für gewisse, im allgemeinen nicht für alle Paare (x, y) in Geltung ist; vgl. MAGNUS, S. 5.

2. Es sei M ein Operativ in bezug auf \circ . Jede Teilmenge von M , die ebenfalls ein Operativ in bezug auf \circ ist, heißt ein *Teiloperativ* von M . Zu den Teiloperativen von M rechnet auch M . Der mengentheoretische Durchschnitt zweier Teiloperative von M ist entweder leer oder ebenfalls ein Teiloperativ von M . Sind M' , M'' , ... endlich oder unendlich viele Teilmengen von M , so ist der Durchschnitt der Teiloperative von M , die M' , M'' , ... zugleich umfassen, nicht leer. Es gibt also ein engstes, die genannten Mengen umfassendes Teiloperativ von M . Dasselbe werde mit $E(M', M'', \dots)$ bezeichnet. Gilt insbesondere

$$Z = E(a_1, \dots, a_n),$$

so sagt man: Z ist das von den Elementen a_1, \dots, a_n erzeugte Teiloperativ von M . Gilt

$$Z = E(M', a_1, \dots, a_n),$$

wobei M' ein Teiloperativ von M ist, so sagt man: Z entsteht dadurch, daß dem Operativ M' die Elemente a_1, \dots, a_n adjungiert werden. Für das Endergebnis ist es gleichgültig, ob die Elemente zugleich oder nacheinander adjungiert werden.

Satz 1. Ist M eine endliche oder unendliche Menge von Operativen in bezug auf \circ derart, daß je zwei Operative aus M Teiloperative eines ebenfalls zu M gehörenden Operativs sind, so ist auch die Vereinigungsmenge aller Operative aus M ein Operativ in bezug auf \circ .

Auf diesem Satz beruht in letzter Instanz ein Satz von STEINITZ aus der Körpertheorie. Da der STEINITZsche Beweis sich leicht so abändern läßt, daß er für unseren Satz paßt, genügt es, darauf zu verweisen⁴⁾.

3. Ein Element e aus M heißt ein *linkes* bzw. *rechtes Hauptelement erster Art* (\S_i - bzw. \S'_i -Element), wenn für jedes x

$$ex = x \text{ bzw. } xe = x$$

ist; e heißt ein *linkes* bzw. *rechtes Hauptelement zweiter Art* (\S''_i - bzw. \S'''_i -Element), wenn für jedes x

$$ex = e \text{ bzw. } xe = e$$

ist.

Man beweist sofort:

Satz 2. Wenn M mindestens ein \S_i -Element und mindestens ein \S'_i -Element hat, so hat M genau ein \S_i -Element und genau ein \S'_i -Element und diese beiden Elemente sind identisch. Entsprechendes gilt für \S''_i - und \S'''_i -Elemente⁵⁾.

Ein Element, das sowohl \S_i - als auch \S'_i -Element ist, wird als \S -Element bezeichnet; entsprechend wird das \S'' -Element definiert⁶⁾. Wegen Satz 2 hat M höchstens ein \S - und höchstens ein \S'' -Element.

Ein Element x heißt *idempotent*, wenn $xx = x$ ist. Zwei Elemente x, y heißen *vertauschbar*, wenn $xy = yx$ ist. Drei nicht notwendigerweise ver-

⁴⁾ STEINITZ, S. 12.

⁵⁾ Vgl. [H. 4], S. 479.

⁶⁾ Statt \S - bzw. \S'' -Element werden auch die Bezeichnungen Einheits- bzw. Null-element verwendet.

schiedene Elemente x, y, z heißen *assoziativ verknüpfbar* — in dieser Reihenfolge — wenn $(xy)z = x(yz)$ ist. M heißt ein *kommutatives* Operativ, wenn je zwei Elemente vertauschbar sind. M heißt ein *assoziatives* Operativ, wenn je drei Elemente in beliebiger Reihenfolge assoziativ verknüpfbar sind. Ein assoziatives Operativ wird *Assoziativ* genannt. Ein kommutatives Assoziativ, dessen Elemente sämtlich idempotent sind, heißt *Halbverband*⁷⁾. Die Menge der Teiloperative eines Operativs M ist ein Halbverband mit M als ξ'' -Element in bezug auf die durch $X \square Y = E(X, Y)$ definierte Verknüpfung \square .

§ 2. Potenzgebundene Elemente.

Es sei M ein Assoziativ in bezug auf \circ . Setzt man

$$x^1 = x, \quad x^{\alpha+1} = x \circ x^\alpha,$$

so gilt für die so definierten Potenzen

$$x^\alpha x^\beta = x^\beta x^\alpha = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta}.$$

Ist x mit y vertauschbar, so auch jede Potenz von x mit jeder Potenz von y ; dabei ist

$$x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha = (xy)^\alpha.$$

Für jedes x bilden die Potenzen von x ein kommutatives Teilassoziativ von M . Ist a mit x und mit y vertauschbar, so auch mit xy . Für jedes a bilden die mit a vertauschbaren Elemente von M ein Teilassoziativ von M .

Erklärung. Ein Element x heißt *potenzgebunden*, wenn es zwei Zahlen α, β gibt derart, daß

$$(1) \quad x^\alpha = x^\beta \quad (\alpha \neq \beta)$$

stattfindet.

Ist $\alpha < \beta$ und $\delta = \beta - \alpha$, so läßt sich (1) ersetzen durch

$$(2) \quad x^\alpha = x^{\alpha+\delta}.$$

Wegen (1) gilt für jedes μ

$$(3) \quad x^\alpha + \mu = x^{\beta+\mu}$$

und wegen (2) für jedes ν die von D. REES angegebene Relation⁸⁾

$$(4) \quad x^\alpha = x^{\alpha+\delta\nu}.$$

Ist x gemäß (2) potenzgebunden, so läßt sich δ bei festem α so wählen, daß $\alpha + \delta$ die kleinste auf α folgende ganze Zahl ist derart, daß (2) stattfindet. Wir wollen (α, δ) in diesem Fall ein *ausgezeichnetes Exponentenpaar* für x nennen.

Satz 3. Ist (α, δ) ein ausgezeichnetes Exponentenpaar für x , so ist

$$(5) \quad x^{\nu'} \neq x^{\nu''}$$

für alle der Ungleichung $\alpha < \nu' < \nu'' \leq \alpha + \delta$ genügenden Zahlen ν' und ν'' .

Beweis. Wäre (5) falsch, so würde nach (3)

$$x^{\alpha+\delta-\nu'+\nu'} = x^{\alpha+\delta}$$

⁷⁾ Näheres über Halbverbände in [H. 1].

⁸⁾ Nach einer Bemerkung bei DUBREIL-JACOTIN, S. 1174.

folgen, was wegen

$$\alpha < \alpha + \delta - v'' + v' < \alpha + \delta$$

nicht sein kann.

Satz 4. Mit (α, δ) ist auch $(\alpha + 1, \delta)$ ein ausgezeichnetes Exponentenpaar für x .

Beweis. Nach Satz 3 ist $\alpha + 1 + \delta$ die kleinste auf $\alpha + 1$ folgende Zahl derart, daß

$$x^{\alpha+1} = x^{\alpha+1+\delta}$$

ist.

Erklärung. Potenzcharakteristik $\mathfrak{P}(x)$ eines potenzgebundenen Elements x heißt das ausgezeichnete Exponentenpaar (α, δ) für x , bei dem α den kleinsten Wert hat.

Satz 5. Ist $\mathfrak{P}(x) = (\alpha, \delta)$, so sind die Potenzen $x, \dots, x^{\alpha+\delta-1}$ alle verschieden.

Beweis. Es sei $\alpha + \delta > 2$. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es zwei Zahlen v' und v'' mit

$$1 \leq v' < v'' \leq \alpha + \delta - 1$$

derart, daß $x^{v'} = x^{v''}$ ist. Das kann aber nicht sein, denn die letzte Gleichung kollidiert für $v' < \alpha$ mit der Minimaleigenschaft von α und für $v' \geq \alpha$ mit der Minimaleigenschaft von δ .

Ohne Schwierigkeit vervollständigt man Satz 5 zu dem folgenden Kriterium: x ist dann und nur dann potenzgebunden mit $\mathfrak{P}(x) = (\alpha, \delta)$, wenn die Potenzen $x, \dots, x^{\alpha+\delta-1}$ alle verschieden sind und $x^\alpha = x^{\alpha+\delta}$ ist.

Satz 6. Sind x und y potenzgebunden und vertauschbar, so ist auch xy potenzgebunden. Ist dabei

$$\mathfrak{P}(x) = (\alpha, \delta), \mathfrak{P}(y) = (\alpha', \delta'), \mathfrak{P}(xy) = (\alpha_0, \delta_0),$$

so ist

$$(6) \quad \alpha_0 \leq \max(\alpha, \alpha'), \delta_0/k,$$

unter $k = k(\delta, \delta')$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von δ und δ' verstanden.

Beweis. Es sei $\alpha \leq \alpha'$. Alsdann ist

$$(xy)^{\alpha'} = x^{\alpha'+\delta v} y^{\alpha'+\delta'v'} \quad (v, v' = 1, 2, \dots)$$

Für

$$v = \frac{k}{\delta}, \quad v' = \frac{k}{\delta'}$$

geht daraus

$$(xy)^{\alpha'} = (xy)^{\alpha'+k}$$

hervor, womit (6) bewiesen ist.

Unmittelbar folgt:

Satz 7. Ist x potenzgebunden, so auch jede Potenz von x . Ist dabei

$$\mathfrak{P}(x) = (\alpha, \delta), \mathfrak{P}(x^\lambda) = (\alpha_0, \delta_0),$$

so ist $\alpha_0 \leq \alpha$ und δ_0/δ .

Das aus den Potenzen eines Elements x bestehende Teilassoziativ von M ist endlich oder unendlich, je nachdem x potenzgebunden ist oder nicht. Ist im Fall der Potenzgebundenheit $\mathfrak{P}(x) = (\alpha, \delta)$, so ist das Teilassoziativ von

der Ordnung $\alpha + \delta - 1$. Die zugehörige Kompositionstafel läßt sich sofort herstellen. Beispiel: Diagr. 1 für $\mathfrak{P}(x) = (3, 2)$.

	x	x^2	x^3	x^4
x	x^2	x^3	x^4	x^3
x^2	x^3	x^4	x^3	x^4
x^3	x^4	x^3	x^4	x^3
x^4	x^3	x^4	x^3	x^4

Diagr. 1.

Ein Assoziativ heißt *potenzgebunden*, wenn alle Elemente potenzgebunden sind.

§ 3. Tief gebundene und eng gebundene Elemente.

1. Unter den potenzgebundenen Elementen eines Assoziativs sind diejenigen besonders wichtig, für die $\alpha = 1$ oder $\delta = 1$ ist.

Erklärung. Ein Element x heißt *tief gebunden* mit der Periode $\omega(x) = \delta$, wenn $\mathfrak{P}(x) = (1, \delta)$ ist, d. h. wenn δ die kleinste positive ganze Zahl ist derart, daß $x = x^{1+\delta}$ ist.

Das Kriterium in § 2 liefert hierfür: x ist dann und nur dann tief gebunden mit $\omega(x) = \delta$, wenn die Potenzen x, \dots, x^δ alle verschieden sind und $x = x^{1+\delta}$ ist.

Satz 8. Sind x und y tief gebunden und vertauschbar, so ist auch xy tief gebunden.

Beweis: Satz 6.

Satz 9. Ist x tief gebunden, so auch jede Potenz von x .

Beweis: Satz 7.

Ein Assoziativ heißt *tief gebunden*, wenn alle Elemente tief gebunden sind.

Satz 10. Ist M ein tief gebundenes Assoziativ in bezug auf \circ und gilt

$$(7) \quad x^{\omega(x)} = y^{\omega(y)}$$

für alle x und y , so ist M eine Gruppe in bezug auf \circ .

Beweis. Das durch $e = x^{\omega(x)}$ definierte Element ist wegen

$$ex = xe = x^{1+\omega(x)} = x$$

das \S -Element von M . Zu jedem x gibt es ein x' derart, daß

$$xx' = x'x = e$$

ist; denn für $x = e$ ist $x' = e$, und für $x \neq e$, also $\omega(x) > 1$, ist

$$x' = x^{\omega(x)-1}.$$

Der letzte Satz läßt sich in gewisser Weise umkehren:

Satz 11. Ist M eine potenzgebundene Gruppe in bezug auf \circ , so ist M sogar tief gebunden und es gilt (7) für alle x und y .

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}(x) = (\alpha, \delta)$. Aus $x^2 = x^{2+\delta}$ folgt, unter e die Gruppeneinheit verstanden, der Reihe nach

$$x^\delta = e, \quad x = x^{1+\delta}, \quad \delta = \omega(x)$$

und damit (7) für alle x und y .

2. Ähnlich wird der Fall $\delta = 1$ behandelt:

Erklärung. Ein Element x heißt *eng gebunden* mit der Potenzhöhe $\chi(x) = \alpha$, wenn $\mathfrak{P}(x) = (\alpha, 1)$ ist, d. h. wenn α die kleinste positive ganze Zahl ist derart, daß $x^\alpha = x^{\alpha+1}$ ist.

Das in § 2 angegebene Kriterium besagt in diesem Fall: x ist dann und nur dann eng gebunden mit $\chi(x) = \alpha$, wenn die Potenzen x, \dots, x^α alle verschieden sind und $x^\alpha = x^{\alpha+1}$ ist⁹⁾.

Satz 12. Für $\alpha \geq 2$ ist dann und nur dann $\chi(x) = \alpha$, wenn

$$x^{\alpha-1} \neq x^\alpha, x^\alpha = x^{\alpha+1}$$

ist.

Beweis: Klar.

Satz 13. Sind x und y eng gebunden und vertauschbar, so ist auch xy eng gebunden. Dabei ist

$$\chi(xy) \leq \max(\chi(x), \chi(y)).$$

Beweis: Satz 6.

Satz 14. Ist x eng gebunden, so auch jede Potenz von x . Ist dabei

$$\chi(x) = \alpha, \chi(x^1) = \alpha_0,$$

so ist α_0 die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als $\frac{\alpha}{\lambda}$ ist.

Beweis. Daß x^1 eng gebunden ist, folgt aus Satz 7. Was den zweiten Teil der Behauptung anbetrifft, so unterscheiden wir zwischen $\lambda \geq \alpha$ und $\lambda < \alpha$. Im ersten Fall ist $x^\lambda = x^{2\lambda}$, also, wenn $y = x^1$ gesetzt wird, $y = y^2$ und $\alpha_0 = 1$. Im zweiten Fall ist $\alpha \geq 2$. Nach dem obigen Kriterium sind die Potenzen

$$(8) \quad x, x^2, \dots, x^{\alpha-1}$$

voneinander und von x^α verschieden, während die Potenzen

$$(9) \quad x^\alpha, x^{\alpha+1}, \dots$$

alle gleich sind. Infolgedessen kommt y^{α_0} , d. h. $x^{\alpha_0 \lambda}$ in (9), dagegen y^{α_0-1} , d. h. $x^{(\alpha_0-1)\lambda}$ in (8) vor, was besagt, daß

$$\alpha_0 \lambda \geq \alpha, (\alpha_0 - 1) \lambda < \alpha,$$

also

$$(10) \quad \frac{\alpha}{\lambda} \leq \alpha_0 < \frac{\alpha}{\lambda} + 1$$

ist, womit alles bewiesen ist.

Da mit (10) auch

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} \leq \lambda < \frac{\alpha}{\alpha_0 - 1}$$

gilt und umgekehrt, gibt es mindestens ein λ , wenn α_0 ein Teiler von α ist. Insbesondere gibt es mindestens ein λ für $\alpha_0 = 1$.

Ein Assoziativ heißt *eng gebunden*, wenn alle Elemente eng gebunden sind.

3. Ist M ein eng gebundenes Assoziativ, so existiert eine endliche oder unendliche Menge von natürlichen Zahlen n_1, n_2, \dots von der folgenden Beschaffen-

⁹⁾ Das spezielle Kriterium ist bekannt; vgl. DUBREIL-JACOTIN, S. 1174. Übrigens macht dasselbe den in [N. 1] mitgeteilten Satz 4 überflüssig.

heit: Zu jedem x gibt es genau ein n_x , umgekehrt zu jedem n_x mindestens ein x , beidemale derart, daß $\chi(x) = n_x$ ist. Die nach wachsenden Gliedern geordnete Folge (n_1, n_2, \dots) möge die *Höhenzahlenfolge* von M genannt werden. Stets ist $n_1 = 1$.

Die Menge der x , für die $\chi(x) \leq n$ ist, werde mit $T(n)$ bezeichnet. $T(n)$ ist, wie auch n gewählt wird, nicht leer. Mit $T(n') \subset T(n'')$ ist $n' < n''$; umgekehrt kann man aus der letzten Relation nur auf $T(n') \subseteq T(n'')$ schließen¹⁰⁾.

Ist M überdies kommutativ, so ist jedes $T(n)$ nach Satz 13 ein Teilassoziativ von M , wobei insbesondere $T(1)$ ein Halbverband in bezug auf \circ ist. Infolgedessen ist die durch die Höhenzahlenfolge mitbestimmte Folge $T(n_1), T(n_2), \dots$ ein Assoziativturm.

Ein endliches, kommutatives und eng gebundenes Assoziativ besitzt ein \S'' -Element. Dasselbe kann, wenn x_1, \dots, x_m die Elemente des Assoziativs sind und $\chi(x_\mu) = \alpha_\mu$ ist, auf die Form $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ gebracht werden¹¹⁾.

§ 4. Konstruktion eines speziellen eng gebundenen Assoziativs.

1. Zunächst ein Hilfssatz. Es sei M ein kommutatives Operativ in bezug auf \circ . Es sei, unter a ein festes Element aus M verstanden, M' eine a enthaltende Teilmenge von M . Die beiden folgenden Zusatzaxiome seien in Kraft:

(α) Für alle x, y gehört xy zu M' .

(β) Gehört x zu M' und ist y beliebig, so ist $xy = a$.

Satz 15. Das Operativ M ist ein Assoziativ in bezug auf \circ . Dasselbe ist eng gebunden mit $\chi(x) \leq 3$ für alle x . Es ist $T(1) = \{a\}$; a ist das \S'' -Element von M .

Beweis. Für alle x, y, z ist

$$(xy)z = a, x(yz) = a.$$

Für jedes x ist

$$x^3 = a, x^4 = a.$$

Für jedes von a verschiedene x ist $\chi(x) \geq 2$; wegen (β) ist $ax = a$ für alle x .

M hat im allgemeinen, d. h. wenn mindestens zwei Elemente vorhanden sind, kein \S' -Element. Sowohl für $M' = \{a\}$ als auch für $M' = M$ reduziert sich das obige Axiomensystem auf ein einziges Axiom:

(γ) Für alle x, y ist $xy = a$.

2. Es werde nun dargelegt, wie eine beliebig vorgegebene Menge M zu einem dem Satz 15 genügenden Assoziativ hergerichtet werden kann. Wir lösen die Aufgabe dadurch, daß wir eine Kompositionstafel herstellen, wobei wir uns auf den Fall beschränken, daß M endlich ist. Das Verfahren werde an einem Beispiel durchgeführt, das so gewählt ist, daß alles Wesentliche daraus zu ersehen ist.

Es sei

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$$

¹⁰⁾ Durch $A \subset B$ bzw. $A \subseteq B$ werde ausgedrückt, daß A eine echte bzw. echte oder unechte Teilmenge von B ist.

¹¹⁾ Vgl. [N. 1], S. 311.

M' sei von $\{a\}$ und von M verschieden; es sei etwa $M' = \{a, b, c\}$. Wir besetzen die Ränder eines CAYLEYSchen Quadrats von m^2 , hier von 49 Feldern in der

		M'						
		a	b	c	d	e	f	g
M'	a							
	b							
	c							
	d							
	e							
	f							
	g							

Diagr. 2.

üblichen Weise. Durch die schwächer ausgezogenen Linien wird die Leerform in vier Teile zerlegt (vgl. Diagr. 2). Die Felder des linken oberen Quadrats sowie die Felder der beiden Rechtecke werden mit dem Buchstaben a ausgefüllt, während die Felder des rechten unteren Quadrats — symmetrisch zur Hauptdiagonalen, sonst aber ganz beliebig — mit Buchstaben aus M' belegt werden. Dabei wird nicht verlangt, daß alle Buchstaben von M' verwendet werden; auch können mehrere Felder mit demselben Buchstaben besetzt werden. Zwei passende Ausfüllungen bringen die Diagr. 3 und 4.

Man erkennt ohne weiteres, daß die so präparierte Menge M ein Assoziativ im Sinne von Satz 15 ist.

	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	a	a	a
d	a	a	a	b	b	b	b
e	a	a	a	b	b	b	b
f	a	a	a	b	b	b	b
g	a	a	a	b	b	b	b

Diagr. 3.

	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	a	a	a
d	a	a	a	a	b	b	c
e	a	a	a	b	c	c	c
f	a	a	a	b	c	b	a
g	a	a	a	c	c	a	c

Diagr. 4.

Literaturverzeichnis.

- DUBREIL-JACOTIN, M.-L.: Quelques propriétés arithmétiques dans un demi-groupe demi-réculé entier T. Comptes rendus **232**, 1174—1176 (1951). — ELLIS, D.: [2] Notes on the foundations of lattice theory. Publ. math. (Ungarn) **1**, 205—208 (1950). — [3] Geometry in abstract distance spaces. Debrecen (Ungarn) 1951. — KLEIN-BARMEN, F.: [H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände. Deutsche Math. **4**, 32—43 (1939). — [H. 4] Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes. Math. Z. **46**, 472—480 (1940). — [N. 1] Schwach distributive Pseudoverbände. Math. Ann. **124**, 309—315 (1952). — MAGNUS, W.: Allgemeine Gruppentheorie. Enzykl. d. Math. Wissensch. I **1**, 9; 2. Aufl. 1939. — STEINITZ, E.: Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben von R. BAER und H. HASSE. Berlin und Leipzig 1930.

(Eingegangen am 24. Juni 1952.)

Konstruktion Jacobischer und mehrfachperiodischer Funktionen zu gegebenen Nullstellenflächen.

Von

W. STOLL in Tübingen.

Im Raum \mathbb{R}^{2p} der komplexen Vektoren $u = (u_1, \dots, u_p)$ sei eine abgeschlossene Nullstellenfläche der Vielfachheit $\nu(u)$ gegeben¹⁾. Wenn der Vektor $a = (a_1, \dots, a_p)$ von Null verschieden ist und wenn die Nullstellenfläche \mathfrak{N} keine nichtleere Nullstellenfläche \mathfrak{N}_1 enthält, der mit jedem Punkt $u_0 \in \mathfrak{N}_1$ auch ein Kreis $\{u = u_0 + \alpha a \text{ mit } |\alpha| < r_0\}$ angehört, so heiße die Nullstellenfläche \mathfrak{N} bezüglich des Vektors a nichtzylindrisch. Ist die Nullstellenfläche \mathfrak{N} bezüglich jedes Vektors nichtzylindrisch, so heiße sie kurz nichtzylindrisch. Die Nullstellenfläche \mathfrak{N} mit der Vielfachheit $\nu(u)$ habe die Periode $p = (\omega_1, \dots, \omega_p)$, wenn \mathfrak{N} bei der Parallelverschiebung $u' = u + p$ in sich übergeht und $\nu(u + p) = \nu(u)$ ist. Eine im Raum \mathbb{R}^{2p} meromorphe Funktion $f(u)$ hat die Periode p , wenn für alle Vektoren $u \in \mathbb{R}^{2p}$ die Beziehung $f(u + p) = f(u)$ besteht. Sind die $2p$ Perioden $p_\nu = (\omega_{1\nu}, \dots, \omega_{p\nu})$ der in \mathbb{R}^{2p} meromorphen Funktion $f(u)$ (bzw. der Nullstellenfläche \mathfrak{N}) ber dem Körper der reellen Zahlen linear unabhängig, so heißt f (bzw. \mathfrak{N}) $2p$ -fach periodisch, und zwar echt $2p$ -fach periodisch, wenn f bei beliebiger Wahl des Koordinatensystems von keiner Veränderlichen u_μ unabhängig ist. Unter einer Jacobischen Funktion zu den Perioden p_1, \dots, p_{2p} versteht man eine ganze Funktion h , die den Funktionalgleichungen

$$(1) \quad h(u + p_\nu) = h(u) e^{2\pi i \left\{ c_\nu + \sum_{\mu=1}^p b_{\mu\nu} \left(u_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \right) \right\}}$$

für $\nu = 1, \dots, 2p$ und alle u gengt²⁾. Sie heiße eine echte Jacobische Funktion, wenn $h(u)$ nicht identisch verschwindet, aber doch eine Nullstelle besitzt. Nach S. LEFSCHETZ [6] Kap. VI gilt dann der Satz:

Hat die nichtzylindrische Nullstellenfläche \mathfrak{N} die Perioden p_1, \dots, p_{2p} und sind diese über dem Körper der reellen Zahlen linear unabhängig, so gibt es wenigstens eine echte JACOBISCHE Funktion h zu den Perioden p_1, \dots, p_{2p} und eine meromorphe, nichtkonstante, $2p$ -fach periodische Funktion f mit den Perioden p_1, \dots, p_{2p} , so daß die Nullstellen von f sowie die von h gerade die Nullstellenfläche \mathfrak{N} und nur sie erfüllen.

¹⁾ Hier wird dieselbe Ausdrucksweise wie in meinen Arbeiten „Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten“ Math. Z. 57, S. 116—154 (zitiert als I) und „Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen“, Math. Z. 57, S. 211—237 (zitiert als II) gewählt. Eine in \mathbb{R}^{2p} abgeschlossene Nullstellenfläche \mathfrak{N} ist dasselbe wie die Menge der Nullstellen einer Cousinschen Verteilung (II. Art.) auf \mathbb{R}^{2p} . Wählt man die Verteilung geeignet, so ist die Vielfachheit ihrer Nullstelle u gerade $\nu(u)$.

²⁾ Vgl. FROBENIUS [3].

Als Anwendungsbeispiel zu den in II gewonnenen Sätzen soll in der vorliegenden Arbeit ein neuartiger und einfacher Beweis dieses Satzes gegeben werden. Weder die Theorie der Thetafunktionen noch die speziell topologische Betrachtungsweise von S. LEFSCHETZ werden gebraucht werden. Darüber hinaus wird sich zeigen, daß die Knesersche Integralformel³⁾ (13) für jede Jacobische oder $2p$ -fach periodische Funktion gilt. Die Sätze von II ergeben umgekehrt, daß durch die Knesersche Integralformel³⁾ eine echte Jacobische Funktion (33) definiert wird. Durch den bekannten Ansatz einer zweiten logarithmischen Ableitung erhält man daraus $2p$ -fach periodische, meromorphe Funktionen, die das Doppelte einer $2p$ -fach periodischen Nullstellenfläche zu Polstellen haben. Die Integraldarstellung (46), die sich hierfür ergibt, kann als eine sachgemäße Übertragung der Partialbruchzerlegung für die Weierstraßsche \wp -Funktion im Gebiete mehrerer Veränderlicher gelten.

§ 1. Jacobische Funktionen.

Die Bezeichnungen der Arbeiten I und II werden wieder benutzt. Die wichtigsten seien hier noch einmal kurz erklärt. Mittels einer positiv definiten Hermiteschen Form $\sum_{\mu, \nu=1}^p g_{\mu\nu} u_\mu \bar{u}_\nu$ wird das *skalare Produkt* zweier Vektoren und der *Betrag* eines Vektors durch³⁾

$$(2) \quad (u | w) = \sum_{\mu, \nu=1}^p g_{\mu\nu} u_\mu \bar{w}_\nu, \quad |u| = \sqrt{(u | u)}$$

erklärt. Mit dem Vektor $\partial u = (\partial u_1, \dots, \partial u_p)$ werden die alternierenden Differentiale³⁾

$$(3) \quad \begin{aligned} \partial v_2(u) &= \frac{i}{2} (\partial u | \partial u) & , \quad \partial v_{2h} &= \frac{1}{h!} (\partial v_2)^h, \\ \partial \omega_2(u) &= \frac{i}{2} \frac{(u | u) (\partial u | \partial u) - (\partial u | u) (u | \partial u)}{(u | u)^2} & , \quad \partial \omega_{2h} &= \frac{1}{h!} (\partial \omega_2)^h \end{aligned}$$

eingeführt. Es werde³⁾

$$(4) \quad W_{2p-2} = \frac{\pi^{p-1}}{(p-1)!}, \quad V_{2p-1}(r) = \frac{2\pi^p}{(p-1)!} r^{2p-1}, \quad V_{2p}(r) = \frac{\pi^p}{p!} r^{2p},$$

sowie $\mathfrak{R}_{r_0, r} = \mathfrak{R} \cap [r_0 \leq |\xi| \leq r]$ abgekürzt. Die Nullstellenfläche \mathfrak{R} mit der Vielfachheit $\nu(w)$ hat die *Anzahlfunktion*³⁾

$$(5) \quad n(r) = \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\mathfrak{R}_{0, r}} \nu(w) \partial \omega_{2p-2} + \nu(0) = \frac{1}{V_{2p-1}(r)} \int_{\mathfrak{R}_{0, r}} \nu(w) \cdot \partial v_{2p-2},$$

$$(6) \quad N(r) = \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Von den Integralen

$$(7) \quad \int_{\mathfrak{R}_{r_0}} \frac{\nu(w)}{|w|^{2p}} \partial \omega_{2p-2}, \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{u+1}} dt, \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{N(t)}{t^{u+1}} dt$$

³⁾ Vgl. H. KNESE [5]. Zum Fall zweier Veränderlichen siehe auch H. KNESE [4].

konvergieren für $\mu > 0$ alle drei oder keines. Divergiert für $\mu \geq 0$ das erste, so heißt μ *Divergenzexponent*, sonst *Konvergenzexponent*. Die untere Grenze aller Konvergenzexponenten ist der *Grenzexponent*. Setzt man $a = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, so hat die meromorphe Funktion g die *Schmiegungsfunktion*³⁾

$$(8) \quad m(r, a) = \frac{1}{V_{2p-1}(r)} \int_{|a|=r} \log \frac{\sqrt{1+|g|^2} \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}}{|\alpha_1 + \alpha_2 g|} \partial v_{2p-1}.$$

Ist $N(r, a)$ die Anzahlfunktion der a -Stellenfläche von g , so gilt nach H. KNESER³⁾ der *erste Hauptsatz*

$$(9) \quad T(r) = N(r, a) + m(r, a) - m(r_0, a).$$

Die *Charakteristik* $T(r) = T(r, g)$ ist von a unabhängig. Die meromorphen Funktionen g und g^{-1} haben dieselbe Charakteristik. Die Charakteristik eines Quotienten läßt sich durch

$$(10) \quad T\left(r, \frac{f}{g}\right) \leq T(r, f) + T(r, g^{-1}) + c = T(r, f) + T(r, g) + c$$

mit einer von r unabhängigen Konstanten c abschätzen.

Ordnung, Klasse und Typ einer monotonen, nicht abnehmenden Funktion werden wie üblich⁴⁾ definiert. Eine meromorphe Funktion g habe dieselbe Ordnung, Klasse und Typ wie ihre Charakteristik. Ist g sogar eine ganze Funktion, so hat

$$(11) \quad \log M(r) = \log \max_{|u| \leq r} |g(u)|$$

dieselbe Ordnung, Klasse und Typ wie g .

Der Weierstraßsche Primfaktor $E(x, q) = (1-x) \exp\left(\sum_{v=1}^q \frac{x^v}{v}\right)$ dient zur Definition von

$$(12) \quad e(x, q) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \{x^{p-1} \log E(x, q)\}.$$

Die Nullstellenfläche $\Re(0)$ mit der Vielfachheit $\nu(w, 0)$ und die Polstellenfläche $\Re(\infty)$ mit der Vielfachheit $\nu(w, \infty)$ der meromorphen Funktion g mögen nicht in die Kugel $[|w| \leq r_0]$ eindringen. Ist die ganze Zahl $q+1 \geq 1$ Konvergenzexponent von $\Re(0)$ und $\Re(\infty)$ und strebt $T(r) \cdot r^{q-1} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$, so gilt nach H. KNESER³⁾ in der Kugel $[|u| \leq r_0]$ die Integraldarstellung

$$(13) \quad \log g(u) = Q(u) + \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\Re(0)} \nu(w, 0) e\left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, q\right) \partial \omega_{2p-2} \\ + \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\Re(\infty)} \nu(w, \infty) e\left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, q\right) \partial \omega_{2p-2},$$

wobei $Q(u)$ ein Polynom höchstens q -ten Grades ist.

Mit $q=2$ gilt diese Darstellung für jede Jacobische Funktion. Denn es gelten die Sätze:

⁴⁾ R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen, Kap. VIII, § 1, S. 208—211
Mathematische Annalen. 126.

Satz 1. Ist die Nullstellenfläche \mathfrak{N} mit der Vielfachheit $\nu(w)$ $2p$ -fach periodisch, so hat \mathfrak{N} die Zahl 2 als Divergenzexponenten und Grenzexponenten. Die Anzahlfunktionen $N(r)$ und $n(r)$ haben die Ordnung 2, gehören in die Divergenzklasse und sind vom Mitteltyp.

Beweis. Der Raum werde in die kongruenten Periodenparallelopete $F_{m_1, \dots, m_{2p}} = [u = \sum_{\mu=1}^{2p} (t_\mu + m_\mu) v_\mu \text{ mit } 0 \leq t < 1]_u$ mit $m_1, \dots, m_{2p} = 0, \pm 1, \dots$ zerlegt. Es sei $F_0 \dots_0 = F$. Die Vereinigung der Parallelopete mit einer Ecke im Nullpunkt, d. h. die Vereinigung $\bigcup_{m_1=0, -1} \dots \bigcup_{m_{2p}=0, -1} F_{m_1, \dots, m_{2p}}$ habe die abgeschlossene Hülle F^* . Der Radius der größten in F^* enthaltenen, abgeschlossenen Kugel um den Nullpunkt sei δ . Zu jedem Radius $r > \delta$ wird die ganze Zahl $k \geq 1$ durch $\delta k \leq r < (k+1)\delta$ eindeutig bestimmt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{n(r)}{r^2} &= \frac{r^{-2}}{V_{2p-2}(r)} \int_{\mathfrak{N}_{\delta r}} \nu(w) \partial v_{2p-2} \\
 (14) \quad &\leq \frac{r^{-2p}}{W_{2p-2}} \sum_{m_1, \dots, m_{2p} = -k-1}^{k+1} \int_{\mathfrak{N} \cap F_{m_1, \dots, m_{2p}}} \nu(w) \partial v_{2p-2} \\
 &\leq \frac{1}{W_{2p-2}} \frac{(2k+3)^{2p}}{(\delta k)^{2p}} \int_{\mathfrak{N} \cap F} \nu(w) \partial v_{2p-2} \leq c_1 = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Der Radius der kleinsten, F^* umfassenden, abgeschlossenen Kugel um den Nullpunkt sei η . Zu jedem $r > \eta$ sei die ganze Zahl $\bar{k} \geq 1$ durch $\eta \bar{k} < r \leq \eta(\bar{k}+1)$ eindeutig bestimmt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{n(r)}{r^2} &= \frac{r^{-2}}{V_{2p-2}(r)} \int_{\mathfrak{N}_{\delta r}} \nu(w) \partial v_{2p-2} \\
 (15) \quad &\geq \frac{r^{-2p}}{W_{2p-2}} \sum_{m_1, \dots, m_{2p} = -\bar{k}}^{\bar{k}-1} \int_{\mathfrak{N} \cap F_{m_1, \dots, m_{2p}}} \nu(w) \partial v_{2p-2} \\
 &\geq \frac{1}{W_{2p-2}} \frac{(2\bar{k})^{2p}}{(\eta(\bar{k}+1))^{2p}} \int_{\mathfrak{N} \cap F} \nu(w) \partial v_{2p-2} \geq c_2 > 0 \quad (c_2 = \text{const.}).
 \end{aligned}$$

Daher hat $n(r)$, also auch $N(r)$, die Ordnung 2, den Mitteltyp und gehört zur Divergenzklasse, w. z. b. w.

Satz 2. Eine Jacobische Funktion hat höchstens die Ordnung 2. Eine echte Jacobische Funktion hat die Ordnung 2, den Mitteltyp und gehört zur Divergenzklasse.

Beweis. Eine Jacobische Funktion ändert sich in der Gestalt

$$(16) \quad h(u + v_\mu) = h(u) e^{L_\mu(u)},$$

wobei $L_\mu(u)$ eine lineare Funktion ist. Setzt man $\frac{m}{|m|} = 0$ für $m = 0$, so besteht

für beliebige ganze Zahlen m_μ die Beziehung

$$(17) \quad h(u + \sum_{\mu=1}^{2p} m_\mu v_\mu) = h(u) e^{\sum_{\mu=1}^{2p} \frac{m_\mu}{|m_\mu|} \sum_{\kappa=0}^{|m_\mu|-1} L_\mu \left(u + \left(\kappa + \frac{1}{2} - \frac{m_\mu}{2|m_\mu|} \right) \frac{m_\mu}{|m_\mu|} v_\mu + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} m_\nu v_\nu \right)}$$

Die Bedeutungen von $F, F_{m_1} \dots m_{2p}, \delta, \eta, k$ und \bar{k} seien dieselben wie im Beweis von Satz 1. Zu jedem Vektor η in der Kugel $[|\eta| \leq r]$ gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen m_μ , so daß $\eta = u + \sum_{\mu=1}^{2p} m_\mu v_\mu$ mit $u \in F$ gilt. Die $F_{\mu_1} \dots \mu_{2p}$ mit $|\mu_r| \leq k+1$ überdecken die Kugel $[|\eta| < (k+1)\delta]$, also auch die kleinere Kugel $[|\eta| \leq r]$ ganz. Es ist $|m_\mu| \leq k+1 \leq \frac{r}{\delta} + 1$. Die linearen Funktionen L_μ werden durch

$$(18) \quad |L_\mu(u)| \leq c_0 + c_1 |u| \quad (c_0, c_1 \text{ konstant})$$

abgeschätzt. Mit geeigneten Konstanten c_2, c_3, c_4 gilt daher

$$(19) \quad \left| \sum_{\mu=1}^{2p} \frac{m_\mu}{|m_\mu|} \sum_{\kappa=0}^{|m_\mu|-1} L_\mu \left(u + \left(\kappa + \frac{1}{2} - \frac{m_\mu}{2|m_\mu|} \right) \frac{m_\mu}{|m_\mu|} v_\mu + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} m_\nu v_\nu \right) \right| \leq 2(k+1)c_0 + 2p(k+1)|u|c_1 + \sum_{\mu=1}^{2p} |v_\mu| \frac{(k+1)(k+2)}{2} c_1 + c_1(k+1)^2 \sum_{\mu=1}^{2p} \sum_{\nu=1}^{\mu-1} |v_\nu| \leq c_2 r^3 + c_3 r + c_4.$$

Setzt man $\text{Max}_{|u| \leq r} |h(u)| = M(r)$, so folgt aus (17) und (19) sofort:

$$(20) \quad \log |h(\eta)| \leq \log M(\eta) + c_4 + c_3 r + c_2 r^2 \quad \text{für } |\eta| \leq r.$$

Daher hat die Funktion h höchstens die Ordnung 2. Eine echte Jacobische Funktion hat eine $2p$ -fach periodische Nullstellenfläche. Nach Satz 1 und dem ersten Hauptsatz hat dann h mindestens, also genau die Ordnung 2; nach (20), Satz 1 und dem ersten Hauptsatz hat h den Mitteltyp und liegt in der Divergenzklasse, w. z. b. w.

Nach Satz 1 und Satz 2 gestattet jede Jacobische Funktion h , die in der Kugel $[|u| \leq r_0]$ nicht verschwindet, für $|u| \leq r_0$ die Integraldarstellung

$$(21) \quad \log h(u) = \log h(0) + \sum_{\mu=1}^p u_\mu \frac{\partial \log h(x)}{\partial x_\mu} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p u_\mu u_\nu \frac{\partial^2 \log h(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Big|_{x=0} + \frac{1}{W_{2p-1}} \int_{\Re(0)} v(w) e \left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2 \right) \partial \omega_{2p-1}.$$

Ist eine $2p$ -fach periodische Nullstellenfläche \Re mit der Vielfachheit $v(w)$ gegeben, so kann man umgekehrt fragen, ob durch das Integral (21), also durch

$$(22) \quad h(u) = \exp \left\{ \frac{1}{W_{2p-1}} \int_{\Re} v(w) e \left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2 \right) \partial \omega_{2p-1} \right\}$$

eine Jacobische Funktion gegeben wird. Die Nullstellenfläche \mathfrak{R} meide die Kugel $[|u| \leq r_0]$. Dann hat das Integral in Gl. (22) für alle $|u| \leq r_0$ einen Sinn und gibt nach (22) für $|u| \leq r_0$ eine analytische Funktion h , die sich zu einer ganzen Funktion fortsetzen läßt, welche auf \mathfrak{R} und nur auf \mathfrak{R} verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(w)$. Diese Funktion h hat die Ordnung 2 und gehört zur Divergenzklasse (siehe dazu II, Satz 5). Dies gilt, wenn $p \neq 0$ ein beliebiger Vektor ist, wie aus II § 2 folgt, auch von der Funktion $h(u+p)$. Ist insbesondere p eine Periode von \mathfrak{R} , so stellt der Quotient $\frac{h(u+p)}{h(u)}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen dar. Mit einer geeigneten Funktion Q gilt also

$$(23) \quad e^{Q(u)} = \frac{h(u+p)}{h(u)}.$$

Da die Funktionen $h(u+p)$ und $h(u)$ die Ordnung 2 haben, ist Q ein Polynom höchstens 2-ten Grades. Kann man beweisen, daß für jede Periode das zugehörige Polynom Q höchstens den Grad 1 hat, so ist h eine Jacobische Funktion. Dieser Beweis ist sehr einfach, wenn die Nullstellenfläche \mathfrak{R} bei der Spiegelung am Nullpunkt in sich übergeht. Nach (22) ist dann h , also auch $\chi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \log h(u)}{\partial u_\mu \partial u_\nu}$ eine gerade Funktion. Ist $\frac{1}{2} b_{\mu\nu}$ der Koeffizient von $u_\mu u_\nu$ in Q , so folgt aus (23) die Identität

$$b_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu}(u+p) - \chi_{\mu\nu}(u).$$

Für $u = -\frac{1}{2}p$ erhält man

$$b_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu}(u+p) - \chi_{\mu\nu}(u) = \chi_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}p\right) - \chi_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}p\right) = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Gestattet jedoch \mathfrak{R} keine solche Spiegelung, so ist der Beweis etwas schwieriger. Er kann beispielsweise nicht aus (22) abgelesen werden, da diese Integraldarstellung nur in einer Umgebung des Nullpunktes gilt.

Hilfssatz 1. Die ganzen Funktionen f_1 und f_2 mögen dieselben Nullstellen mit der gleichen Vielfachheit $\nu(w)$ haben. Es sei $f_1(0) = f_2(0) = 1$ vorausgesetzt. Für eine nichtnegative Funktion $s(r)$ mögen die Abschätzungen

$$(24) \quad \log |f_1(u)| \leq s(r), \quad \log |f_2(u)| \leq s(r) \quad \text{für } |u| \leq r$$

bestehen. Dann gilt

$$(25) \quad \left| \log \frac{|f_1(u)|}{|f_2(u)|} \right| \leq 96 s(11r) + 45 \quad \text{für } |u| \leq r.$$

Beweis. Zunächst werde der Fall einer Veränderlichen erledigt. Es werde $g(u) = \prod_{|z| \leq r} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^{\nu(z)}$ und $h_1(u) = f_1(u) g(u)^{-1}$ sowie $h_2(u) = f_2(u) g(u)^{-1}$ gesetzt. Durch die Festsetzung $\log h_1(0) = 0$ wird $\log h_1(u)$ im Kreis $[|u| \leq r]$ eindeutig erklärt. In ihm gilt

$$(26) \quad \int_0^1 \log |h_1(\tau u)| d\tau = \int_0^1 \log |f_1(\tau u)| d\tau - \int_0^1 \log |g(\tau u)| d\tau.$$

Mit $x = \frac{r}{|z|} \geq 1$ und $|u| = r$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log |g(\tau u)| d\tau &= \sum_{|z| \leq r} \nu(z) \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{\tau z}{x} \right| d\tau \\ &\geq \sum_{|z| \leq r} \nu(z) \int_0^1 \log |1 - \tau x| d\tau \\ &\equiv \sum_{|z| \leq r} \nu(z) \frac{1}{x} \{ (x-1) (\log |x-1| - 1) - 1 \}. \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung bestimmt man das Minimum der Funktion $(x-1) \cdot (\log(x-1) - 1)$ für $x \geq 1$ zu -1 . Also gilt

$$(27) \quad \int_0^1 \log |g(\tau u)| d\tau \geq \sum_{|z| \leq r} \nu(z) \frac{1}{x} \{-2\} \geq -2n(r).$$

Aus (24), (26) und (27) folgt für $|u| \leq r$ die Beziehung

$$(28) \quad \Re \left\{ \frac{1}{u} \int_0^u \log h_1(y) dy \right\} = \int_0^1 \log |h_1(\tau u)| d\tau \leq s(r) + 2n(r).$$

Für $|u| \leq \vartheta r < r$ gilt dann nach CARATHÉODORY⁵⁾

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u \log h_1(y) dy \right| \leq \frac{2}{1-\vartheta} \{s(r) + 2n(r)\}.$$

Für $|u| \leq \vartheta^2 r < r$ gilt also

$$\begin{aligned} (29) \quad |\log h_1(u)| &\leq \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \frac{1}{\vartheta r} \frac{2\vartheta r}{1-\vartheta} \{s(r) + 2n(r)\}, \\ |\log h_1(u)| &\leq \frac{2}{(1-\vartheta)^3} \{s(r) + 2n(r)\}. \end{aligned}$$

In einem Kreis $[|u| \leq r_0]$ mit $r_0 > 0$ verschwindet die Funktion f_1 nicht. Für dieses r_0 gilt nach (6) und dem ersten Hauptsatz

$$(30) \quad n(r) \leq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} dt \leq N(er) \leq T(er) + m(r_0, 0).$$

Für $a = \infty$ gibt der erste Hauptsatz

$$\begin{aligned} (31) \quad T(r) &= m(r, \infty) - m(r_0, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |f(re^{i\varphi})|^2} d\varphi - m(r_0, \infty) \\ &\leq s(r) + \log 2 - m(r_0, \infty). \end{aligned}$$

Für $|u| \leq \vartheta^2 r$ gilt also

$$(32) \quad |\log h_1(u)| \leq \frac{2}{(1-\vartheta)^3} \{s(r) + 2s(er) + 2\log 2 - 2m(r_0, \infty) + 2m(r_0, 0)\}.$$

Läßt man $r_0 \rightarrow 0$ streben, so streben $m(r_0, \infty) \rightarrow \log \sqrt{1 + |f(0)|^2} = \frac{1}{2} \log 2$ und $m(r_0, 0) \rightarrow \log \sqrt{1 + |f(0)|^2} = \frac{1}{2} \log 2$, wie man sofort aus (8) abliest. Ersetzt

⁵⁾ Vgl. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, S. 89, Berlin 1916, 1. Auflage.

man außerdem in (32) noch r durch $4r$ und wählt $\vartheta = \frac{1}{2}$, so wird

$$|\log |h_1(u)|| \leq 48 s(11r) + \frac{45}{2} \quad \text{für } |u| \leq r.$$

Da eine entsprechende Abschätzung für h_2 gilt, folgt insgesamt:

$$\left| \log \frac{|f_1(u)|}{|f_2(u)|} \right| = |\log |h_1(u)|| - |\log |h_2(u)|| \leq 96 s(11r) + 45.$$

Der Fall mehrerer Veränderlichen wird mittels $f_r(u) = f_r(u, \alpha)$ mit $|\alpha| = 1$ auf den Fall einer Veränderlichen zurückgeführt. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Nun kann man den folgenden Satz beweisen:

Satz 3. Die Perioden p_1, \dots, p_{2p} der abgeschlossenen Nullstellenfläche \mathfrak{N} mit der Vielfachheit $v(w)$ seien über dem Körper der reellen Zahlen linear unabhängig. Die Nullstellenfläche \mathfrak{N} meide die Kugel $[|u| \leq r_0]$ für ein $r_0 > 0$. Dann gibt es eine Jacobische Funktion h , für die in der Kugel $[|u| \leq r_0]$ die Integraldarstellung

$$(33) \quad \log h(u) = \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\mathfrak{N}} v(w) e\left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2\right) \partial \omega_{2p-2}$$

gilt. Es verschwindet h auf \mathfrak{N} und nur auf \mathfrak{N} , und zwar mit der Vielfachheit $v(w)$.

Zusatz 1. Hat \mathfrak{N} die Periode $p \neq 0$, so transformiert sich h in der Form

$$(34) \quad h(u + p) = h(u) e^{L(u)}$$

mit einer linearen Funktion $L(u)^{*)}$.

Zusatz 2. Geht bei der Transformation $u' = a u$ die Nullstellenfläche \mathfrak{N} mit ihrer Vielfachheit in sich über, so gilt $h(a u) = h(u)$.

Beweis. Nach dem oben Gesagten [Gl. (22) bis (23)] braucht nur noch die Periodeneigenschaft, also (34), bewiesen zu werden; denn die Aussage des Zusatzes 2 liest man sofort an (33) ab. Mit c_0, c_1, c_2, \dots werden positive Konstanten bezeichnet. Da nach II, Satz 5 die Funktion h die Ordnung 2 hat, gilt für $|u| \leq r$ und jede ganze Zahl $m > 0$ die Ungleichung

$$(35) \quad \log |h(u)| \leq c_0 r^{\frac{5}{2}} + c_1 < 6 c_0 r^{\frac{5}{2}} + c_1 + |\log |h(m p)||.$$

Für alle $|u| \leq r$ und $|m p| \leq r$ gilt mit denselben von m unabhängigen Konstanten

$$\log |h(u + m p)| \leq c_0 (2r)^{\frac{5}{2}} + c_1 < 6 c_0 r^{\frac{5}{2}} + c_1$$

oder

$$(36) \quad \log \left| \frac{h(u + m p)}{h(m p)} \right| < 6 c_0 r^{\frac{5}{2}} + c_1 + |\log |h(m p)||.$$

Hilfssatz 1 liefert wegen $h(0) = 1$ die Abschätzung

$$(37) \quad \log \left| \frac{h(u + m p)}{h(u)} \right| \leq 96(6 c_0 (11r)^{\frac{5}{2}} + c_1) + 97 |\log |h(m p)|| + 45 \\ \leq c_3 r^{\frac{5}{2}} + c_4 + 97 |\log |h(m p)||.$$

^{*)} Das Transformationsgesetz (34) gilt also nicht nur für die Perioden des von p_1, \dots, p_{2p} erzeugten Periodenmoduls, sondern überhaupt für jede Periode der Nullstellenfläche \mathfrak{N} .

Dabei sind c_3 und c_4 von m unabhängige Konstanten. Da die Funktionen $h(u+p)$ und $h(u)$ die Ordnung 2 und dieselben Nullstellen haben, gilt (23) mit einem Polynom Q höchstens 2-ten Grades, woraus

$$(38) \quad h(u + mp) = h(u) e^{\sum_{\mu=0}^{m-1} Q(u + \mu p)}$$

folgt mit

$$(39) \quad Q(u) = L_0 + L_1(u) + L_2(u).$$

Es ist L_0 konstant, $L_1(u)$ homogen und linear, $|L_1(u)| \leq c_2 |u|$, und

$$(40) \quad L_2(u) = \sum_{\mu, \nu=1}^p \alpha_{\mu\nu} u_\mu u_\nu.$$

Setzt man $h(u + mp)$ und $h(mp)$ aus (38) in (37) ein und spaltet die Summen $\sum_{\mu=0}^{m-1} Q(u + \mu p)$ bzw. $\sum_{\mu=0}^{m-1} Q(mp)$ nach (39) auf, so erhält man

$$(41) \quad \begin{aligned} \Re \sum_{\mu=0}^{m-1} L_2(u + \mu p) &\leq c_3 r^{\frac{5}{2}} + c_4 + 97 \left| \sum_{\mu=0}^{m-1} \Re (L_0 + \mu L_1(p) + \mu^2 L_2(p)) \right. \\ &\quad \left. - \Re \sum_{\mu=0}^{m-1} L_0 - \Re \sum_{\mu=0}^{m-1} L_1(u + \mu p) \right| \\ &\leq c_3 r^{\frac{5}{2}} + c_4 + 98 m |L_0| + 98 \frac{m(m-1)}{2} |L_1(p)| \\ &\quad + 97 \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} |L_2(p)| + m c_2 |u|. \end{aligned}$$

Wegen $|u| \leq r$ und $m \leq \frac{r}{|p|}$ erhält man aus (41) und (40) mit zwei neuen, von m unabhängigen Konstanten c_5 und c_6 und mit $p = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ die Ungleichung

$$(42) \quad \begin{aligned} c_5 + c_6 r^{\frac{5}{2}} + 97 \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} |L_2(p)| &\geq \\ &\geq \Re \left\{ m \sum_{\mu, \nu=1}^p \alpha_{\mu\nu} u_\mu u_\nu + \frac{m \cdot (m-1)}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p \alpha_{\mu\nu} (u_\mu \omega_\nu + u_\nu \omega_\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \sum_{\mu, \nu=1}^p \alpha_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \right\}. \end{aligned}$$

In (42) werde $u = \frac{m-1}{2} \delta$ gesetzt. Dann geht (42) über in

$$(43) \quad \begin{aligned} c_5 + c_6 r^{\frac{5}{2}} + 97 \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} |L_2(p)| & \\ &\geq \Re \left\{ \frac{m(m-1)^2}{4} L_2(\delta + p) + \frac{m(m^2-1)}{12} L_2(p) \right\}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung (43) gilt nun für jeden Vektor δ , jede natürliche Zahl m und jeden Radius r , zwischen denen die Beziehungen

$$\left| \frac{m-1}{2} \delta \right| \leq r, \quad 0 < m |p| \leq r$$

bestehen. Zunächst wird nun der Vektor δ beliebig gewählt. Dann werden

dazu die Radien $r = m(|\delta| + |\rho|)$ für $m = 1, 2, 3, \dots$ bestimmt. Es ist $\left| \frac{m-1}{2} \delta \right| \leq m|\delta| < r$, $0 < m|\rho| \leq r$. Die Gl. (43) gilt. Teilt man sie durch m^3 , so liefert der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ die Abschätzung

$$(44) \quad \frac{97}{3} |L_2(\rho)| \geq \Re \frac{1}{4} L_2(\delta + \rho) + \Re \frac{1}{12} L_2(\rho)$$

für jeden beliebigen Vektor δ . Daher ist die ganze Funktion $L_2(\delta + \rho)$, also $L_2(\delta)$ konstant, was nach (40) aber $L_2(\delta) = 0$ bedeutet, w. z. b. w.

§ 2. Mehrfach periodische Funktionen.

Entsprechende Sätze lassen sich nun für $2p$ -fach periodische Funktionen leicht beweisen. Ohne Schwierigkeiten ergibt sich der bekannte Satz?

Satz 4. Jede $2p$ -fach periodische Funktion f ist der Quotient zweier teilerfremder Jacobischer Funktionen.

Beweis. Ist $f = 0$, so ist $f = \frac{0}{1}$ diese Quotientendarstellung. Andernfalls besitzt f eine Nullstellenfläche $\Re(0)$ mit der Vielfachheit $\nu(w, 0)$ und eine Polstellenfläche $\Re(\infty)$ mit der Vielfachheit $\nu(w, \infty)$, die dieselben Perioden wie f haben. Der Punkt a werde außerhalb der Vereinigung $\Re(0) \cup \Re(\infty)$ gewählt. Es seien

$$\Re_1(0) = [u = w - a \text{ mit } w \in \Re(0)], \quad \Re_1(\infty) = [u = w - a \text{ mit } w \in \Re(\infty)]_u$$

die um den Vektor $-a$ parallel verschobenen Nullstellenflächen $\Re(0)$ bzw. $\Re(\infty)$. Nach Satz 3 bestimmt man durch (33) zu $\Re_1(0)$ mit der Vielfachheit $\nu(u + a, 0)$ die Jacobische Funktion h_0 und zu $\Re_1(\infty)$ mit der Vielfachheit $\nu(u + a, \infty)$ die Jacobische Funktion h_1 . Der Quotient $f(u + a) \frac{h_1(u)}{h_0(u)}$ ist eine Jacobische Funktion ohne Nullstellen. Daher gilt $f(u + a) \frac{h_1(u)}{h_0(u)} = e^{Q(u)}$, wobei Q ein Polynom höchstens 2-ten Grades ist. Setzt man $h_2(u) = h_0(u) e^{Q(u)}$, so ist $f(u) = \frac{h_2(u - a)}{h_1(u - a)}$ die gesuchte Quotientendarstellung, w. z. b. w.

Nach diesem Beweis hat jede $2p$ -fach periodische Funktion f , die für $|u| \leq r_0$ regulär und von Null verschieden ist, in der Kugel $[|u| \leq r_0]$ die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} \log f(u) = \log f(0) + \sum_{\mu=1}^p u_\mu \frac{\partial \log f(x)}{\partial x_\mu} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p u_\mu u_\nu \frac{\partial^2 \log f(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Big|_{x=0} \\ + \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\Re(0)} \nu(w, 0) e \left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2 \right) \partial \omega_{2p-2} \\ - \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\Re(\infty)} \nu(w, \infty) e \left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2 \right) \partial \omega_{2p-2}. \end{aligned}$$

Satz 5. Jede nichtkonstante $2p$ -fach periodische Funktion hat die Ordnung 2, ist vom Mitteltyp und liegt in der Divergenzklasse.

⁷⁾ Der Satz wurde für $p = 2$ von P. APPELL [1], für $p \geq 2$ von H. POINCARÉ [7] bewiesen. Neuere Darstellungen des Beweises geben z. B. C. L. SIEGEL [8] und F. CONFORTEO [2].

Beweis. Nach dem Beweis von Satz 4 und Gl. (10) ist $\text{Ord } f = \text{Ord } h_2 h_1^{-1} \leq \text{Max}(\text{Ord } h_2, \text{Ord } h_1) = 2$. Nach Satz 1 gilt für die Anzahlfunktion $N(r, 0)$ von $\mathfrak{R}(0)$ umgekehrt $2 = \text{Ord } N(r, 0 \leq \text{Ord } T(r) = \text{Ord } f$. Es ist $\text{Ord } f = 2$. Ebenso schließt man bei Klasse und Typ, w. z. b. w.

Ist eine $2p$ -fach periodische Nullstellenfläche \mathfrak{R} gegeben, so kann man umgekehrt fragen, ob es eine $2p$ -fach periodische Funktion f gibt, deren Polstellenfläche gerade \mathfrak{R} ist. Die Antwort ist nach Satz 3 nicht mehr schwer und werde in Satz 6 gegeben, indem man in der üblichen Weise die zweite logarithmische Ableitung bildet.

Hilfssatz 2. Die im Gebiet G analytische Funktion g sei im Punkt $u_0 \in G$ irreduzibel. Es sei $g(u_0) = 0$ vorausgesetzt. Die Nullstellenfläche $\mathfrak{R} = [g(u) = 0] \cap G$ von g sei nichtzylindrisch bezüglich des Vektors a . Dann sind im Punkt u_0 die Funktionen g und $\sum_{r=1}^p a_r g_{u_r}$ teilerfremd.

Beweis. Entgegen der Behauptung werde angenommen, daß $\sum_{r=1}^p a_r g_{u_r}$

durch g in u_0 geteilt wird. Dann verschwindet $\sum_{r=1}^p a_r g_{u_r}$ auf \mathfrak{R} in einer Umgebung U von u_0 . In $\mathfrak{R} \cap U$ gibt es einen gewöhnlichen Punkt u_1 von \mathfrak{R} . Eine partielle Ableitung, etwa g_{u_p} , ist in u_1 von Null verschieden. In einer Umgebung U_1 von u_1 kann man die Gleichung $g(u) = 0$ durch $u_p = \varphi(u_1, \dots, u_{p-1})$ nach u_p auflösen. Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} g(u_1, \dots, u_{p-1}, \varphi) &= 0, \\ \sum_{r=1}^p g_{u_r}(u_1, \dots, u_{p-1}, \varphi) a_r &= 0, \\ \varphi_{u_p}(u_1, \dots, u_{p-1}) &= - \frac{g_{u_p}(u_1, \dots, u_{p-1}, \varphi)}{g_{u_p}(u_1, \dots, u_{p-1}, \varphi)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für jeden Punkt $(u_1, \dots, u_p) \in U_1 \cap \mathfrak{R}$ mit $u_p = \varphi(u_1, \dots, u_{p-1})$ die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{p-1} \varphi_{u_r}(u_1 + t a_1, \dots, u_{p-1} + t a_{p-1}) a_r = a_p$$

identisch in t , d. h.

$$\varphi(u_1 + t a_1, \dots, u_{p-1} + t a_{p-1}) = u_p + t a_p$$

oder

$$g(u + t a) = 0$$

identisch in t für alle Punkte $u \in \mathfrak{R} \cap U_1$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, w. z. b. w.

Satz 6. Die Vektoren $a = (a_1, \dots, a_p)$ und $b = (b_1, \dots, b_p)$ seien von Null verschieden. Bezüglich der Vektoren a und b sei die $2p$ -fach periodische Nullstellenfläche \mathfrak{R} mit der Vielfachheit $v(w)$ nichtzylindrisch. Die Kugel $[|u| \leq r_0]$ werde von der Nullstellenfläche \mathfrak{R} gemieden. Dann gibt es eine $2p$ -fach periodische

Funktion f , die in der Kugel $[|u| \leq r_0]$ die Integraldarstellung^{a)}

$$f(u) = \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\mathfrak{R}} v(w) e'' \left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2 \right) \frac{(a|w)(b|w)}{|w|^4} \partial \omega_{2p-2}$$

zuläßt. Sie wird auf \mathfrak{R} und nur auf \mathfrak{R} unendlich, und zwar mit der Vielfachheit $2v_1(w)$. In jedem gewöhnlichen Punkt von \mathfrak{R} ist $v_1(w) = 1$. Genauer bestimmt sich $v_1(w)$ so: Zu $w_0 \in \mathfrak{R}$ gibt es eine Umgebung U und eine in U reguläre Funktion g_0 , die in jedem Punkt von $U \cap \mathfrak{R}$ in einfache Primfaktoren zerfällt und deren Nullstellen in U gerade $\mathfrak{R} \cap U = [g_0(u) = 0]_U \cap U$ geben. Dann ist $v_1(w_0)$ die Vielfachheit der Nullstelle w_0 von g_0 .

Zusatz 1. Ist h durch (33) definiert, so ist $f = \sum_{\mu, \nu=1}^p a_\mu b_\nu \frac{\partial^2 \log h}{\partial u_\mu \partial u_\nu}$.

Zusatz 2. Ist \mathfrak{R} bezüglich jedes Vektors nichtzyklisch, so ist f eine echte $2p$ -fach periodische Funktion.

Zusatz 3. Hat \mathfrak{R} die Periode p , so auch f .

Zusatz 4. Geht \mathfrak{R} bei der Transformation $u' = au$ in sich über, so ist $f(au) = a^2 f(u)$, wobei übrigens $|a| = 1$ folgt.

Beweis. Zu \mathfrak{R} wird nach Satz 3 die Jacobische Funktion h durch (33) bestimmt. Leitet man (33) ab, so erhält man in $[|u| \leq r_0]$ die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{\mu, \nu=1}^p a_\mu b_\nu \frac{\partial^2 \log h}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \\ (47) \quad &= \frac{1}{W_{2p-2}} \int_{\mathfrak{R}} v(w) e'' \left(\frac{(u|w)}{(w|w)}, 2 \right) \frac{(a|w)(b|w)}{|w|^4} \partial \omega_{2p-2}. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist außerhalb \mathfrak{R} analytisch. Sie ist im ganzen Raum meromorph. Hat \mathfrak{R} die Periode p , so gilt $h(u+p) = e^{L(u)} h(u)$, wobei L eine lineare Funktion ist. Leitet man nach u_μ und u_ν ab, so folgt $f(u+p) = f(u)$. Ebenso beweist man Zusatz 4. Im Punkt $u_0 \in \mathfrak{R}$ habe h die Primfaktorzerlegung $h = g_1^{s_1} \dots g_k^{s_k}$. Ist $v(u, g_\mu)$ die Vielfachheit der Nullstelle u von g_μ , so ist $v(u_0) = \sum_{\mu=1}^k s_\mu v(u_0, g_\mu)$ und $v_1(u_0) = \sum_{\mu=1}^k v(u_0, g_\mu)$. Mit g werde irgendeiner der Primfaktoren g_μ , mit $s \geq 1$ seine Vielfachheit s_μ bezeichnet. Mit einer zu g teilerfremden Funktion R gilt

$$\begin{aligned} h &= g^s R, \\ h_{u_\mu} &= s g^{s-1} g_{u_\mu} R \bmod g^s, \\ h_{u_\mu u_\nu} &= s(s-1) g^{s-2} g_{u_\mu} g_{u_\nu} R \bmod g^{s-1}. \end{aligned}$$

Das gibt

$$(48) \quad \sum_{\mu, \nu=1}^p a_\mu b_\nu (h h_{u_\mu u_\nu} - h_{u_\mu} h_{u_\nu}) = -s g^{2s-2} R^2 \sum_{\mu=1}^p a_\mu g_{u_\mu} \sum_{\nu=1}^p b_\nu g_{u_\nu} \bmod g^{2s-1}.$$

Da g teilerfremd zu $\sum_{\mu=1}^p a_\mu g_{u_\mu} \cdot \sum_{\nu=1}^p b_\nu g_{u_\nu}$ in u_0 ist, wird in u_0 die reguläre Funktion

^{a)} Es ist e'' die zweite Ableitung: $e''(x, q) = \frac{d^2}{dx^2} e(x, q)$.

$h^2 \cdot f$ durch g^{2s-2} , aber nicht durch g^{2s-1} geteilt. Daher gibt es eine zu $g_0 = g_1 \dots g_k$ teilerfremde, in u_0 reguläre Funktion T , für die in einer Umgebung von u_0 gilt:

$$(49) \quad f = \frac{T}{g_1^2 \dots g_k^2}.$$

Nach der Definition der Vielfachheit in I § 3c ist $2 \nu_1(w)$ die Vielfachheit der Polstelle. Hängt bei einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems die meromorphe Funktion f nicht von der Veränderlichen u_μ ab, so ist ihre Polstellenfläche bezüglich des Vektors $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ zylindrisch. Ist also \Re bezüglich jeder Ebene nichtzylindrisch, so ist f eine echte $2p$ -fache periodische Funktion, w. z. b. w.

Literaturverzeichnis.

- [1] P. APPELL: Sur les fonctions périodiques de deux variables. J. math. pures appl. 4. Ser. 7, 157—219 (1891). — [2] F. CONFORTO: Funzioni abeliani e matrici di RIEMANN. Rom 1942, 304 Seiten. — [3] G. FROBENIUS: Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Funktionen. J. reine u. angew. Math. 97, 16—48, 168—223. — [4] H. KNESER: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher Sonderausgabe Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1936, XXXI, 19 Seiten. — [5] H. KNESER: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsh. Math. Ver. 48, 1—28 (1938). — [6] S. LEFSCHETZ: L'analyse situs et la géométrie algébrique. Paris 1924, 154 Seiten. — [7] H. POINCARÉ: Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions Abéliennes. Oeuvre de Henri POINCARÉ Bd. IV, S. 162—243, oder Acta math. 22 (1898). — [8] C. L. SIEGEL: Analytic functions of several complex variables. Notes by P. T. BATEMAN. Institute for Advanced Study. Princeton (N. J.) 1950, 220 Seiten.

(Eingegangen am 17. September 1952.)

Die Differentialgleichungen in der Theorie der SIEGELSchen Modulfunktionen.

Von

HANS MAASS in Heidelberg.

Einleitung.

Es hat sich gezeigt, daß eine angemessene Kennzeichnung der automorphen Formen in der analytischen Zahlentheorie der indefiniten quadratischen Formen durch Differentialgleichungen erfolgen kann. Für die elliptischen Modulfunktionen ergaben sich bereits abschließende Resultate¹⁾. Der vorliegende Aufsatz soll die in Aussicht gestellte Verallgemeinerung dieser Untersuchungen auf die SIEGELSchen Modulfunktionen vorbereiten. Ich beschränke mich hier auf die Übertragung des formalen Teils, der sich auf das Rechnen mit den Differentialoperatoren gründet, und verwende demgemäß nur einen vorläufigen Formenbegriff. Dieser ist bei einem funktionentheoretischen Ausbau der Theorie durch eine besondere Vorschrift über das Verhalten der Formen in den „Spitzen“ des Fundamentalbereichs der zugrunde liegenden Gruppe zu präzisieren. Es handelte sich zunächst einmal darum, die in¹⁾ eingeführten Differentialoperatoren K_α und Λ_β sinngemäß auf Formen n -ten Grades zu verallgemeinern. Das kann und muß auf zwei verschiedene Weisen geschehen entsprechend der Tatsache, daß die Operatoren zwei voneinander unabhängigen Aufgaben dienen: Einerseits sind aus K_α und Λ_β die Differentialgleichungen für die EISENSTEIN-Reihen abzuleiten, andererseits vermitteln K_α und Λ_β den Übergang zwischen EISENSTEIN-Reihen zu verschiedenen Gewichten. Es ist eine Besonderheit des Falles $n = 1$, daß hier K_α und Λ_β beides zugleich leisten. Da außer einer bescheidenen Analogie keine besonderen Anhaltspunkte vorlagen, so mußten die verallgemeinerten Operatoren zum Teil erraten, zum Teil errechnet werden. Überraschend war dabei, wie glatt sich die Operatorenrechnungen in den Matrizenkalkül einfügen.

Im folgenden seien $X = (x_{\mu\nu})$ und $Y = (y_{\mu\nu})$ n -reihige symmetrische Matrizen. Die Elemente $z_{\mu\nu}$ und $w_{\mu\nu}$ ($\mu \leq \nu$) der Matrizen $Z = X + i Y$ und $W = X - i Y$ können als unabhängige komplexe Variable angesehen werden. Im eigentlichen Operationsgebiet sind jedoch X, Y reell und $Y > 0$. Wir betrachten nun analog zum elliptischen Fall die EISENSTEIN-Reihen n -ten Grades

$$(1) \quad G(Z, W; \alpha, \beta) = \sum_{C, D} \gamma(C, D) |CZ + D|^{-\alpha} |CW + D|^{-\beta},$$

wobei C, D , etwa ein volles System nicht assoziierter teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare durchlaufen möge und

$$|CZ + D|^{-\alpha} = e^{-\alpha \log |CZ + D|}, \quad |CW + D|^{-\beta} = e^{-\beta \log |CW + D|}$$

¹⁾ MAASS, H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. 125, 235—263 (1953).

sei. Da die Mannigfaltigkeit $W = Z$, $Y > 0$ einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt, in welchem $|CZ + D|$ und $|CW + D|$ nicht verschwinden, so lassen sich die vieldeutigen analytischen Funktionen $\log|CZ + D|$ und $\log|CW + D|$ in $W = \bar{Z}$, $Y > 0$ eindeutig erklären und zwar so, daß

$$\log|CZ + D| + \log|CW + D| \quad \text{für } W = \bar{Z}$$

reell wird. Eine derartige Auswahl der Funktionszweige denken wir uns im folgenden irgendwie realisiert.

Es ist nicht zu erwarten, daß zur Kennzeichnung der Formen vom Typus (1) eine Differentialgleichung ausreicht; man wird hierzu vielmehr eines Systems von Differentialgleichungen bedürfen. Man erhält ein solches in folgender Weise: Es bezeichne $\delta_{\mu\nu}$ das KRONECKER-Symbol und E die n -reihige Einheitsmatrix. Mit $e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{\mu\nu})$ wird

$$(2) \quad D_z = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} \right), \quad D_w = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial w_{\mu\nu}} \right) \quad (1 \leq \mu, \nu \leq n)$$

und

$$(3) \quad K_z = \alpha E + (Z - W) D_z, \quad \Lambda_\beta = -\beta E + (Z - W) D_w$$

gesetzt. Sodann stellt

$$(4) \quad \Omega_{z\beta} = \Lambda_{\beta - \frac{n+1}{2}} K_z + \alpha \left(\beta - \frac{n+1}{2} \right) E$$

ein System von n^2 Differentialoperatoren zweiter Ordnung dar, welche die EISENSTEIN-Reihen (1) sämtlich annullieren. Wird die Transposition einer Matrix in der üblichen Weise durch einen hochgestellten Strich angezeigt, so gilt

$$(5) \quad \Omega_{z\beta} = (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z + \alpha (Z - W) D_w - \beta (Z - W) D_z.$$

Die Umrechnung des Operators $Y^{-1} \Omega_{z\beta}$ auf die Elemente von X, Y führt zugleich zu einer Zerlegung der Matrix in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Bestandteil. Demgemäß ist das Differentialgleichungssystem

$$(6) \quad \Omega_{z\beta} f = 0$$

mit dem System

$$(7) \quad \{(Y D_z)' D_x + (Y D_y)' D_y + i(\beta - \alpha) D_x + (\alpha + \beta) D_y\} f = 0, \\ \{(Y D_y)' D_x - (Y D_z)' D_y\} f = 0$$

äquivalent. Die Operatoren D_x und D_y sind hier analog zu D_z zu bilden. Es zeigt sich noch, daß $\Omega_{z\beta}$ und

$$(8) \quad \tilde{\Omega}_{z\beta} = K_{\alpha - \frac{n+1}{2}} \Lambda_\beta + \beta \left(\alpha - \frac{n+1}{2} \right) E$$

dieselben Funktionen annullieren. Invarianzuntersuchungen ergeben zudem den LAPLACE-BELTRAMISCHEN Differentialoperator für die symplektische Metrik in der Gestalt

$$(9) \quad \Delta = -\text{Sp} (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z.$$

Es sei (α, β) die Schar der in $W = \bar{Z}$, $Y > 0$ regulär-analytischen Funktionen $f(Z, W)$, die durch $\Omega_{\alpha, \beta}$ annulliert werden. Für symplektische Substitutionen $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und $f(Z, W) \in (\alpha, \beta)$ wird

$$(10) \quad f(Z, W) | \sigma = |CZ + D|^{-\alpha} |CW + D|^{-\beta} f(\sigma Z, \sigma W)$$

mit

$$(11) \quad \sigma Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad \sigma W = (AW + B)(CW + D)^{-1}$$

gesetzt. Die vorgenommenen Bildungen sind durch die Tatsache der Invarianz von (α, β) gegenüber symplektischen Substitutionen:

$$(12) \quad (\alpha, \beta) | \sigma = (\alpha, \beta)$$

hinreichend gerechtfertigt.

Es sei G eine Gruppe von symplektischen Substitutionen und $v(\sigma)$ ein für $\sigma \in G$ erklärtes Zahlensystem mit gewissen multiplikativen Eigenschaften. Unter der Formenschar $\{G; \alpha, \beta, v\}$ ist die Gesamtheit der Funktionen $f(Z, W)$ zu verstehen, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} 1. & \quad f(Z, W) \in (\alpha, \beta) \\ 2. & \quad f(Z, W) | \sigma = v(\sigma) f(Z, W) \end{aligned} \quad \text{für } \sigma \in G$$

genügen. Die Transformationsformel

$$(13) \quad \{G; \alpha, \beta, v\} | \sigma = \{\sigma^{-1} G \sigma; \alpha, \beta, v^\sigma\}$$

für eine beliebige symplektische Substitution σ ist unmittelbar zu prüfen. Dabei ist v^σ nach bestimmter Vorschrift aus v und σ abzuleiten.

Die Frage nach den funktionalen Beziehungen der Formenschar $\{G; \alpha, \beta, v\}$ zu den Scharen $\{G; \alpha \pm 1, \beta \mp 1, v\}$ kann anscheinend nur mit Hilfe von Differentialoperatoren n -ter Ordnung befriedigend beantwortet werden. Eine Behandlung dieses Problems ist durch die Formel

$$(14) \quad |D_z| |Z|^n = \alpha \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \cdots \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \right) |Z|^{n-1}$$

angeregt worden, die M. KÖCHER in seinen noch nicht publizierten funktionentheoretischen Untersuchungen über nicht-analytische Modulformen n -ten Grades angegeben hat. Herr KÖCHER war so freundlich, mir hiervon Kenntnis zu geben. Der entscheidende Schritt bestand nun in der Verallgemeinerung von (14) auf beliebige Unterdeterminanten von $|D_z|$ an Stelle von $|D_z|$. Die weiteren Bildungen waren dann einfach zu übersehen und führten schließlich zu folgender Konstruktion. Für beliebige Teilsysteme $1 \leq i_1 < \cdots < i_h \leq n$ und $1 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n$ sei

$$(15) \quad \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{pmatrix}_z = |z_{i_\mu k_\nu}| \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{bmatrix}_z = \left| e_{i_\mu k_\nu} \frac{\partial}{\partial z_{i_\mu k_\nu}} \right|.$$

Wird

$$(16) \quad s_h(Z - W, D_z) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_h \leq n}} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{pmatrix}_{Z-W} \begin{bmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{bmatrix}_z$$

für $h = 1, 2, \dots, n$ und

$$(17) \quad s_0(Z - W, D_z) = 1$$

sowie

$$(18) \quad \varepsilon_0(\alpha) = 1, \quad \varepsilon_h(\alpha) = \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\alpha - \frac{2}{2} \right) \cdots \left(\alpha - \frac{h-1}{2} \right) \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \dots$$

gesetzt, so erhält man in

$$(19) \quad M_\alpha = \sum_{h=0}^n \frac{\varepsilon_h(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)} s_h(Z - W, D_z)$$

einen Operator n -ter Ordnung, der auf die EISENSTEIN-Reihen die gewünschte Wirkung hat:

$$(20) \quad M_\alpha G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\alpha) G(Z, W; \alpha + 1, \beta - 1).$$

Mit dem durch

$$(21) \quad X f(Z, W) = f(-W, -Z)$$

erklärten Operator X bilden wir noch

$$(22) \quad N_\beta = X M_\beta X.$$

Als unmittelbare Folge von (20) ist dann

$$(23) \quad N_\beta G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\beta) G(Z, W; \alpha - 1, \beta + 1)$$

zu notieren. Damit ergibt sich auch

$$(24) \quad (N_{\beta-1} M_\alpha - \varepsilon_n(\alpha) \varepsilon_n(\beta - 1)) G(Z, W; \alpha, \beta) = 0,$$

$$(25) \quad (M_{\alpha-1} N_\beta - \varepsilon_n(\beta) \varepsilon_n(\alpha - 1)) G(Z, W; \alpha, \beta) = 0.$$

Die Vermutung liegt nahe, daß die in (20), (23), (24), (25) für die Schar der EISENSTEIN-Reihen ausgesprochenen Eigenschaften auch den allgemeinen Formenscharen $\{G; \alpha, \beta, v\}$ zukommen. Doch konnte ich dies bisher nur für $n = 2$ beweisen, wenn man vom Fall $n = 1$ absieht, der in ¹⁾ erledigt wurde. Es bleibt zu hoffen, daß man den Beweis bei etwas besserer Beherrschung des Operatorenkalküls auch für die Formen höheren Grades wird erbringen können. Für $n = 2$ gilt also

$$(26) \quad (N_{\beta-1} M_\alpha - \varepsilon_n(\alpha) \varepsilon_n(\beta - 1)) \{G; \alpha, \beta, v\} = 0,$$

$$(27) \quad (M_{\alpha-1} N_\beta - \varepsilon_n(\beta) \varepsilon_n(\alpha - 1)) \{G; \alpha, \beta, v\} = 0,$$

$$(28) \quad M_\alpha \{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha + 1, \beta - 1, v\},$$

$$(29) \quad N_\beta \{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha - 1, \beta + 1, v\}.$$

In den beiden letzten Relationen ist das Zeichen \subset durch $=$ zu ersetzen, wenn $\varepsilon_n(\alpha) \varepsilon_n(\beta - 1) \neq 0$ bzw. $\varepsilon_n(\beta) \varepsilon_n(\alpha - 1) \neq 0$ ist. Die durch M_α bzw. N_β vermittelte Abbildung von $\{G; \alpha, \beta, v\}$ ist dann umkehrbar eindeutig.

Das Problem der FOURIER-Entwicklung periodischer Formen bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Es genügt natürlich, die in $\{\alpha, \beta\}$ gelegenen Funktionen vom Typus

$$a(Y, T) e^{i \operatorname{Sp} T X}$$

zu ermitteln, wobei T eine beliebige n -reihige symmetrische reelle Matrix bezeichnet. Die lineare Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ der in Frage kommenden Funktionen $a(Y, T)$ ist durch ein System von Differentialgleichungen bestimmt, das sich aus (7) unmittelbar ergibt. Dieses System ist für den Fall $n = 2$ vollständig gelöst worden. Die Endlichkeit des Ranges der linearen Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ für

$T \neq 0$ ist wohl das wesentlichste Ergebnis der umfangreichen Rechnungen. Im einzelnen konnte im Fall $n = 2$ folgendes festgestellt werden: Es sei

$$(30) \quad Y = \sqrt{|Y|} \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) y^{-1} & x y^{-1} \\ x y^{-1} & y^{-1} \end{pmatrix}, \\ u = \operatorname{Sp} Y T, \quad v = (\operatorname{Sp} Y T)^2 - 4 |Y T|.$$

Dann gilt

1. für $T = 0$:

$$(31) \quad a(Y, 0) = \varphi(x, y) |Y|^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)} + c_1 |Y|^{\frac{3}{2}-\alpha-\beta} + c_2,$$

wobei $\varphi(x, y)$ eine beliebige für $y > 0$ reguläre Lösung der Wellengleichung

$$(32) \quad y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\varphi = 0$$

darstellt und c_1, c_2 willkürliche Konstanten bezeichnen. Die Fälle $\alpha + \beta = 1, \frac{3}{2}, 2$ erfordern geringfügige Modifikationen und sind hier auszuschließen.

2. für Rang $T = 1, T \geq 0$:

$$(33) \quad a(Y, T) = \varphi(u) |Y|^{\frac{3}{2}-\alpha-\beta} + \psi(u),$$

wobei $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ konfluente hypergeometrische Funktionen bezeichnen, die den Differentialgleichungen

$$(34) \quad \begin{aligned} u \varphi'' + (3 - \alpha - \beta) \varphi' + (\alpha - \beta - u) \varphi &= 0, \\ u \psi'' + (\alpha + \beta) \psi' + (\alpha - \beta - u) \psi &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ hat also den Rang 4. Wegen $\{\alpha, \beta; T\} = \{\beta, \alpha; -T\}$ ist die Voraussetzung $T \geq 0$ hier unwesentlich, doch muß $\alpha + \beta \neq \frac{3}{2}$ angenommen werden.

3. für $T > 0$:

$$(35) \quad a(Y, T) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r(u) v^r \quad (|v| < u^2).$$

Die Funktionen $g_r(u)$ sind hier rekursiv durch

$$(36) \quad 4(v+1)^2 u g_{v+1} + u g_v'' + 2(2v + \alpha + \beta) g_v' + (2(\alpha - \beta) - u) g_v = 0 \quad (v \geq 0)$$

$$(37) \quad \begin{aligned} g_0(u) &= u^{1-\alpha-\beta} \varphi(u), \quad \psi'(u) = \frac{1}{u} \varphi(u), \\ \psi'' &= \left(1 + \frac{2(\beta - \alpha)}{u} + \frac{(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)}{u^2} \right) \varphi \end{aligned}$$

bestimmt. Jede zulässige Funktion $g_0(u)$ führt zu einer in $Y > 0$ konvergenten Reihe. Die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ hat also den Rang 3.

4. für Rang $T = 2, T$ indefinit:

$$(38) \quad a(Y, T) = \sum_{r=0}^{\infty} h_r(v) u^r \quad (u^2 < v).$$

Die Funktionen $h_r(v)$ sind hier ebenfalls rekursiv zu berechnen. Es gelten die Formeln

$$(39) \quad (v+2)(v+1) h_{v+2} + 4v h_v'' + 4(\alpha + \beta + v) h_v' - h_v = 0 \quad (v \geq 0)$$

$$(40) \quad \begin{aligned} &8v^2 h_0'' + 4(2 + 3\alpha + 3\beta) v h_0' + \\ &+ (4(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta - 1) - 2v) h_0' - (\alpha + \beta) h_0 = (\alpha - \beta) h_1, \\ &2v h_1' + (\alpha + \beta) h_1 = (\beta - \alpha) h_0. \end{aligned}$$

Jede Lösung h_0, h_1 des Systems (40) führt zu einer in $Y > 0$ konvergenten Reihe. Mithin hat die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ den Rang 4.

Es wäre wünschenswert, etwas über das asymptotische Verhalten der Funktionen (35) und (38) bei Annäherung an den Rand des Bereiches $Y > 0$ zu erfahren.

§ 1. Die Operatoren K_α und Λ_β .

Das Ziel der ersten Betrachtungen ist der Nachweis, daß die EISENSTEIN-Reihen (1) den Differentialgleichungen

$$(41) \quad \Omega_{\alpha\beta} G(Z, W; \alpha, \beta) = 0$$

genügen, wobei $\Omega_{\alpha\beta}$ durch (4) erklärt ist. Es genügt natürlich zu zeigen, daß $\Omega_{\alpha\beta}$ das allgemeine Glied $|CZ + D|^{-\alpha} |CW + D|^{-\beta}$ annulliert. Für C, D ist hier die zweite Matrizenzeile einer beliebigen symplektischen Substitution zu nehmen. Da die Paare C, D mit $|C| = 0$ eine Mannigfaltigkeit niedriger Dimension bilden, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $|C| \neq 0$ voraussetzen. Ziehen wir aus dem allgemeinen Glied den Faktor $|C|^{-\alpha-\beta}$ heraus, so bleibt $|Z + S|^{-\alpha} |W + S|^{-\beta}$ mit $S = C^{-1}D$ übrig. Andererseits ist der Operator $\Omega_{\alpha\beta}$ gegenüber der Substitution $Z \rightarrow Z + S, W \rightarrow W + S$ invariant, so daß nur noch

$$(42) \quad \Omega_{\alpha\beta} |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = 0$$

bewiesen zu werden braucht.

Wir bestimmen zunächst zwei Operatorenhilfsformeln:

$$(43) \quad \begin{aligned} D_w(Z - W) &= -\frac{n+1}{2} E + ((Z - W) D_w)', \\ D_z(Z - W) &= \frac{n+1}{2} E + ((Z - W) D_z)'. \end{aligned}$$

Eine einfache Umformung ergibt in der Tat

$$\begin{aligned} D_w(Z - W) &= \left(\sum_{\varrho=1}^n e_{\mu\varrho} \frac{\partial}{\partial w_{\mu\varrho}} (z_{\varrho\nu} - w_{\varrho\nu}) \right) \\ &= \left(\sum_{\varrho=1}^n (z_{\mu\varrho} - w_{\mu\varrho}) e_{\varrho\nu} \frac{\partial}{\partial w_{\varrho\nu}} \right)' - \left(\delta_{\mu\nu} \sum_{\varrho=1}^n e_{\mu\varrho} \right) \\ &= ((Z - W) D_w)' - \frac{n+1}{2} E. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von Z mit W erhält man die zweite Formel. Es folgt nun

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \left\{ -\left(\beta - \frac{n+1}{2} \right) E + (Z - W) D_w \right\} \{ \alpha E + (Z - W) D_z \} + \alpha \left(\beta - \frac{n+1}{2} \right) E \\ &= (Z - W) D_w (Z - W) D_z + \alpha (Z - W) D_w - \left(\beta - \frac{n+1}{2} \right) (Z - W) D_z \\ &= (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z + \alpha (Z - W) D_w - \beta (Z - W) D_z \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} &= \left\{ \left(\alpha - \frac{n+1}{2} \right) E + (Z - W) D_z \right\} \{ -\beta E + (Z - W) D_w \} + \beta \left(\alpha - \frac{n+1}{2} \right) E \\ &= (Z - W) ((Z - W) D_z)' D_w + \alpha (Z - W) D_w - \beta (Z - W) D_z. \end{aligned}$$

Es sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine quadratische Matrix mit Elementen aus einem kommutativen Ring und $A_{\mu\nu}$ das algebraische Komplement zu $a_{\mu\nu}$. Allgemein werde dann $A^* = (A_{\nu\mu})$ gesetzt, so daß $A A^* = |A| E$ gilt. Man bestätigt sofort

$$(44) \quad D_x |Z|^{-\alpha} = -\alpha |Z|^{-\alpha-1} Z^*.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (Z - W)^{-1} \Omega_{\alpha\beta} |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} \\ = -\alpha \beta |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta-1} W^* + \alpha \beta |Z|^{-\alpha-1} |W|^{-\beta} Z^* - \\ - \alpha |Z|^{-\alpha-1} ((Z - W) D_w |W|^{-\beta})' Z^* \\ = -\alpha \beta |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta-1} W^* + \alpha \beta |Z|^{-\alpha-1} |W|^{-\beta} Z^* + \\ + \alpha \beta |Z|^{-\alpha-1} |W|^{-\beta-1} W^* (Z - W) Z^* = 0. \end{aligned}$$

Die Beziehungen (42) und (41) sind nunmehr bewiesen. Da die Matrizen $((Z - W) D_w)' D_x$ und $((Z - W) D_x)' D_w$ durch Transposition auseinander hervorgehen, so folgt noch

$$(45) \quad \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = (Z - W) ((Z - W)^{-1} \Omega_{\alpha\beta})'.$$

Die Operatoren $\Omega_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$ annullieren demnach dieselben Funktionen. Die Umrechnung des Operators $\Omega_{\alpha\beta}$ auf die Elemente von X und Y ist mit Hilfe von

$$(46) \quad D_x = \frac{1}{2} (D_x - i D_y), \quad D_w = \frac{1}{2} (D_x + i D_y)$$

auszuführen:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} = & -Y (Y (D_x + i D_y))' (D_x - i D_y) + i \alpha Y (D_x + i D_y) - i \beta Y (D_x - i D_y), \\ Y^{-1} \Omega_{\alpha\beta} = & - (Y D_x)' D_x - (Y D_y)' D_y + i (\alpha - \beta) D_x - (\alpha + \beta) D_y + \\ & + i (Y D_x)' D_y - i (Y D_y)' D_x. \end{aligned}$$

Die ersten vier Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung sind symmetrisch, die letzten beiden schiefsymmetrisch. Die Differentialgleichungssysteme (6) und (7) sind daher gleichwertig.

Wir untersuchen nun die Transformationseigenschaften der eingeführten Operatoren bei symplektischen Substitutionen:

$$(47) \quad \hat{Z} = (A Z + B) (C Z + D)^{-1}, \quad \hat{W} = (A W + B) (C W + D)^{-1}.$$

Bekanntlich ist

$$(48) \quad \hat{Z} - \hat{W} = (Z C' + D')^{-1} (Z - W) (C W + D)^{-1} = (W C' + D')^{-1} (Z - W) (C Z + D)^{-1}$$

und

$$(49) \quad d \hat{Z} = (Z C' + D')^{-1} d Z (C Z + D)^{-1}, \quad d \hat{W} = (W C' + D')^{-1} d W (C W + D)^{-1}$$

Das vollständige Differential einer Funktion $f = f(Z, W)$ ist in der Form

$$df = \text{Sp} (d Z D_x f) + \text{Sp} (d W D_w f)$$

darstellbar. Die Transformationsinvarianz dieses Ausdrucks hat

$$\text{Sp} (d \hat{Z} D_{\hat{z}} f) = \text{Sp} (d Z D_x f), \quad \text{Sp} (d \hat{W} D_{\hat{w}} f) = \text{Sp} (d W D_w f)$$

zur Folge. Andererseits ist

$$\text{Sp} (d \hat{Z} D_{\hat{z}} f) = \text{Sp} \{d Z (C Z + D)^{-1} (D_{\hat{z}} f) (Z C' + D')^{-1}\},$$

$$\text{Sp} (d \hat{W} D_{\hat{w}} f) = \text{Sp} \{d W (C W + D)^{-1} (D_{\hat{w}} f) (W C' + D')^{-1}\},$$

mithin

$$(CZ + D)^{-1} (D_{\hat{z}} f) (ZC' + D')^{-1} = D_z f,$$

$$(CW + D)^{-1} (D_{\hat{w}} f) (WC' + D')^{-1} = D_w f.$$

Hieraus ergeben sich die Operatorengleichungen

$$(50) \quad D_{\hat{z}} = (CZ + D) ((CZ + D) D_z)', \quad D_{\hat{w}} = (CW + D) ((CW + D) D_w)'. \quad D_w f.$$

Beim Beweis der Invarianz des Operators

$$\Delta = -\operatorname{Sp} (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z$$

gegenüber symplektischen Substitutionen sind folgende allgemeine Regeln zu beachten: Es seien M_1, M_2, M_3 n -reihige quadratische Matrizen. Die Elemente von M_1 seien mit denen von M_2 vertauschbar. Dann ist

$$(51) \quad \operatorname{Sp} M_1 M_2 = \operatorname{Sp} M_2 M_1,$$

$$(52) \quad (M_1 M_2)' = M_2' M_1',$$

$$(53) \quad (M_1 (M_2 M_3)')' = M_2 (M_1 M_3)'. \quad (M_1 M_2 M_3)'$$

Geht Δ bei der Substitution $Z, W \rightarrow \hat{Z}, \hat{W}$ in $\hat{\Delta}$ über und bezeichnet $f = f(Z, W)$ eine willkürliche Funktion, so gilt also

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} f &= -\operatorname{Sp} (\hat{Z} - \hat{W}) ((\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{w}})' (D_{\hat{z}} f) \\ &= -\operatorname{Sp} [(ZC' + D')^{-1} (Z - W) (CW + D)^{-1} \times \\ &\quad \times \{(ZC' + D')^{-1} (Z - W) ((CW + D) D_w)' (CZ + D) (D_z f) (ZC' + D')\}]. \end{aligned}$$

Die äußeren Faktoren $(ZC' + D')^{-1}$ und $(ZC' + D')$ in der eckigen Klammer fallen nach (51) heraus. Der Faktor $(ZC' + D')^{-1}$ in der geschweiften Klammer fällt mit dem rechten Faktor $(CZ + D)$ der geschweiften Klammer heraus wenn man auf diese (52) anwendet. Es bleibt dann

$$\hat{\Delta} f = -\operatorname{Sp} [(Z - W) (CW + D)^{-1} \{(Z - W) ((CW + D) D_w)' (D_z f)\}].$$

Dies ist mit Hilfe von (53) in Δf überzuführen. Damit ist $\hat{\Delta} = \Delta$ bewiesen. Um die Übereinstimmung von Δ mit dem LAPLACE-BELTRAMISchen Operator zu prüfen, genügt es wegen des Invarianzcharakters beider Operatoren, wenn wir uns auf die Stelle $Z = -W = iE$ beschränken. In diesem Punkt führen wir das bezüglich der symplektischen Metrik [s. 2)] geodätische Koordinatensystem

$$(54) \quad \tilde{Z} = (Z - iE) (Z + iE)^{-1}, \quad \tilde{W} = (W + iE) (W - iE)^{-1}$$

ein. Analog zu (50) gilt

$$(55) \quad D_z = -\frac{i}{2} (\tilde{Z} - E) ((\tilde{Z} - E) D_{\tilde{z}})', \quad D_w = \frac{i}{2} (\tilde{W} - E) ((\tilde{W} - E) D_{\tilde{w}})'. \quad D_{\tilde{z}} f, D_{\tilde{w}} f.$$

Mit der angegebenen Methode erhält man sodann

$$(56) \quad \Delta = \operatorname{Sp} (E - \tilde{Z} \tilde{W}) ((E - \tilde{Z} \tilde{W}) D_{\tilde{w}})' D_{\tilde{z}}.$$

Setzt man hierin $\tilde{Z} = \tilde{W} = O$ und bestimmt man an dieser Stelle den LAPLACE-BELTRAMISchen Operator, wofür nur die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform

$$ds^2 = 4 \operatorname{Sp} d\tilde{Z} (E - \tilde{W} \tilde{Z})^{-1} d\tilde{W} (E - \tilde{Z} \tilde{W})^{-1}$$

²⁾ SIEGEL, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. 65, 1-86 (1943).

an der betreffenden Stelle benötigt werden, so erhält man dieselben Operatoren. Damit ist schließlich gezeigt, daß Δ überhaupt mit dem LAPLACE-BELTRAMISCHEN Operator identisch ist.

Die Transformationsformel für den Operator $\Omega_{\alpha\beta}$ erfordert längere Rechnungen. Entsteht $\hat{\Omega}_{\alpha\beta}$ aus $\Omega_{\alpha\beta}$ durch Ersetzen von Z, W durch \hat{Z}, \hat{W} , so gilt

$$(57) \quad |CZ + D|^{-\alpha} |CW + D|^{-\beta} \hat{\Omega}_{\alpha\beta} |CZ + D|^{\alpha} |CW + D|^{\beta} \\ = (ZC' + D')^{-1} ((CZ + D)\Omega'_{\alpha\beta})'.$$

Der Beweis für diese Operatorengleichung wird zweckmäßig in mehreren Schritten geführt. Gilt die Transformationsformel (57) für zwei symplektische Substitutionen, dann ist sie auch für das Produkt richtig. Das ist relativ einfach einzusehen, so daß wir hierauf nicht einzugehen brauchen. Es genügt also, die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} E & S \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U' & O \\ O & U^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}$$

zu betrachten, aus denen die symplektische Gruppe bekanntlich erzeugt werden kann. Im Falle $\hat{Z} = Z + S, \hat{W} = W + S$ wird $\hat{\Omega}_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}$ behauptet. e Das ist evident. Wir wenden uns dem zweiten Fall

$$\hat{Z} = U'ZU, \hat{W} = U'WU$$

zu. Mit Hilfe von (50) ergibt sich sofort

$$\hat{\Omega}_{\alpha\beta} = \alpha(\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{W}} - \beta(\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{Z}} + (\hat{Z} - \hat{W}) ((\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{W}})' D_{\hat{Z}} \\ = U' \{ \alpha(Z - W) D_W - \beta(Z - W) D_Z + (Z - W) ((Z - W) D_W)' D_Z \} U'^{-1} \\ = U' \Omega_{\alpha\beta} U'^{-1} = U'(U^{-1} \Omega'_{\alpha\beta})',$$

also (57). Im dritten Fall

$$\hat{Z} = -Z^{-1}, \hat{W} = -W^{-1}$$

erhalten wir

$$\hat{\Omega}_{\alpha\beta} = \alpha(\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{W}} - \beta(\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{Z}} + (\hat{Z} - \hat{W}) ((\hat{Z} - \hat{W}) D_{\hat{W}})' D_{\hat{Z}} \\ = \alpha Z^{-1}(Z - W) (W D_W)' - \beta W^{-1}(Z - W) (Z D_Z)' + \\ + Z^{-1}(Z - W) W^{-1} \{ Z^{-1}(Z - W) (W D_W)' \}' Z (Z D_Z)'$$

oder, wenn noch

$$W^{-1} \{ Z^{-1}(Z - W) (W D_W)' \}' Z = \{ Z^{-1}(Z - W) D_W \}' Z = ((Z - W) D_W)'$$

beachtet wird,

$$\hat{\Omega}_{\alpha\beta} = \alpha Z^{-1}(Z - W) (W D_W)' - \beta W^{-1}(Z - W) (Z D_Z)' + \\ + Z^{-1}(Z - W) ((Z - W) D_W)' (Z D_Z)'.$$

Mit

$$(Z D_Z)' |Z|^{\alpha} = |Z|^{\alpha} (Z D_Z)' + \alpha |Z|^{\alpha} E, \\ (W D_W)' |W|^{\beta} = |W|^{\beta} (W D_W)' + \beta |W|^{\beta} E$$

ergibt sich nun

$$\alpha Z^{-1}(Z - W) (W D_W)' |Z|^{\alpha} |W|^{\beta} \\ = \alpha |Z|^{\alpha} |W|^{\beta} Z^{-1}(Z - W) (W D_W)' + \alpha \beta |Z|^{\alpha} |W|^{\beta} Z^{-1}(Z - W), \\ \beta W^{-1}(Z - W) (Z D_Z)' |Z|^{\alpha} |W|^{\beta} \\ = \beta |Z|^{\alpha} |W|^{\beta} W^{-1}(Z - W) (Z D_Z)' + \alpha \beta |Z|^{\alpha} |W|^{\beta} W^{-1}(Z - W)$$

sowie

$$\begin{aligned} Z^{-1}(Z-W)((Z-W)D_w)'(ZD_z)'|Z|^\alpha|W|^\beta \\ = Z^{-1}(Z-W)((Z-W)D_w)'(|Z|^\alpha|W|^\beta(ZD_z)' + \alpha|Z|^\alpha|W|^\beta E) \\ = |Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)((Z-W)D_w)'(ZD_z)' + \\ + \beta|Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)W^*(Z-W)(ZD_z)' + \\ + \alpha|Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)((Z-W)D_w)' + \\ + \alpha\beta|Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)W^*(Z-W). \end{aligned}$$

Nach geeigneter Zusammenfassung resultiert

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{\alpha\beta}|Z|^\alpha|W|^\beta &= \alpha|Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)(ZD_w)' - \\ &- \beta|Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)(ZD_z)' + |Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z-W)((Z-W)D_w)'(ZD_z)' \\ &= |Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}\{\alpha(Z-W)(ZD_w)' - \beta(Z-W)(ZD_z)' + \\ &\quad + (Z-W)((Z-W)D_w)'(ZD_z)'\} \\ &= |Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}[\alpha Z((Z-W)D_w)' - \beta Z((Z-W)D_z)' + \\ &\quad + Z\{(Z-W)((Z-W)D_w)'(ZD_z)'\}] \\ &= |Z|^\alpha|W|^\beta Z^{-1}(Z\Omega'_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Damit ist (57) für ein Erzeugendensystem der symplektischen Gruppe, also allgemein bewiesen. σ bezeichne die Substitution $Z, W \rightarrow \hat{Z}, \hat{W}$. Wir wenden den Operator (57) auf $f(Z, W)|\sigma$ an, wobei $f(Z, W)$ der Schar $\{\alpha, \beta\}$ angehöre. Wegen $\hat{\Omega}_{\alpha\beta}f(\hat{Z}, \hat{W}) = 0$ folgt dann $\Omega_{\alpha\beta}(f(Z, W)|\sigma) = 0$. Es gilt also $\{\alpha, \beta\} \sigma \subset \{\alpha, \beta\}$. Wird hierin σ durch σ^{-1} ersetzt, so ergibt sich schließlich

$$(58) \quad \{\alpha, \beta\}|\sigma = \{\alpha, \beta\}.$$

Wir bestimmen noch die Wirkung der symplektischen Substitutionen σ auf die Formenscharen $\{G; \alpha, \beta, v\}$. Das Multiplikatorsystem v genügt gewissen Bedingungen, die hier kurz genannt werden sollen. Es seien

$$\sigma_v = \begin{pmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{pmatrix} \quad (v = 1, 2, 3)$$

gegebene symplektische Substitutionen, dabei $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_3$. Bei geeigneter Festlegung der Funktionszweige [vgl. hierzu ¹⁾] ist dann

$$(59) \quad \begin{aligned} |C_1 \sigma_2(Z) + D_1|^\alpha |C_1 \sigma_2(W) + D_1|^\beta |C_2 Z + D_2|^\alpha |C_2 W + D_2|^\beta \\ = \eta(\sigma_1, \sigma_2) |C_3 Z + D_3|^\alpha |C_3 W + D_3|^\beta \end{aligned}$$

mit gewissen Faktoren

$$\eta(\sigma_1, \sigma_2) = \eta^{(\alpha-\beta)}(\sigma_1, \sigma_2).$$

In der üblichen Weise ist nun

$$(60) \quad \eta(\sigma_1, \sigma_2)(f|\sigma_1)|\sigma_2 = f|\sigma_1 \sigma_2$$

für $f \in \{\alpha, \beta\}$ beweisbar, außerdem

$$(61) \quad v(\sigma_1 \sigma_2) = \eta(\sigma_1, \sigma_2) v(\sigma_1) v(\sigma_2) \quad \text{für } \sigma_1, \sigma_2 \in G,$$

falls in $\{G; \alpha, \beta, v\}$ eine nicht identisch verschwindende Form f liegt. Wir setzen voraus, daß (61) stets erfüllt ist. Berücksichtigen wir (58), so folgt mit (60) leicht

$$(62) \quad \{G; \alpha, \beta, v\}|\sigma = \{\sigma^{-1} G \sigma; \alpha, \beta, v^\sigma\}.$$

wenn v^σ durch

$$(63) \quad v^\sigma(\varrho) = \frac{\eta(\sigma \varrho \sigma^{-1}, \sigma)}{\eta(\sigma, \varrho)} v(\sigma \varrho \sigma^{-1}) \quad \text{für } \varrho \in \sigma^{-1} G \sigma$$

erklärt wird.

§ 2. Die Operatoren M_α und N_β .

Für die Unterdeterminanten von $|Z|$ und $|D_z|$ verwenden wir die durch (15) eingeführten Bezeichnungen. Außerdem sei

$$\left(\begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{smallmatrix} \right)_z \text{ das algebraische Komplement zu } \left(\begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{smallmatrix} \right)_z.$$

Es unterscheidet sich von der Unterdeterminante, die aus $|Z|$ durch Streichen der Zeilen und Spalten mit den Indices i_1, \dots, i_h bzw. k_1, \dots, k_h entsteht, um das Vorzeichen $(-1)^{i_1+\dots+i_h+k_1+\dots+k_h}$. Im Falle $h=n$ soll das algebraische Komplement den Wert 1 haben. Die Verallgemeinerung der von KÖCHER gefundenen Formel (14) lautet dann

$$(64) \quad \left[\begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{smallmatrix} \right]_z |Z|^\alpha = \alpha \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \cdots \left(\alpha + \frac{h-1}{2} \right) |Z|^{\alpha-1} \left(\begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{smallmatrix} \right)_z.$$

Sie läßt sich durch vollständige Induktion nach h beweisen. Für $h=1$ erkennt man sofort die Richtigkeit der Behauptung. Der allgemeine Schritt von $h-1$ nach h erfordert zahlreiche Determinantenumformungen, die hier nur skizziert werden können. Das Verfahren ist deswegen etwas umständlich, weil diejenigen Indices, die in den Zahlenreihen i_1, \dots, i_h und k_1, \dots, k_h gleichzeitig vorkommen, aus beweistechnischen Gründen in besonderer Weise ausgezeichnet werden müssen und weil der Nachweis gewisser Identitäten eine weitgehende Zerlegung der auftretenden Determinanten erfordert.

Es sei c_1, \dots, c_q das System der gemeinsamen Ziffern in den Zahlenreihen i_1, \dots, i_h und k_1, \dots, k_h . Von der Reihenfolge abgesehen seien

$$\begin{array}{ll} a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q & \text{mit } i_1, \dots, i_h \\ \text{und} & \\ b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q & \text{mit } k_1, \dots, k_h \end{array}$$

identisch. Schließlich sei

$$a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_r$$

das System aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ; es ist also $2p+q+r=n$. Wir verwenden nun die genaueren Bezeichnungen

$$\left[\begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{smallmatrix} \right]_z = \left[\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{smallmatrix} \right], \quad \left(\begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_h \\ k_1, \dots, k_h \end{smallmatrix} \right)_z = \left(\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{smallmatrix} \right).$$

Ersetzt man jedes Element z_{ik} durch sein algebraisches Komplement, so gehe

$$\left(\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{smallmatrix} \right) \quad \text{in} \quad \left\{ \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{smallmatrix} \right\}$$

über. Nach einer bekannten Regel ist dann

$$\begin{aligned} \overbrace{(i_1, \dots, i_h)}^{k_1, \dots, k_h}_z &= (-1)^{a_1 + \dots + a_p + b_1 + \dots + b_p} \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_p \\ d_1, \dots, d_r \\ a_1, \dots, a_p \end{pmatrix} \\ &= |Z|^{1-p-q} \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß (64) in

$$(65) \quad \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix} |Z|^\alpha = v_{p+q}(\alpha) |Z|^{\alpha-p-q} \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix}$$

mit

$$v_h(\alpha) = \alpha \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \cdots \left(\alpha + \frac{h-1}{2} \right)$$

übergeht. Zu einem Ansatz für die Induktion kommen wir nun, wenn wir die $(p+q)$ -reihige Operatordeterminante auf der linken Seite von (65) nach den Elementen irgendeiner Zeile entwickeln und wenn wir sämtliche $p+q$ Entwicklungen dieser Art addieren; letzteres geschieht nur, um Fallunterscheidungen zu vermeiden. Wendet man (65) auf die $(p+q-1)$ -reihigen Unterdeterminanten an, die bei diesem Prozeß erscheinen, so ergibt sich nach einer längeren Rechnung für

$$(p+q) \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix} |Z|^\alpha$$

eine Zerlegung in mehrere ein- und zweifache Summen, die sich mit einer Ausnahme alle zu der mit einem gewissen Faktor versehenen Determinante

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix}$$

zusammenfügen. Das endgültige Resultat lautet

$$\begin{aligned} (66) \quad (p+q) \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix} |Z|^\alpha &= -\frac{1}{2} v_{p+q-1}(\alpha) |Z|^{\alpha-p-q} \Phi + \\ &+ \left(\frac{q(q+1)}{2} + p q + \frac{p^2}{2} + (\alpha-1)(p+q) \right) v_{p+q-1}(\alpha) |Z|^{\alpha-p-q} \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (67) \quad \Phi &= \sum_{\mu, \nu=1}^p (-1)^{\mu+\nu} (a_\mu | b_1, \dots, b_p) (b_\nu | a_1, \dots, a_p) \times \\ &\times \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \dots, a_p, b_\nu \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_{\nu-1}, b_{\nu+1}, \dots, b_p, a_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei allgemein

$$(68) \quad (a | b_1, \dots, b_p) = (-1)^\sigma$$

gesetzt wird, wenn es unter den b_i genau σ Zahlen gibt, die kleiner als a sind.

Aus der Formel (66) ergibt sich sofort (65), wenn

$$(69) \quad \Phi = -p \begin{Bmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{Bmatrix}$$

bewiesen ist. Die Differentiationsformel (65) ist damit auf die Identität (69) zurückgeführt. Wir beweisen (69) durch vollständige Induktion nach $p+q$. Für $p=0$ oder 1 ist (69) offenbar richtig. Sei also $p>1$. Dann kommen in den Determinanten, aus denen sich Φ zusammensetzt, Elemente vor, die auf der rechten Seite von (69) nicht erscheinen. Man hat zunächst zu zeigen, daß sich diese Glieder in Φ gegenseitig aufheben. Zu dem Zweck entwickelt man die zu μ, ν gehörige Determinante in Φ nach den Elementen der b_ν -ten Zeile und der a_μ -ten Spalte, sodann hat man die einzelnen Bestandteile von Φ wieder geeignet zusammenzufassen und die Symmetrie der z_{ik} zu beachten. Φ ändert sich also nicht, wenn man diejenigen Elemente durch 0 ersetzt, die auf der rechten Seite von (69) nicht vorkommen. Weiter ist zu beachten, daß beide Seiten der Gl. (69) von den Elementen

$$(70) \quad z_{a_\mu c_\nu}, \quad z_{c_\mu b_\nu}, \quad z_{a_\mu b_\nu}$$

jeweils nur linear abhängen. Nimmt man nun (69) für $(p+q-1)$ -reihige Determinanten als richtig an, so läßt sich zeigen, daß jede der Variablen (70) auf beiden Seiten von (69) jeweils mit demselben Faktor versehen erscheint, so daß also

$$(71) \quad \Phi + p \begin{Bmatrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \\ b_1, \dots, b_p \end{Bmatrix}$$

von den Elementen (70) unabhängig ist. Der Ausdruck (71) ändert sich also nicht, wenn man

$$z_{a_\mu c_\nu} = z_{c_\mu b_\nu} = z_{a_\mu b_\nu} = z_{a_\mu a_\nu} = z_{b_\mu b_\nu} = 0$$

setzt. Andererseits verschwinden bei dieser Spezialisierung alle Determinanten, aus denen (71) gebildet ist. Mithin ist der Ausdruck (71) identisch gleich 0 , q. e. d.

Wir verwenden (64) mit $-\alpha$ an Stelle von α , um die Wirkung des durch (16) erklärten Operators $s_h(Z-W, D_z)$ auf $|Z|^{-\alpha}$ zu bestimmen. Man erhält

$$s_h(Z-W, D_z)|Z|^{-\alpha} = (-1)^h \varepsilon_h(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n} D_{i_1 i_2 \dots i_h}$$

mit

$$D_{i_1 i_2 \dots i_h} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_h \leq n} \binom{i_1, \dots, i_h}{k_1, \dots, k_h}_{Z-W} \binom{i_1, \dots, i_h}{k_1, \dots, k_h}_Z.$$

Auf Grund des LAPLACESchen Zerlegungssatzes ist $D_{i_1 i_2 \dots i_h}$ mit der n -reihigen Determinante identisch, die aus $|Z|$ hervorgeht, wenn man hierin die Zeilen mit den Indices i_1, i_2, \dots, i_h durch die entsprechenden Zeilen in $|Z-W|$ ersetzt. Demgemäß kann $D_{i_1 i_2 \dots i_h}$ additiv in 2^h Determinanten zerlegt werden, so daß — vom Vorzeichen abgesehen — jede Zeile entweder eine Zeile von $|Z|$ oder $|W|$ ist. $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_r}$ bezeichne die Determinante, die aus $|Z|$

entsteht, wenn man die Zeilen mit den Indices j_1, j_2, \dots, j_r durch die entsprechenden Zeilen in $|W|$ ersetzt. Lassen wir bei festem h die Ziffern $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n$ alle möglichen Systeme durchlaufen, so tritt in den additiven Zerlegungen der Determinanten $D_{i_1 i_2 \dots i_h}$ eine feste Determinante $A_{j_1 j_2 \dots j_r}$ insgesamt $\binom{n-r}{h-r}$ mal auf und zwar mit dem Vorzeichen $(-1)^r$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n} D_{i_1 i_2 \dots i_h} &= \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (-1)^r \binom{n-r}{h-r} A_{j_1 j_2 \dots j_r} \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n-r}{h-r} A_r \end{aligned}$$

mit

$$A_r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} A_{j_1 j_2 \dots j_r} \quad \text{für } r > 0 \text{ und } A_0 = |Z|.$$

Wegen $A_n = |W|$ ist also

$$\begin{aligned} M_\alpha |Z|^\alpha &= \sum_{h=0}^n \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)} s_h(Z-W, D_Z) |Z|^{-\alpha} \\ &= \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{r=0}^h (-1)^r \binom{n-r}{h-r} A_r \\ &= \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} \sum_{r=0}^n \left(\sum_{h=r}^n (-1)^{h-r} \binom{n-r}{h-r} \right) A_r \\ &= \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} |W| \end{aligned}$$

oder etwas allgemeiner

$$(72) \quad M_\alpha |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} |W|^{-\beta+1}.$$

Ähnlich wie beim Beweis von (41) ergibt sich hieraus sofort

$$(73) \quad M_\alpha G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\alpha) G(Z, W; \alpha+1, \beta-1).$$

Mit den durch (21) und (22) erklärten Operatoren folgt noch

$$\begin{aligned} N_\beta |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} &= X M_\beta X |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = X M_\beta |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} \\ &= \varepsilon_n(\beta) X |Z|^{-\alpha+1} |W|^{-\beta-1} = \varepsilon_n(\beta) |Z|^{-\alpha+1} |W|^{-\beta-1} \end{aligned}$$

und damit auch

$$(74) \quad N_\beta G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\beta) G(Z, W; \alpha-1, \beta+1).$$

Das Differentialgleichungssystem (7) ist offenbar invariant gegenüber der Substitution $X \rightarrow -X$, wenn man zugleich α mit β vertauscht. Diese Tatsache kommt in

$$(75) \quad X \{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$$

zum Ausdruck. Es folgt dann auch leicht

$$(76) \quad X \{G; \alpha, \beta, v\} = \{G^*; \beta, \alpha, v^*\}$$

mit

$$G^* = \iota G \iota^{-1}, \quad v^*(\sigma) = v(\iota \sigma \iota^{-1}) u(\iota \sigma \iota^{-1}),$$

wobei $\iota = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}$ ist und $u(\sigma)$ ein gewisses von v unabhängiges Faktorensystem bezeichnet, das von der Auswahl der Funktionszweige $\log |CZ + D|$,

$\log|CW+D|$ wesentlich abhängt. Beim Beweis von (76) ist von der allgemeinen Transformationsformel

$$(\mathbf{X}f(Z, W))|_{\sigma} = u(\iota \sigma \iota^{-1}) \mathbf{X}(f(Z, W))|_{\iota \sigma \iota^{-1}}$$

Gebrauch zu machen. Im Falle $n=1$ ergibt sich, wenn man die Hauptwerte

$$\log(cz+d) = \log|cz+d| + i \arg(cz+d), \quad -\pi < \arg(cz+d) \leq \pi,$$

$$\log(cw+d) = \log|cw+d| + i \arg(cw+d), \quad -\pi \leq \arg(cw+d) < \pi,$$

zugrunde legt, das Faktorensystem

$$u \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{für } c \neq 0, \\ e^{(\alpha-\beta)i\pi(1-\operatorname{sgn} d)} & \text{für } c = 0^2. \end{cases}$$

Wir zeigen noch, daß (27) aus (26) folgt, auch wenn n beliebig ist. Wendet man auf die Relation

$$(\mathbf{N}_{\beta-1} \mathbf{M}_\alpha - \varepsilon_n(\alpha) \varepsilon_n(\beta-1)) \{G; \alpha, \beta, v\} = 0$$

den Operator \mathbf{X} an, so ergibt sich wegen (76) und $\mathbf{N}_{\beta-1} = \mathbf{X} \mathbf{M}_{\beta-1} \mathbf{X}$ sofort

$$(\mathbf{M}_{\beta-1} \mathbf{N}_\alpha - \varepsilon_n(\alpha) \varepsilon_n(\beta-1)) \{G^*; \beta, \alpha, v^*\} = 0.$$

Ersetzt man hierin G^*, v^* durch G, v und vertauscht man außerdem α mit β , so erhält man in der Tat

$$(\mathbf{M}_{\alpha-1} \mathbf{N}_\beta - \varepsilon_n(\beta) \varepsilon_n(\alpha-1)) \{G; \alpha, \beta, v\} = 0.$$

Analog folgt (29) aus (28), ebenfalls für beliebiges n . Aus der Definition von \mathbf{N}_β geht übrigens hervor, daß der Operator in der Form

$$(77) \quad \mathbf{N}_\beta = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{\varepsilon_n(\beta)}{\varepsilon_\lambda(\beta)} s_\lambda(Z-W, D_w)$$

darzustellen ist.

Wir beweisen nun die Relationen (26) und (28). Dabei machen wir die Voraussetzung $n=2$, die wir bis zum Ende des Paragraphen beibehalten. Um Indices einzusparen, werde

$$(78) \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_0 & w_1 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

gesetzt. Ferner sei

$$(79) \quad (Z-W)^{-1} \Omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Die Relation

$$(80) \quad (\mathbf{N}_{\beta-1} \mathbf{M}_\alpha - \varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1)) \{G; \alpha, \beta, v\} = 0$$

erweist sich als unmittelbare Folge der Operatorenidentität

$$(81) \quad \begin{aligned} & \mathbf{N}_{\beta-1} \mathbf{M}_\alpha - \varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1) \\ &= -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left(\beta - \frac{3}{2}\right) \operatorname{Sp} \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} |Z-W| (\omega_0 \omega_2 - \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_0 - \omega_3 \omega_1) \\ & \quad + \frac{1}{4} |Z-W| \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial w_2} \right) \omega_0 + \left(\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial}{\partial w_0} \right) \omega_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) (\omega_1 + \omega_3) \right\}, \end{aligned}$$

wenn man

$$\Omega_{\alpha\beta} \{G; \alpha, \beta, v\} = 0$$

²⁾ In ¹⁾, Hilfssatz 4 ist das Faktorensystem u irrtümlich vergessen worden. Demzufolge sind in ¹⁾ die Multiplikatorwerte v^* sämtlich durch die angegebenen korrigierten Werte zu ersetzen.

beachtet. Zu der Identität (81) gelangt man in folgender Weise: Für

$$(82) \quad \begin{aligned} N_{\beta-1} M_{\alpha} - \varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1) &= -\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) (\beta-1) \left(\beta - \frac{3}{2}\right) + \\ &+ \left\{ (\beta-1) \left(\beta - \frac{3}{2}\right) - \left(\beta - \frac{3}{2}\right) \operatorname{Sp}((Z-W) D_w) + |Z-W| |D_w| \right\} \times \\ &\times \left\{ \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Sp}((Z-W) D_z) + |Z-W| |D_z| \right\} \end{aligned}$$

bestimmt man zunächst durch gliedweises Ausmultiplizieren und Anwenden der Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} &\operatorname{Sp}((Z-W) D_w) \operatorname{Sp}((Z-W) D_z) \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^2 (z_{\mu} - w_{\mu}) (z_{\nu} - w_{\nu}) \frac{\partial^2}{\partial w_{\mu} \partial z_{\nu}} - \operatorname{Sp}((Z-W) D_z), \\ |D_w| \operatorname{Sp}((Z-W) D_z) \\ &= \operatorname{Sp}((Z-W) D_z) |D_w| - \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_0} - \frac{\partial^2}{\partial w_3 \partial z_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1}, \\ \operatorname{Sp}((Z-W) D_w) |Z-W| &= |Z-W| \operatorname{Sp}((Z-W) D_w) - 2 |Z-W|, \\ |D_w| |Z-W| &= \frac{3}{2} - \operatorname{Sp}((Z-W) D_w) + |Z-W| |D_w| \end{aligned}$$

eine gewisse Normaldarstellung. Man erkennt nun leicht, daß die Glieder höchster, d. h. vierter Ordnung in (82) mit den Gliedern höchster Ordnung in $\omega_0 \omega_2 - \omega_1 \omega_3$ oder auch $\omega_2 \omega_0 - \omega_3 \omega_1$ übereinstimmen. Für die erste Reduktion ist also mit

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha \frac{\partial}{\partial w_0} - \beta \frac{\partial}{\partial z_0} + \\ &+ (z_0 - w_0) \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_0} + \frac{1}{2} (z_1 - w_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_0} + \frac{\partial^2}{\partial w_3 \partial z_1} \right) + \frac{1}{4} (z_2 - w_2) \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1}, \\ \omega_1 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial z_1} + \\ &+ \frac{1}{2} (z_0 - w_0) \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_1} + (z_1 - w_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial w_0 \partial z_2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1} \right) + \frac{1}{2} (z_2 - w_2) \frac{\partial^2}{\partial w_3 \partial z_2}, \\ \omega_2 &= \alpha \frac{\partial}{\partial w_2} - \beta \frac{\partial}{\partial z_2} + \\ &+ \frac{1}{4} (z_0 - w_0) \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1} + \frac{1}{2} (z_1 - w_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_2} \right) + (z_2 - w_2) \frac{\partial^2}{\partial w_3 \partial z_2}, \\ \omega_3 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial w_3} - \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial z_3} + \\ &+ \frac{1}{2} (z_0 - w_0) \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_0} + (z_1 - w_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_0} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1} \right) + \frac{1}{2} (z_2 - w_2) \frac{\partial^2}{\partial w_3 \partial z_1} \end{aligned}$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (\omega_0 \omega_2 - \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_0 - \omega_3 \omega_1) \\ &= |Z-W| |D_w| |D_z| + \alpha^2 |D_w| + \beta^2 |D_z| + \\ &+ \left(\frac{\alpha + \beta}{4} - \alpha \beta \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial w_0 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1} \right) + \\ &+ \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \operatorname{Sp}((Z-W) D_z) |D_w| - \left(\beta - \frac{1}{4} \right) \operatorname{Sp}((Z-W) D_w) |D_z| \end{aligned}$$

zu berechnen. Die Reduktion der Glieder dritter Ordnung wird dann durch

$$\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial w_2} \right) \omega_3 + \left(\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial}{\partial w_0} \right) \omega_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) (\omega_1 + \omega_3) \right\} \\ = -\frac{\beta}{2} |D_z| - \frac{\alpha}{2} |D_w| + \frac{\alpha + \beta - 1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial w_0 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1} \right) + \\ + \frac{1}{4} \operatorname{Sp} ((Z - W) D_w) |D_z| - \frac{1}{4} \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) |D_w|$$

geleistet. Schließlich bleiben noch Glieder erster und zweiter Ordnung übrig, die man auch durch Multiplikation von

$$\operatorname{Sp} \Omega_{\alpha\beta} = \alpha \operatorname{Sp} ((Z - W) D_w) - \beta \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) + \\ + \sum_{\mu, \nu=0}^2 (z_\mu - w_\mu) (z_\nu - w_\nu) \frac{\partial^2}{\partial w_\mu \partial z_\nu} - |Z - W| \left(\frac{\partial^2}{\partial w_0 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial w_2 \partial z_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial z_1} \right) \\ \text{mit } -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left(\beta - \frac{3}{2}\right) \text{ erhält.}$$

Zum Beweis von (28) benötigen wir die beiden Aussagen

$$(83) \quad M_\alpha \{\alpha, \beta\} \subset \{\alpha + 1, \beta - 1\},$$

$$(84) \quad M_\alpha (f | \sigma) = (M_\alpha f) | \sigma \quad \text{für } f \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Die erste folgt aus der Operatorenidentität

$$(85) \quad \Omega_{\alpha+1, \beta-1} M_\alpha = M_\alpha \Omega_{\alpha\beta} + \left\{ \left(\alpha - \frac{3}{2} \right) E + D_z^* (Z - W)^* \right\} (\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}),$$

die zweite aus der Transformationsformel

$$(86) \quad \hat{M}_\alpha = |CZ + D|^{s+1} M_\alpha |CZ + D|^{-s} |CW + D|^{-1}.$$

Der Operator \hat{M}_α entsteht aus M_α , wenn man Z, W durch

$$\sigma Z = \hat{Z} = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad \sigma W = \hat{W} = (AW + B)(CW + D)^{-1}$$

ersetzt.

Die Identität (85) erhält man wie folgt: Bildet man mit den Operatoren M_α , $\Omega_{\alpha\beta}$, $\Omega_{\alpha+1, \beta-1}$ in ihrer ursprünglichen Bedeutung den Ausdruck $\Omega_{\alpha+1, \beta-1} M_\alpha - M_\alpha \Omega_{\alpha\beta}$, so gelangt man durch Ausmultiplikation zu einer gewissen Normaldarstellung, wenn man auf die von $\Omega_{\alpha+1, \beta-1} M_\alpha$ herrührenden Produkte erforderlichenfalls eine der Vertauschungsregeln

$$(Z - W) D_w \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) \\ = \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) (Z - W) D_w - (Z - W) D_z - (Z - W) D_w, \\ (Z - W) D_w |Z - W| |D_z| \\ = |Z - W| |D_z| (Z - W) D_w - |Z - W| D_z^* D_w - |Z - W| |D_z| E, \\ (Z - W) D_z \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) = \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) (Z - W) D_z, \\ (Z - W) D_z |Z - W| |D_z| = |Z - W| |D_z| (Z - W) D_z, \\ (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) \\ = \operatorname{Sp} ((Z - W) D_z) (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z - (Z - W) ((Z - W) D_z)' D_z - \\ - (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z, \\ (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z |Z - W| |D_z| \\ = |Z - W| |D_z| (Z - W) ((Z - W) D_w)' D_z + \frac{3}{2} |Z - W| |D_z| E - \\ - |Z - W| |D_z| (Z - W) D_z - |Z - W| D_z^* ((Z - W) D_w)' D_z$$

anwendet. Berücksichtigt man außerdem

$$\begin{aligned} |Z - W| D_z^* \{((Z - W) D_z)' D_w - ((Z - W) D_w)' D_z\} \\ = (D_z^* (Z - W)^* - E) (\tilde{Q}_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Sp}((Z - W) D_z) (Z - W) D_w - (Z - W) D_w = (Z - W) \text{Sp}((Z - W) D_z) D_w, \\ \text{Sp}((Z - W) D_z) (Z - W) D_z - (Z - W) D_z = (Z - W) \text{Sp}((Z - W) D_z) D_z, \end{aligned}$$

so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} Q_{\alpha+\beta-1} M_\alpha - M_\alpha Q_{\alpha\beta} + (E - D_z^* (Z - W)^*) (\tilde{Q}_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}) \\ = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) (Z - W) \{ - (Z - W)^* |D_z| + \text{Sp}((Z - W) D_z) D_w - \\ - ((Z - W) D_w)' D_z + \text{Sp}((Z - W) D_z) D_z - ((Z - W) D_z)' D_z \\ - (Z - W)^* D_z^* D_w \} \\ = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) (Z - W) \{ ((Z - W) D_z)' D_w - ((Z - W) D_w)' D_z \} \\ = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) (\tilde{Q}_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}); \end{aligned}$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \text{Sp}((Z - W) D_z) D_z - (Z - W)^* |D_z| = ((Z - W) D_z)' D_z, \\ \text{Sp}((Z - W) D_z) D_w - (Z - W)^* D_z^* D_w = ((Z - W) D_z)' D_w. \end{aligned}$$

Damit ist (85) bewiesen.

Ist die Transformationsformel (86) für zwei Substitutionen richtig, dann gilt sie auch, wie man leicht sieht, für das Produkt. Wir können uns also auf das schon oben verwendete Erzeugendensystem der symplektischen Gruppe beschränken. Für affine Substitutionen ($C = O$) ist $\hat{M}_\alpha = M_\alpha$ zu beweisen, was keine Mühe bereitet. Wir können uns gleich dem Fall

$$\hat{Z} = -Z^{-1}, \quad \hat{W} = -W^{-1}$$

zuwenden. Nun ist zu zeigen, daß der Operator

$$\hat{M}_\alpha - |Z|^{\alpha+1} M_\alpha |Z|^{-\alpha} |W|^{-1}$$

verschwindet. Die Umrechnung von \hat{M}_α auf die Elemente von Z ist mit Hilfe von

$$D_z = Z (Z D_z)'$$

auszuführen und ergibt

$$\begin{aligned} \hat{M}_\alpha = \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \{ \text{Sp}(Z W^{-1} Z D_z) - \text{Sp}(Z D_z) \} - \\ - \frac{1}{2} |Z - W| |W|^{-1} \text{Sp}(Z D_z) + |Z| |W|^{-1} |Z - W| |D_z|. \end{aligned}$$

Bei der Umrechnung des Operators $|Z|^{\alpha+1} M_\alpha |Z|^{-\alpha} |W|^{-1}$ ist von den Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} \text{Sp}((Z - W) D_z) |Z|^{-\alpha} = |Z|^{-\alpha} \text{Sp}((Z - W) D_z) - \alpha |Z|^{-\alpha-1} \text{Sp}((Z - W) Z^*), \\ |D_z| |Z|^{-\alpha} = |Z|^{-\alpha} |D_z| - \alpha |Z|^{-\alpha-1} \text{Sp}(Z D_z) + \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) |Z|^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \hat{M}_\alpha - |Z|^{\alpha+1} M_\alpha |Z|^{-\alpha} |W|^{-1} \\ = \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \{ 1 - |Z| |W|^{-1} + |W|^{-1} \operatorname{Sp} ((Z-W) Z^*) - |Z-W| |W|^{-1} \} + \\ + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Sp} [Z \{ W^{-1} Z - E - |Z| |W|^{-1} (E - Z^{-1} W) + |Z-W| |W|^{-1} E \} D_Z]. \end{aligned}$$

Die beiden geschweiften Klammern können durch die charakteristischen Wurzeln der Matrix WZ^{-1} ausgedrückt werden. Führt man dies aus, so sieht man, daß die Klammern verschwinden. Damit ist die Transformationsformel bewiesen.

Bei der Abbildung von $\{G; \alpha, \beta, v\}$ durch M_α in $\{G; \alpha+1, \beta-1, v\}$ tritt im Falle $\varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1) \neq 0$ jede Funktion $f \in \{G; \alpha+1, \beta-1, v\}$ als Bild auf; denn es ist

$$\frac{1}{\varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1)} N_{\beta-1} f \in \{G; \alpha, \beta, v\}, \quad M_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1)} N_{\beta-1} f \right) = f.$$

Ist $g \in \{G; \alpha, \beta, v\}$, $M_\alpha g = 0$, so folgt

$$N_{\beta-1} M_\alpha g = \varepsilon_2(\alpha) \varepsilon_2(\beta-1) g = 0, \quad \text{also } g = 0.$$

Das heißt M_α ist auf $\{G; \alpha, \beta, v\}$ umkehrbar eindeutig. Analog zeigt man, daß N_β im Falle $\varepsilon_2(\beta) \varepsilon_2(\alpha-1) \neq 0$ die Schar $\{G; \alpha, \beta, v\}$ umkehrbar eindeutig auf $\{G; \alpha-1, \beta+1, v\}$ abbildet.

§ 3. FOURIER-Entwicklungen.

Mit $\{\alpha, \beta; T\}$ haben wir die lineare Schar der Funktionen $a(Y, T)$ bezeichnet, für die

$$(87) \quad a(Y, T) e^{i \operatorname{Sp} T X} \in \{\alpha, \beta\}$$

gilt. Kennzeichnend für die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ ist das Differentialgleichungssystem

$$(88) \quad \begin{aligned} \{(Y D_y)' D_y + (\alpha + \beta) D_y + (\alpha - \beta) T - T Y T\} a(Y, T) &= 0, \\ \{(Y D_y)' T - T Y D_y\} a(Y, T) &= 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich aus (7), wobei

$$(89) \quad D_x e^{i \operatorname{Sp} T X} = i T e^{i \operatorname{Sp} T X}$$

zu beachten ist.

Da $\{\alpha, \beta\}$ gegenüber symplektischen Substitutionen invariant ist, so folgt aus $a(Y, T) \in \{\alpha, \beta; T\}$, wenn U eine n -reihige reelle Matrix mit $|U| \neq 0$ darstellt,

$$a(Y[U], T) e^{i \operatorname{Sp} T X[U]} = a(Y[U], T) e^{i \operatorname{Sp} T[U'] X} \in \{\alpha, \beta\},$$

also

$$a(Y[U], T) \in \{\alpha, \beta; T[U']\}.$$

Wir bezeichnen diese Funktion sinngemäß mit $\hat{a}(Y, T[U'])$. Durch

$$(90) \quad \hat{a}(\hat{Y}, \hat{T}) = a(Y, T) \quad \text{mit} \quad \hat{Y} = Y[U^{-1}], \quad \hat{T} = T[U']$$

wird die Schar $\{\alpha, \beta; \hat{T}\}$ umkehrbar eindeutig auf $\{\alpha, \beta; T\}$ abgebildet. Die Matrizen $\hat{Y} \hat{T}$ und $Y T$ haben dieselben charakteristischen Wurzeln, insbe-

sondere ist also

$$(91) \quad \text{Sp}(\hat{Y} \hat{T}) = \text{Sp}(Y T), \quad |\hat{Y} \hat{T}| = |Y T|.$$

Im Fall $n = 2$, auf den wir uns fortan beschränken wollen, ist nun folgendes festzustellen: Ist $T \neq O$, $\hat{T} = T[U]$, $|U| \neq 0$ und gestattet $a(Y, T) \in \{\alpha, \beta; T\}$ entsprechend dem Charakter von T eine Entwicklung der Art (33), (35) oder (38), so trifft dies auch für die zugeordnete Form $\hat{a}(Y, \hat{T}) \in \{\alpha, \beta; \hat{T}\}$ zu; denn die durch (30) eingeführten Variablen u, v sind gegenüber der Transformation $Y, T \rightarrow \hat{Y}, \hat{T}$ invariant, während sich $|Y|$ nur um einen positiven konstanten Faktor ändert. Es genügt also, die in der Einleitung zusammengestellten Entwicklungssätze für die speziellen Matrizen

$$T = O, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zu beweisen. Zur Abkürzung wird

$$(93) \quad (Y D_y)' D_y + (\alpha + \beta) D_y = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (Y D_y)' T - T Y D_y = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt. Es sind nun für die speziellen Matrizen (92) die in $Y > 0$ regulären Funktionen $f = a(Y, T)$ zu bestimmen, die von den Operatoren ω und

$$\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} + (\alpha - \beta) T - T Y T$$

annuliert werden. Wir beginnen mit der Diskussion.

$$T = O.$$

An Stelle von Y werden die Variablen u, x, y durch

$$Y = u \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) y^{-1} & x y^{-1} \\ x y^{-1} & y^{-1} \end{pmatrix}$$

eingeführt. u wird in dieser Bedeutung nur vorübergehend verwendet. Eine Umrechnung ergibt

$$\begin{aligned} y_1 \omega_0 + y_2 \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ y_1 \omega_2 + y_0 \omega_1 &= \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1 \right) \left(\frac{1}{2} (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} - x y \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ 2 u y \omega_1 &= \left(y^2 \frac{\partial}{\partial x} - x y \frac{\partial}{\partial y} - x u \frac{\partial}{\partial u} \right) \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1 \right) \omega \\ &\quad + \frac{x}{2} \left\{ -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 u \frac{\partial}{\partial u} \right\}. \end{aligned}$$

Die zu lösenden Differentialgleichungen

$$\omega_0 f = \omega_1 f = \omega_2 f = 0$$

sind daher mit dem System

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} f &= \left(u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} f = 0, \\ \left\{ u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2(\alpha + \beta - 1) u \frac{\partial}{\partial u} + y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right\} f &= 0 \end{aligned}$$

äquivalent. Die ersten beiden Differentialgleichungen rechtfertigen den Ansatz

$$f_x = \varrho(x, y) u^{1-\alpha-\beta}, \quad f_y = \sigma(x, y) u^{1-\alpha-\beta}.$$

Es folgt dann

$$f = \varphi(x, y) u^{1-\alpha-\beta} + \psi(u)$$

mit $\varphi_x = \varrho$, $\varphi_y = \sigma$. Die dritte Differentialgleichung für f ergibt die Bedingung

$$u^2 \psi'' + 2(\alpha + \beta - 1) u \psi' + \{y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\varphi\} u^{1-\alpha-\beta} = 0.$$

Mit einer Konstanten c ist also

$$(u^2 \psi'' + 2(\alpha + \beta - 1) u \psi') u^{\alpha+\beta-1} = c, \\ y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\varphi = -c.$$

Wir setzen $\alpha + \beta \neq 1, 2$ und im folgenden auch noch $\neq \frac{3}{2}$ voraus. Da φ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann durch geeignete Wahl von φ erreicht werden, daß c verschwindet. Es ist dann

$$y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\varphi = 0$$

und

$$u \psi'' + 2(\alpha + \beta - 1) \psi' = 0,$$

also

$$\psi(u) = c_1 u^{2\left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta\right)} + c_2,$$

wobei c_1, c_2 konstant sind. Mit $u = \sqrt{|Y|}$ ergibt sich das gewünschte Resultat

$$f = \varphi(x, y) |Y|^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)} + c_1 |Y|^{\frac{3}{2}-\alpha-\beta} + c_2.$$

Es sei noch bemerkt, daß

$$|Y|^{\frac{n+1}{2}-\alpha-\beta}, \quad 1 \in \{\alpha, \beta; 0\}$$

für alle n gilt.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im vorliegenden Fall ist das Differentialgleichungssystem

$$(\omega_0 + \alpha - \beta - y_0) f = \omega_1 f = \omega_2 f = 0, \\ \left(\frac{1}{2} y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) f = 0$$

zu lösen. Wir verwenden hier und im folgenden die Bezeichnung

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Die drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden durch drei weitere ergänzt, die man aus der Differentialgleichung erster Ordnung durch Differentiation nach y_0, y_1, y_2 gewinnt. Das so bestimmte System wird mit den Methoden reduziert, die zur Auflösung linearer Gleichungen dienen. Es ergibt sich, daß das gegebene Differentialgleichungssystem mit dem fol-

genden äquivalent ist:

$$\left\{ y_0 \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + y_1 \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial y_1} + \frac{1}{4} y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial y_0} + \alpha - \beta - y_0 \right\} f = 0,$$

$$\left\{ (y_0 y_2 - y_1^2) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + y_0 \left(\alpha + \beta - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y_2} \right\} f = 0,$$

$$\left(\frac{1}{2} y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) f = 0.$$

Die zweite Differentialgleichung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = g(y_0, y_1) |Y|^{\frac{1}{2} - \alpha - \beta}.$$

Aus der dritten, die auch für $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ an Stelle von f gilt, ist zu entnehmen, daß $g(y_0, y_1) = g(y_0)$ von y_1 unabhängig ist. Sodann ergibt die dritte Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{2 y_1 g(y_0)}{y_0} |Y|^{\frac{1}{2} - \alpha - \beta}.$$

Im Falle $\alpha + \beta \neq \frac{3}{2}$ kann also

$$f = \frac{g(y_0)}{y_0 \left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta \right)} |Y|^{\frac{3}{2} - \alpha - \beta} + \varphi(y_0)$$

geschlossen werden. Geht man nun mit dem Ansatz

$$f = \varphi(y_0) |Y|^{\frac{3}{2} - \alpha - \beta} + \psi(y_0)$$

in die erste Differentialgleichung ein, so ergeben sich für φ und ψ die Bedingungen

$$y_0 \varphi'' + (3 - \alpha - \beta) \varphi' + (\alpha - \beta - y_0) \varphi = 0,$$

$$y_0 \psi'' + (\alpha + \beta) \psi' + (\alpha - \beta - y_0) \psi = 0.$$

Hier ist noch $y_0 = u$ zu setzen.

$$T = E.$$

Das vorliegende Differentialgleichungssystem

$$(\omega_0 + \alpha - \beta - y_0) f = (\omega_1 - y_1) f = (\omega_2 + \alpha - \beta - y_2) f = \omega f = 0$$

ist zunächst in geeigneter Weise zu reduzieren. Man ergänzt das System durch drei weitere Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die man aus der Differentialgleichung erster Ordnung durch Differentiation nach y_0, y_1, y_2 erhält. Sodann eliminiert man die Glieder, in denen partielle Ableitungen nach y_1 vorkommen. Man stellt dabei fest, daß die Differentialgleichungen nicht unabhängig von einander sind. Eine von den ursprünglich gegebenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann also entbehrt werden. Man kommt schließlich auf das folgende System:

$$(y_0 y_2 - y_1^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \right) - \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta \right) y_2 + \frac{1}{2} y_0 \right) \frac{\partial f}{\partial y_0} +$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta \right) y_0 + \frac{1}{2} y_2 \right) \frac{\partial f}{\partial y_2} + (\alpha - \beta) (y_2 - y_0) f = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left(y_0 - \frac{y_1^2}{y_2 - y_0} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{2 y_1^2}{y_2 - y_0} \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial y_2} - \left(y_2 + \frac{y_1^2}{y_2 - y_0} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} + \\ & + \left(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \frac{2 y_1^2}{(y_2 - y_0)^2} \right) \frac{\partial f}{\partial y_0} + \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta + \frac{2 y_1^2}{(y_2 - y_0)^2} \right) \frac{\partial f}{\partial y_2} + (y_2 - y_0) f = 0, \\ & y_1 \frac{\partial f}{\partial y_0} + \frac{1}{2} (y_2 - y_0) \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0. \end{aligned}$$

An Stelle von y_0, y_1, y_2 führen wir nun die Koordinaten

$$u = y_0 + y_2, \quad v = (y_0 - y_2)^2 + 4 y_1^2, \quad w = y_2 - y_0$$

ein. u und v haben die in (30) angegebene Bedeutung. Die Einführung ist im Bereich $Y > 0$ nur dann singularitätenfrei möglich, wenn die Lösungen f gerade Funktionen von y_1 sind. Das trifft aber zu, wie die folgende Betrachtung lehrt. Es sei f eine in y_1 ungerade Lösung. Wir können dann $f = y_1 g(u, v, w)$ mit einer in $-u < w < u, |v| < u^2$ regulären Funktion g setzen. Die letzte Differentialgleichung für f ergibt für g die Bedingung

$$w g + (w^2 - v) \frac{\partial g}{\partial w} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial w} ((w^2 - v) g^2) = 0.$$

Mithin ist

$$(w^2 - v) (g(u, v, w))^2 = h(u, v).$$

Bei gegebenen u, v kann die linke Seite durch Wahl von w zu 0 gemacht werden. $h(u, v)$ verschwindet also identisch; folglich ist auch $g(u, v, w) \equiv 0$. Es sei nun $f(y_0, y_1, y_2)$ eine beliebige Lösung. Dann genügt, wie man unmittelbar sieht, auch $f(y_0, -y_1, y_2)$ den Differentialgleichungen. Es ist also $f(y_0, y_1, y_2) - f(y_0, -y_1, y_2)$ eine in y_1 ungerade Lösung; sie muß, wie eben gezeigt wurde, identisch verschwinden. Jede Lösung kann also als Funktion von u, v, w angesetzt werden. Die letzte Differentialgleichung besagt, daß f von w unabhängig ist, so daß mit $f = f(u, v)$ weitergerechnet werden kann.

In den neuen Variablen nehmen die Differentialgleichungen zweiter Ordnung die relativ einfache Gestalt

$$\begin{aligned} 2(v - u^2) f_{uv} + (\alpha + \beta) f_u + 2(1 - \alpha - \beta) u f_v + (\alpha - \beta) f &= 0, \\ f_{uu} + 4u f_{uv} + 4v f_{vv} + 4(\alpha + \beta) f_v - f &= 0 \end{aligned}$$

an. Wir lösen das System im Bereich

$$|v| < u^2$$

mit einem Potenzreihenansatz:

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} g_v(u) v^v.$$

Es ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} 2u^2(v+1)g'_{v+1} + 2(\alpha+\beta-1)(v+1)ug_{v+1} - \\ - (2v+\alpha+\beta)g'_v + (\beta-\alpha)g_v &= 0, \\ 4(v+1)ug'_{v+1} + 4(v+\alpha+\beta)(v+1)g_{v+1} + g'_v - g_v &= 0, \end{aligned}$$

die mit dem System

$$\begin{aligned} u^2 g''_0 + (3\alpha + 3\beta - 1)ug'_0 + \{2(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1) + 2(\alpha - \beta)u - u^2\}g'_0 + \\ + \{(1 - \alpha - \beta)u + 2(\alpha + \beta - 1)(\alpha - \beta)\}g_0 &= 0, \\ 4(v+1)^2ug_{v+1} + ug'_v + 2(2v+\alpha+\beta)g'_v + (2(\alpha-\beta)-u)g_v &= 0 \quad (v \geq 0) \end{aligned}$$

gleichwertig sind. Die Differentialgleichung dritter Ordnung für g_0 ist mit dem Ansatz

$$g_0 = u^{1-\alpha-\beta} \varphi(u), \quad \varphi'(u) = \frac{1}{u} \varphi(u)$$

auf die WHITTAKERSche Differentialgleichung

$$\varphi'' = \left(1 + \frac{2(\beta-\alpha)}{u} + \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{u^2} \right) \varphi$$

zurückzuführen.

Es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Potenzreihe für f im Bereich $|v| < u^2$ konvergiert. Zu dem Zweck werden g_{v+1} , g'_{v+1} , g''_{v+1} mit Hilfe der Rekursionsformeln durch g_v , g'_v , g''_v dargestellt:

$$g_{v+1}^{(\kappa)} = \sum_{\lambda=0}^2 a_{\kappa\lambda}^{(v)} g_v^{(\lambda)} \quad (\kappa = 0, 1, 2; v = 0, 1, 2, \dots)$$

Das ist möglich, da g_v der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\begin{aligned} u^2 g_v''' + (4v - 1 + 3\alpha + 3\beta) u g_v'' + \\ + \{2(2v + \alpha + \beta)(v - 1 + \alpha + \beta) + 2(\alpha - \beta)u - u^2\} g_v' + \\ + \{(1 - \alpha - \beta)u + 2(v - 1 + \alpha + \beta)(\alpha - \beta)\} g_v = 0 \end{aligned}$$

genügt, die aus den Rekursionsformeln abzuleiten ist. Einfache Abschätzungen der Koeffizienten $a_{\kappa\lambda}^{(v)}$ genügen, um zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Konstante C zu finden, so daß

$$|g_v| < C \left(\frac{1+\varepsilon}{u^2} \right)^v, \quad |g'_v| < C \left(\frac{1+\varepsilon}{u^2} \right)^v, \quad |g''_v| < C \left(\frac{1+\varepsilon}{u^2} \right)^v$$

für alle v gilt. Aus diesen Ungleichungen folgt die Konvergenz der Potenzreihe für $|v| < u^2$. Es gibt also genau drei linear unabhängige Lösungen des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems, die im ganzen Bereich $Y > 0$ regulär sind.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der vorliegende Fall ist durch eine komplexe Transformation auf den vorangehenden zurückzuführen. Wendet man (90) auf $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ und $T = E$ an, so erkennt man, daß durch $a \left(\begin{pmatrix} y_0 & i y_1 \\ i y_1 & -y_2 \end{pmatrix}, E \right)$ alle Funktionen der Schar $\{\alpha, \beta; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ geliefert werden, wenn $a(Y, E)$ die Funktionen der Schar $\{\alpha, \beta, E\}$ durchläuft. Wegen des invarianten Charakters der Variablen u, v können also die im Fall $T = E$ gefundenen Differentialgleichungen hier übernommen werden:

$$\begin{aligned} 2(v - u^2) f_{uv} + (\alpha + \beta) f_u + 2(1 - \alpha - \beta) u f_v + (\alpha - \beta) f = 0, \\ f_{uu} + 4u f_{uv} + 4v f_{vv} + 4(\alpha + \beta) f_v - f = 0. \end{aligned}$$

Nach (30) ist jetzt $u = y_0 - y_2$, $v = (y_0 + y_2)^2 - 4y_1^2$. Wir haben also die in

$$u^2 < v$$

regulären Lösungen zu ermitteln. Das geschieht wieder mit einem Potenz-

reihenansatz:

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} h_v(v) u^v.$$

Die Funktionen $h_v(v)$ genügen den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} (v+2)(v+1)h_{v+2} + 4vh_v'' + 4(v+\alpha+\beta)h_v' - h_v &= 0, \\ 2(v+1)vh_{v+1}' + (\alpha+\beta)(v+1)h_{v+1} + (\alpha-\beta)h_v + 2(2-v-\alpha-\beta)h_{v-1}' &= 0. \end{aligned}$$

Ein gleichwertiges System hat man in

$$\begin{aligned} 8v^2h_0'' + 4(2+3\alpha+3\beta)vh_0' + \{4(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta-1) - 2v\}h_0' - \\ - (\alpha+\beta)h_0 = (\alpha-\beta)h_1, \\ 2vh_1' + (\alpha+\beta)h_1 = (\beta-\alpha)h_0, \\ (v+2)(v+1)h_{v+2} + 4vh_v'' + 4(\alpha+\beta+v)h_v' - h_v = 0 \quad (v \geq 0). \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Potenzreihe im Bereich $u^2 < v$ ergibt sich wieder mit der im Fall $T = E$ skizzierten Methode. Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} 8v^2h_v'' + 4(3\alpha+3\beta+2v+2)vh_v' + \\ + \{4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+v) + 2(v+1)(\alpha+\beta+v-1) - 2v\}h_v' - \\ - (\alpha+\beta)h_v + (v+1)(\beta-\alpha)h_{v+1} = 0 \end{aligned}$$

lassen sich Darstellungen

$$\begin{aligned} h_{v+2} &= a_{00}^{(v)} h_v + a_{01}^{(v)} h_v' + a_{02}^{(v)} h_v'', \\ h_{v+2}' &= a_{10}^{(v)} h_v + a_{11}^{(v)} h_v' + a_{12}^{(v)} h_v'' + b_{10}^{(v+1)} h_{v+1}, \\ h_{v+2}'' &= a_{20}^{(v)} h_v + a_{21}^{(v)} h_v' + a_{22}^{(v)} h_v'' + b_{20}^{(v+1)} h_{v+1} + b_{21}^{(v+1)} h_{v+1}' \end{aligned}$$

bestimmen, die für $\varepsilon > 0$ eine Abschätzung

$$|h_v| < C \left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{v}} \right)^v, \quad |h_v'| < C \left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{v}} \right)^v, \quad |h_v''| < C \left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{v}} \right)^v$$

mit $C = C(\varepsilon)$ gestatten. Daraus folgt die behauptete Konvergenz.

(Eingegangen am 20. September 1952.)

Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta \varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$.

Von

JOHANNES und JOACHIM NITSCHKE in Berlin.

T sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der x, y -Ebene und S seine dreimal stetig differenzierbare Randkurve. Es werden Funktionen $\varphi(x, y)$ gesucht, welche in T zweimal, in $T + S$ einmal stetig differenzierbar sind und welche das folgende Randwertproblem lösen:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi_x^2 + \varphi_y^2 && \text{in } T \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -f(s) && \text{auf } S. \end{aligned} \tag{R}$$

$\partial/\partial n$ bedeutet die Ableitung nach der inneren Normalen von S , und $f(s)$ ist eine vorgegebene stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s des Randes.

Die in Rede stehende Differentialgleichung soll als Beispiel dafür dienen, daß die Formulierung (R) der zweiten Randwertaufgabe nichtlinearer Differentialgleichungen nicht immer zweckmäßig ist. Es zeigt sich nämlich, daß im allgemeinen keine Lösung existiert, sondern nur dann, wenn die auf dem Rand vorgegebenen Funktionen gewisse Integralbedingungen erfüllen. Auch bei linearen Differentialgleichungen liegt oft der gleiche Sachverhalt vor. Dort sind jedoch die fraglichen Integralbedingungen von vornherein, d. h. ohne Kenntnis der Lösung des Randwertproblems angebar. Das ist hier anders. Eine Formulierung der Randbedingungen wird aber nur dann als sachgemäß bezeichnet werden können, wenn die Entscheidung über die Lösbarkeit des Problems bzw. die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Integralbedingungen ohne Bezug auf die gesuchte Lösung selbst möglich ist.

In unserem Falle (R) gibt es eine derartige Bedingung; sie lautet¹⁾

$$\iint_T (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = \oint_S f(s) ds. \tag{1}$$

Man gelangt erst zum Ziele, wenn man auf dem Rande nicht $f(s)$ selbst, sondern eine Funktion $\tilde{f}(s) = f(s) + c$ mit einer geeignet zu wählenden additiven Konstanten c als negative Normalableitung von φ vorgibt. Die Bestimmung von c erfordert aber die Kenntnis der Lösung φ . Wir betrachten von vornherein die Schar \mathfrak{R}_c von Randwertproblemen:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi_x^2 + \varphi_y^2 && \text{in } T \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -(f(s) + c) && \text{auf } S. \end{aligned} \tag{R}_c$$

¹⁾ Ihre Notwendigkeit folgt schon aus der GREENSchen Formel. Sie kann jedenfalls nur erfüllt sein, wenn $\oint_S f(s) ds \geq 0$ gilt.

Dann ergibt sich, daß bei geeigneter Beschränkung von df/ds genau eine Zahl c existiert, so daß das Randwertproblem (\mathfrak{R}_c) eindeutig lösbar ist. Alle anderen Randwertprobleme \mathfrak{R}_d ($d \neq c$) sind unlösbar. Man wird also die Funktion $f(s)$ zweckmäßig nur bis auf eine additive Konstante festlegen, oder mit anderen Worten: man wird nicht $f(s)$ selbst, sondern die Ableitung $\varrho(s) = df/ds$ als Randbedingung vorgeben. $\varrho(s)$ muß dann natürlich der Integralbedingung

$$(2) \quad \oint_S \varrho(s) ds = 0$$

genügen. Wir formulieren demgemäß den folgenden

Satz²⁾: Bei geeigneter Beschränkung von df/ds ist das Problem \mathfrak{R} eindeutig lösbar, wenn auf dem Rande die der Bedingung (2) genügende Ableitung $\varrho(s) = df/ds$ der Funktion $f(s)$ gegeben ist.

Lösungen φ , welche sich nur um eine Konstante unterscheiden, werden nicht als verschieden betrachtet ($\varphi = \text{const}$ ist nur im Falle $f(s) = 0$ Lösung). Wegen dieser trivialen Vieldeutigkeit ersetzen wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ durch ein elliptisches System erster Ordnung:

$$(3) \quad \begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= u^2 + v^2, \end{aligned}$$

dessen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit $\varphi(x, y)$ gemäß

$$(4) \quad u = \varphi_y, v = \varphi_x$$

zusammenhängen. Unter Einführung des Tangentenwinkels γ der Randkurve ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u \cos \gamma - v \sin \gamma.$$

Wir legen also von nun an das neue Problem

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}'_c) \quad & \begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= u^2 + v^2 \\ u \cos \gamma - v \sin \gamma &= -(f(s) + c) \end{aligned} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{in } T \\ \\ \text{auf } S \end{array}$$

zugrunde, welches wir noch folgendermaßen in eine äquivalente Integralrelation umschreiben: Zunächst gilt für ein Lösungspaar u, v von \mathfrak{R}'_c und beliebige in $T + S$ stetig differenzierbare Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$ stets

$$(5) \quad \oint_S \{a(v dx + u dy) + b(u dx - v dy)\} = \iint_T \{a(u_x - v_y) - b(u_y + v_x) + u(a_x - b_y) - v(a_y + b_x)\} dx dy$$

bzw.

$$(6) \quad \oint_S \{a(u \sin \gamma + v \cos \gamma) ds - b f(s) ds - c \oint_S b ds\} = \iint_T \{u(a_x - b_y) - v(a_y + b_x) - b(u^2 + v^2)\} dx dy.$$

Für a und b wählen wir nun spezieller Funktionenpaare mit den folgenden

²⁾ Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von $f(s)$ wurde nur wegen der Formulierung des Satzes gewählt. Sie ist nicht erforderlich und kann durch die schwächere Annahme ersetzt werden, $f(s)$ solle Hölder-stetig sein.

Eigenschaften:

- (7) $\begin{cases} 1) a, b \text{ in } T + S \text{ zweimal Hölder-stetig differenzierbar,} \\ 2) a = 0 \text{ auf } S. \end{cases}$

Dann geht (6) über in die Integralrelation

$$(8) \quad \iint_T \{u(a_x - b_y) - v(a_y + b_x) - b(u^2 + v^2)\} dx dy + \oint_S b(f(s) + c) ds = 0.$$

Diese ist, angeschrieben für alle nach (7) zugelassenen Funktionen a, b , dem Randwertproblem \mathcal{R}'_c äquivalent. Zum Beweis hat man nur partiell zu integrieren:

$$\begin{aligned} & \iint_T \{a(-u_x + v_y) + b(u_y + v_x - u^2 - v^2)\} dx dy + \\ & + \oint_S b \{u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds} + f(s) + c\} ds = 0 \end{aligned}$$

und die Willkür von u und b zu beachten.

Zunächst beweisen wir (ohne Beschränkung von f') die folgende Eindeutigkeitsbehauptung:

In der Gesamtheit der Lösungen $u(x, y; c), v(x, y; c)$ aller Randwertprobleme \mathcal{R}'_c existiert höchstens ein nicht identisch verschwindendes Paar u, v , d. h. es gibt höchstens einen Wert der Konstanten c , für den \mathcal{R}'_c lösbar, und zwar dann eindeutig lösbar, ist.

Für die Differenzen

$$U = u(x, y; c) - \bar{u}(x, y; d), \quad V = v(x, y; c) - \bar{v}(x, y; d)$$

zweier verschiedener Lösungspaare dieser Gesamtheit folgt aus (8) die Integralrelation

$$(9) \quad \begin{aligned} & \iint_T \{U(a_x - b_y - (u + \bar{u})b) - V(a_y + b_x + (v + \bar{v})b)\} dx dy + \\ & + (c - d) \oint_S b ds = 0. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $u + \bar{u}$ und $v + \bar{v}$ sind dabei als bekannte Funktionen anzusehen. Der Beweis wird erbracht sein, wenn es gelingt, für beliebige in $T + S$ Hölder-stetig differenzierbare Funktionen $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ die Funktionen a und b gemäß (7) als Lösungen des linearen Randwertproblems

$$(10) \quad \begin{aligned} & a_x - b_y - (u + \bar{u})b = \lambda(x, y) && \text{in } T, \\ & a_y + b_x + (v + \bar{v})b = \mu(x, y) \\ & a = 0 \text{ auf } S, \quad \oint_S b ds = 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen. Dann wird aus (9) nämlich die Bedingung

$$(11) \quad \iint_T (U\lambda - V\mu) dx dy = 0,$$

welche wegen der Willkür von λ und μ die Gleichungen

$$U = 0, V = 0$$

nach sich zieht.

Mit der Substitution

$$(12) \quad b = \bar{b} \cdot e^{-p(x, y)}$$

geht das System aus (10) über in

$$(13) \quad \begin{aligned} e^p a_x - \bar{b}_y + \{p_y - (u + \bar{u})\} \bar{b} &= \lambda e^p, \\ e^p a_y + \bar{b}_x - \{p_x - (v + \bar{v})\} \bar{b} &= \mu e^p. \end{aligned}$$

Wegen

$$(14) \quad (u + \bar{u})_x = (v + \bar{v})_y$$

kann man $p(x, y)$ als Lösung der Differentialgleichungen

$$(15) \quad \begin{aligned} p_y - (u + \bar{u}) &= 0 \\ p_x - (v + \bar{v}) &= 0 \end{aligned}$$

bestimmen und erhält dann aus (13) durch Elimination von \bar{b} die selbstadjungierte elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(16) \quad (e^p a_x)_x + (e^p a_y)_y = (\lambda e^p)_x + (\mu e^p)_y.$$

Die Randbedingung für a ist die gleiche wie in (10). Die Lösung a ist also bei beliebiger Wahl von λ und μ eindeutig bestimmt. b ergibt sich dann durch Quadratur bis auf eine Integrationskonstante, über die wir durch die Forderung

$$(17) \quad \oint_S b \, ds = 0$$

verfügen. Damit ist die oben behauptete Eindeutigkeit bewiesen.

Nun zum Nachweis der Existenzaussage des Satzes! Wir betrachten jetzt das folgende mit zwei in $T + S$ Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen λ, μ angeschriebene lineare Hilfsproblem:

$$(18) \quad \begin{aligned} a_x - b_y &= \lambda(x, y) \\ a_y + b_x &= \mu(x, y) \end{aligned} \quad \text{in } T, \\ a = 0 \text{ auf } S, \quad \oint_S b \, ds = 0.$$

Seine eindeutig bestimmten Lösungen lauten

$$(19) \quad \begin{aligned} a(x, y) &= \iint_T \{G_\xi^1(x, y; \xi, \eta) \lambda(\xi, \eta) + G_\eta^1(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta)\} d\xi d\eta \\ b(x, y) &= \iint_T \{-G_\eta^2(x, y; \xi, \eta) \lambda(\xi, \eta) + G_\xi^2(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta)\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten $G^1 = G^1(x, y; \xi, \eta)$ und $G^2 = G^2(x, y; \xi, \eta)$ die GREENSchen Funktionen erster und zweiter Art der Potentialgleichung für den Bereich $T + S$.³⁾ Einsetzen in (8) liefert

$$(20) \quad \begin{aligned} \iint_T \{u \lambda - v \mu - (u^2 + v^2) (\iint_T (-G_\eta^2 \lambda + G_\xi^2 \mu) d\xi d\eta)\} dx dy + \\ + \oint_S (f(s) + c) \{ \iint_T (-G_\eta^2 \lambda + G_\xi^2 \mu) d\xi d\eta \} ds = 0 \end{aligned}$$

oder, nach Vertauschen der Integrationsreihenfolgen wegen der Symmetrieeigenschaft der GREENSchen Funktionen:

$$(21) \quad \begin{aligned} &\iint_T \lambda(x, y) \{u(x, y) \\ &+ (\iint_T G_y^2(x, y; \xi, \eta) (u^2 + v^2) d\xi d\eta) - \oint_S G_y^2(x, y; s) (f(s) + c) ds\} dx dy \\ &- \iint_T \mu(x, y) \{v(x, y) \\ &+ (\iint_T G_x^2(x, y; \xi, \eta) (u^2 + v^2) d\xi d\eta) - \oint_S G_x^2(x, y; s) (f(s) + c) ds\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

³⁾ Vgl. P. FRANK und R. v. MISES, Differentialgleichungen der Physik Bd. I, Braunschweig 1930, S. 700.

λ und μ waren beliebig wählbar; die Funktionen u, v müssen also Lösungen der Integralgleichungen

$$(22) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= - \iint_T G_y^2(x, y; \xi, \eta) (u^2 + v^2) d\xi d\eta + \oint_S G_y^2(x, y; s) f(s) ds \\ v(x, y) &= - \iint_T G_x^2(x, y; \xi, \eta) (u^2 + v^2) d\xi d\eta + \oint_S G_x^2(x, y; s) f(s) ds \end{aligned}$$

sein. Wegen $\oint_S G^2(x, y; s) ds = 0$ konnten die beiden Glieder

$$\oint_S G_x^2(x, y; s) c ds \quad \text{und} \quad \oint_S G_y^2(x, y; s) c ds$$

weggelassen werden.

Wir nehmen nun zunächst an, wir wären im Besitze der in $T + S$ stetigen, in T stetig differenzierbaren Lösungen u, v von (22). Sie sind offensichtlich unabhängig von c . Die Konstante c wird vielmehr erst jetzt durch die Gleichung

$$(23) \quad c = \frac{1}{\oint_S ds} \left\{ \iint_T (u^2 + v^2) dx dy - \oint_S f(s) ds \right\}$$

festgelegt. u und v sind, da sich alle Schlüsse umkehren lassen, zugleich Lösungen der Integralrelation (8), in welcher man a und b aber auf die Klasse der Lösungen von (18) beschränken muß. Die Gesamtheit aller nach (7) zugelassenen Funktionen erhält man, wenn man zu den Funktionen b dieser Klasse noch beliebige Konstanten addiert. Für $a = 0$, $b = \text{const}$ geht (8) aber in

$$(24) \quad \iint_T (u^2 + v^2) dx dy + \oint_S (f(s) + c) ds = 0,$$

d. h. die Bedingung (23) über. Diese ist somit auf Grund der oben erfolgten Bestimmung von c erfüllt. Wir können nunmehr sagen, daß u, v bei der getroffenen Wahl von c Lösungen des Randwertproblems \mathfrak{R}'_c sind.

Wir versuchen zum Schluß, die Integralgleichungen (22) durch sukzessive Approximationen, ausgehend von der Anfangsnäherung

$$(25) \quad \overset{0}{u}(x, y) = 0, \quad \overset{0}{v}(x, y) = 0,$$

zu lösen, indem wir allgemein $\overset{n}{u}, \overset{n}{v}$ nach der Iterationsvorschrift

$$(26) \quad \begin{aligned} \overset{n}{u}(x, y) &= - \iint_T G_y^2(x, y; \xi, \eta) \{ (\overset{n-1}{u})^2 + (\overset{n-1}{v})^2 \} d\xi d\eta + \oint_S G_y^2(x, y; s) f(s) ds \\ \overset{n}{v}(x, y) &= - \iint_T G_x^2(x, y; \xi, \eta) \{ (\overset{n-1}{u})^2 + (\overset{n-1}{v})^2 \} d\xi d\eta + \oint_S G_x^2(x, y; s) f(s) ds \end{aligned}$$

bestimmen. Zum Zwecke der Abschätzungen führen wir eine Norm

$$(27) \quad \|u, v\| = \max_{(x, y) \in T+S} (|u(x, y)|, |v(x, y)|)$$

ein. Weiterhin sei die Zahl K so bestimmt, daß in $T + S$

$$(28) \quad \iint_T |G_x^2(x, y; \xi, \eta)| d\xi d\eta \leq K, \quad \iint_T |G_y^2(x, y; \xi, \eta)| d\xi d\eta \leq K$$

gilt. Nach den von A. KORN⁴⁾ gegebenen Abschätzungen gibt es eine von der

⁴⁾ A. KORN, Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen, Abh. Königl. Preuß. Akad. der Wissensch., Berlin 1909.

speziellen Wahl der Funktion f unabhängige Konstante \bar{K} , so daß

$$(29) \quad \begin{aligned} |\oint G_x^2(x, y; s) f(s) ds| &\leq \bar{K} \cdot \text{Max } |f'| \\ |\oint G_y^2(x, y; s) f(s) ds| &\leq \bar{K} \cdot \text{Max } |f'|. \end{aligned}$$

Dann findet man die Ungleichungen

$$(30) \quad \begin{aligned} \|\overset{1}{u}, \overset{1}{v}\| &= \|\overset{1}{u} - \overset{0}{u}, \overset{1}{v} - \overset{0}{v}\| \leq \bar{K} \cdot \text{Max } |f'| \\ \|\overset{n}{u} - \overset{n-1}{u}, \overset{n}{v} - \overset{n-1}{v}\| &\leq 2K (\|\overset{n-1}{u}, \overset{n-1}{v}\| + \|\overset{n-2}{u}, \overset{n-2}{v}\|) \|\overset{n-1}{u} - \overset{n-2}{u}, \overset{n-1}{v} - \overset{n-2}{v}\| \\ &\quad \text{für } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß bei hinreichend kleiner Wahl von $\text{Max } |f'|$ sich die für alle $n = 2, 3, \dots$ gültige Ungleichung

$$(31) \quad 2K (\|\overset{n-1}{u}, \overset{n-1}{v}\| + \|\overset{n-2}{u}, \overset{n-2}{v}\|) \leq \frac{1}{2}$$

erreichen läßt. Dazu beschränken wir $\text{Max } |f'|$ gemäß

$$(32) \quad \text{Max } |f'| \leq \frac{1}{16K\bar{K}}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$(33) \quad \|\overset{n}{u}, \overset{n}{v}\| \leq \sum_{r=1}^n \|\overset{r}{u} - \overset{r-1}{u}, \overset{r}{v} - \overset{r-1}{v}\|$$

ergibt sich dann durch vollständige Induktion tatsächlich, daß

$$(34) \quad \|\overset{n}{u}, \overset{n}{v}\| \leq \frac{1}{8K}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

und damit (31) gilt. Die Iteration (26) konvergiert also und liefert eindeutig bestimmte Lösungen u, v der Integralgleichungen (22), welche in $T + S$ stetig und in T stetig differenzierbar sind. Hiermit ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 30. Juli 1952.)

Sur une inégalité de E. HEINZ.

Par

J. DIXMIER à Dijon.

Dans un mémoire récent ([1], Satz 1 et Satz 4), E. HEINZ a démontré le théorème suivant:

*Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints ≥ 0 dans un espace hilbertien complexe H . Soit Q un opérateur linéaire continu tel que $\|Qx\| \leq \|Bx\|$ et $\|Q^*y\| \leq \|Ay\|$ pour $x \in H$ et $y \in H$. Alors, quels que soient $x \in H$, $y \in H$ et le nombre réel v , $0 \leq v \leq 1$, on a:*

$$|\langle Qx, y \rangle| \leq (1 + |2v - 1|) \|B^v x\| \|A^{1-v} y\|.$$

En outre, lorsque Q est auto-adjoint, on peut supprimer le facteur $1 + |2v - 1|$.

(En fait, E. HEINZ énonce son théorème pour des opérateurs non nécessairement continus; mais le passage à ce cas plus général est facile, et nous nous limiterons dans ce qui suit à des opérateurs continus.)

Nous allons montrer que le facteur $1 + |2v - 1|$ peut être omis même si Q n'est pas auto-adjoint. La méthode, entièrement différente de celle de [1] et un peu plus rapide, conduit d'ailleurs à une généralisation du théorème de E. HEINZ aux formes multilinéaires.

Après la préparation de ce mémoire, E. HEINZ m'a communiqué un mémoire de T. KATO [2], dans lequel l'auteur montre également que le facteur $1 + |2v - 1|$ peut être omis. La méthode, plus longue que celle du présent mémoire, ne semble pas se généraliser aux formes multilinéaires; par contre, elle conduit à d'autres extensions (cf. la Remarque finale de [2]) que ne peut donner notre méthode.

Nous notons R l'ensemble des nombres réels, et R_+^* l'ensemble des nombres réels > 0 , munis de leurs topologies usuelles.

Lemme 1. *Soit $f(z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0$ une fonction entière de n variables complexes. Soit K un ensemble borné dans l'espace produit $(R_+^*)^n$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des constantes > 0 . Pour tout système (r_1, r_2, \dots, r_n) de nombres réels, soit $M(r_1, r_2, \dots, r_n)$ la borne supérieure, évidemment finie et > 0 , de $|f|$ quand le point $(\lambda_1^r |z_1|, \lambda_2^r |z_2|, \dots, \lambda_n^r |z_n|)$ appartient à K . Alors, $\log M(r_1, r_2, \dots, r_n)$ est une fonction convexe de (r_1, r_2, \dots, r_n) .*

Ce lemme résulte aussitôt du théorème général de THORIN [4] (à condition de noter, ce qui est évident, qu'on peut, dans [4], remplacer les applications linéaires homogènes L par des applications linéaires affines). Pour être complet, nous donnerons à la fin de l'article une démonstration élémentaire du lemme 1, qui suit pas à pas celle de [3] (cas particulier, d'ailleurs, de celle de THORIN).

En effet, d'après la théorie spectrale, A_p est limite uniforme d'une suite décroissante d'opérateurs auto-adjoints A_{p_v} permutables à A_p , dont le spectre se réduit à un nombre fini de points. On a

$$|F(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|A_{1_v} x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|$$

$$|F(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \|x_2\| \dots \|A_{n_v} x_n\|$$

pour tout v . Pour $1 \leq p \leq n$, v fixé, il existe un sous-espace H'_p de H_p , de dimension finie, contenant x_p , et stable pour A_{p_v} . Appliquant le lemme 3 aux espaces H'_p , aux restrictions des A_{p_v} aux H'_p , et à la restriction de F à $H'_1 \times H'_2 \times \dots \times H'_p$, on obtient

$$|F(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|A_{1_v}^r x_1\| \|A_{2_v}^r x_2\| \dots \|A_{n_v}^r x_n\|.$$

Faisant tendre v vers l'infini, on arrive à l'inégalité du théorème.

Remarque 1. Il est facile de passer ensuite au cas où $A_p = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda^p$ peut être non continu. On considère, pour $1 \leq p \leq n$, les restrictions des A_p aux $E_\lambda^p(H)$; on leur applique le théorème, et on fait tendre λ vers $+\infty$.

Corollaire: Soient H un espace hilbertien complexe, A et B deux opérateurs auto-adjoints ≥ 0 dans H , Q un opérateur linéaire dans H tel que $\|Qx\| \leq \|Bx\|$ et $\|Q^*y\| \leq \|Ay\|$ pour $x \in H$ et $y \in H$. Alors, quels que soient $x \in H$, $y \in H$ et le nombre réel v , $0 \leq v \leq 1$, on a

$$|\langle Qx, y \rangle| \leq \|B^v x\| \|A^{1-v} y\|.$$

En effet, soit H^c l'espace hilbertien „conjugué“ de H , c'est-à-dire l'espace H muni des opérations $(x, y) \rightarrow x + y$, $(\lambda, x) \rightarrow \bar{\lambda}x$, et du produit scalaire $(x, y) \rightarrow \langle y, x \rangle$. Alors B (resp. A) est un opérateur auto-adjoint ≥ 0 sur H (resp. H^c), et $(x, y) \rightarrow \langle Qx, y \rangle$ est une forme bilinéaire sur $H \times H^c$. On a $|\langle Qx, y \rangle| \leq \|Qx\| \|y\| \leq \|Bx\| \|y\|$, et $|\langle Qx, y \rangle| = |\langle x, Q^*y \rangle| \leq \|x\| \|Q^*y\| \leq \|x\| \|Ay\|$ quels que soient $x \in H$ et $y \in H^c$. Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent.

Remarque 2. Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints ≥ 0 sur un espace hilbertien complexe H , et supposons $A \leq B$. On a $\|A^{1/2}x\|^2 = \langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle = \|B^{1/2}x\|^2$, et $\|(A^{1/2})^*y\| \leq \|B^{1/2}y\|$ pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$. Appliquant le corollaire, avec $v = 1/2$, on obtient:

$$\langle A^{1/2}x, x \rangle \leq \|B^{1/4}x\| \|B^{1/4}x\| = \langle B^{1/2}x, x \rangle$$

donc $A^{1/2} \leq B^{1/2}$. Ce résultat est un cas très particulier du Satz 2 de [1].

Démonstration du lemme 1: Supposons d'abord que les différentes fonctions coordonnées aient, dans K , une borne inférieure > 0 , et que K soit fermé. Alors, l'application $(x_i) \rightarrow (\log x_i)$ de $(R_+^*)^n$ dans R^n transforme K en un ensemble compact K' . Posons $\lambda_p = e^{\mu_p}$ ($1 \leq p \leq n$). Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des variables réelles, et posons $\varphi((x_p, y_p, r_p)) = f((e^{x_p - \mu_p} r_p^{y_p + i y_p}))$. Alors, $M(r_1, r_2, \dots, r_n)$ est aussi le maximum de $|\varphi|$ lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'$ et que $y_p \in [-\pi, +\pi]$ pour $p = 1, 2, \dots, n$, car $\lambda_p^{r_p} |e^{x_p - \mu_p} r_p^{y_p + i y_p}| = e^{\mu_p} r_p^{x_p - \mu_p} r_p^{y_p} = e^{x_p}$. Il faut montrer que, si $(r_1, r_2, \dots, r_n), (r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$

sont deux systèmes de n nombres réels, la fonction d'une variable réelle $t \rightarrow \log M(r_1 + t r'_1, r_2 + t r'_2, \dots, r_n + t r'_n)$ est convexe. Pour cela, il suffit de montrer que, si h est un nombre réel quelconque, la fonction $\log M(r_1 + t r'_1, \dots, r_n + t r'_n) + h t$, considérée dans un intervalle $[a, b]$, atteint sa borne supérieure en l'un au moins des points a, b . Raisonnons par l'absurde: supposons que la fonction $M(r_1 + t r'_1, r_2 + t r'_2, \dots, r_n + t r'_n) e^{h t}$, considérée dans $[a, b]$, n'atteigne sa borne supérieure ni en a , ni en b , mais en un point t_0 . On peut évidemment supposer $t_0 = 0$. Comme K' est compact ainsi que l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, il existe un point $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in K'$ et des nombres d_1, d_2, \dots, d_n dans $[-\pi, +\pi]$, tels que $|\varphi((c_p, d_p, r_p))| = M(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Posons:

$$\psi(t) = \varphi((c_p, d_p, r_p + t r'_p)) e^{h t} = f((e^{c_p - \mu_p r_p - \mu_p r'_p t + i d_p} e^{i d_p}) e^{h t}).$$

On a $|\psi(t)| \leq |\psi(0)|$ pour $|t|$ assez petit, et ψ n'est pas constante. Remplaçons t par $u + i v$ (u et v réels), ce qui ne fait pas de difficultés puisque f est une fonction entière. On a $\psi(u + i v) = f((e^{c_p - \mu_p r_p - \mu_p r'_p u + i(d_p - \mu_p r'_p v)})) e^{h u} e^{i h v}$, donc $|\psi(u + i v)| \leq |\psi(0)|$ pour $|u|$ assez petit et v quelconque. Donc ψ est constante, ce qui est contradictoire. Si maintenant K n'est pas fermé, on peut le remplacer par son adhérence \bar{K} sans changer $M(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Enfin, si la borne inférieure des fonctions coordonnées sur K n'est pas positive, remarquons que K est réunion d'une suite croissante d'ensembles K_n tels que, pour chaque n , la borne inférieure des fonctions coordonnées sur K_n soit > 0 ; alors, $\log M(r_1, r_2, \dots, r_n)$ apparaît comme l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions convexes, donc est convexe.

Bibliographie.

- [1] E. HEINZ, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **123**, 415—438 (1951). — [2] T. KATO, Notes on Some Inequalities for Linear Operators. Math. Ann. **125**, 208—212 (1952). — [3] J. D. TAMARKIN et A. ZYGMUND, Proof of a theorem of THORIN, Bull. Amer. Math. Soc., **50**, 279—282 (1944). — [4] G. O. THORIN, Convexity theorems generalising those of M. RIESZ and HADAMARD with some applications. Communications du Séminaire math. de l'Univ. de Lund **9**, (1948).

(Eingegangen am 21. Oktober 1952.)

Eine Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen.

Von

FRIEDRICH BACHMANN in Kiel*.

Nachdem HJELMSLEV in seinen Untersuchungen zur ebenen metrischen Geometrie gezeigt hatte, wie fruchtbar das Rechnen mit Spiegelungen ist, hat ARNOLD SCHMIDT die ebene absolute Geometrie aus den rein gruppentheoretischen Tatsachen, daß eine von involutorischen Elementen erzeugbare Gruppe vorliegt, deren involutorische Erzeugende gewissen Axiomen genügen, entwickelt¹⁾.

Setzt man sich das Ziel, weitere geometrische Transformationsgruppen in entsprechender Weise zu charakterisieren, so wird die Gruppe $L(K)$ aller gebrochen-linearen Transformationen

$$(*) \quad X' = (AX + B)(CX + D)^{-1} \text{ mit } AD - BC \neq 0$$

über einem beliebigen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ besonderes Interesse verdienen, da sie die Gruppe der Projektivitäten auf der Geraden, und auch die Gruppe der Projektivitäten, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt in sich überführen, darstellt und durch Spezialisierung zur Bewegungsgruppe einer ebenen hyperbolischen Geometrie und zur Gruppe der direkten Kreisverwandtschaften führt.

Im folgenden soll diese Gruppe als eine abstrakte, aus ihren involutorischen Elementen erzeugbare Gruppe durch Axiome, denen die involutorischen Elemente genügen, gekennzeichnet werden.

Wir beginnen mit der Angabe des Axiomensystems (§ 1) und betrachten eine beliebige Gruppe G , die dem Axiomensystem genügt. In G lassen sich die Involutionen zu Büscheln zusammenfassen, unter denen wir ordinäre und singuläre unterscheiden (§ 2). Die singulären Büschel nennen wir kurz Punkte, führen eine Punktrechnung ein und zeigen, daß die Punkte einen Körper von Charakteristik $\neq 2$ bilden (§ 3). Die durch G induzierten Punktabbildungen, welche eine zu G isomorphe Gruppe bilden, erweisen sich als die Transformationen (*) über diesem Körper (§ 4).

Daß umgekehrt jede Gruppe $L(K)$ dem Axiomensystem genügt, läßt sich mit elementaren Schlüssen der Linearen Algebra bestätigen (§ 5). Im Zusammenhang mit diesem Nachweis gehen wir kurz ein auf die Deutung der Gruppe $L(K)$ als Gruppe der projektiven Kollineationen, die einen Kegel-

* ARNOLD SCHMIDT zum 50. Geburtstag gewidmet.

¹⁾ ARNOLD SCHMIDT, Die Dualität zwischen Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. 118, 609—625 (1943), und F. BACHMANN, Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Ann. 123, 341—344 (1951).

schnitt in sich überführen²⁾, da es von Vorteil ist, für eine geometrische Veranschaulichung unseres axiomatischen Aufbaues diese Deutung heranzuziehen; z. B. entsprechen die singulären Büschel in dieser Deutung den Punkten des Kegelschnitts.

Im Anhang wird eine Bemerkung über die Bewegungsgruppe einer ebenen elliptischen Geometrie gemacht, die sich, wie ARNOLD SCHMIDT gezeigt hat, besonders einfach durch Eigenschaften ihrer involutorischen Elemente charakterisieren läßt³⁾ und für die R. BAER Kennzeichnungen von einer Reihe von verschiedenen Standpunkten angegeben hat⁴⁾.

§ 1. Das Axiomensystem.

Grundannahme. *Es sei G eine Gruppe, in der jedes Element als Produkt von zwei involutorischen Elementen darstellbar ist.*

Die involutorischen Elemente aus G seien mit kleinen lateinischen, beliebige Elemente aus G mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet⁵⁾.

α, β mögen *verbindbar* heißen, wenn ein v existiert, so daß αv und βv involutorisch sind.

Axiom 1. *Ist $a \neq b$ und sind abc, abd involutorisch, so ist acd involutorisch.*

Axiom 2. *Es gibt a, b , welche nicht verbindbar sind.*

Axiom 3. *Sind weder a, b noch c, d verbindbar, so sind ab, cd verbindbar.*

Axiom 4. *Sind weder a, b noch a, c noch a, d verbindbar, so ist abc oder abd oder acd involutorisch.*

§ 2. Büschel von Involutionen.

Wir führen in G zunächst Büschel von Involutionen ein, durch eine Klassenbildung, die darauf beruht, daß die dreistellige Relation

(1) abc ist involutorisch

reflexiv, symmetrisch und transitiv in folgendem Sinne ist. (1) gilt stets, wenn a, b, c nicht alle verschieden sind; z. B. ist aba stets involutorisch, da das Transformierte einer Involution eine Involution ist. Gilt (1), so ist auch jedes Produkt involutorisch, das aus dem gegebenen durch eine Vertauschung der Faktoren hervorgeht; z. B. ist, wenn (1) gilt, $cba = abc$, und $bac = c(cba)c$ als Transformierte einer Involution involutorisch. Während also die Reflexivität und Symmetrie der Relation (1) in jeder Gruppe gelten, wird die Transitivität durch Axiom 1 ausgesprochen. Als Folgerungen gelten⁶⁾:

²⁾ O. VELEN and J. W. YOUNG, Projective geometry I (1910), Chap. VIII; II (1918), § 108. — Zitiert als VY.

³⁾ ARNOLD SCHMIDT, a. a. O. und Über die Bewegungsgruppe der ebenen elliptischen Geometrie. J. reine angew. Math. 186, 230—240 (1949).

⁴⁾ R. BAER, The group of motions of a two dimensional elliptic geometry. Compositio mathematica 9, 241—288 (1951).

⁵⁾ v ist stets als lateinischer Buchstabe zu lesen. Die involutorischen Elemente — definiert als die Elemente der Ordnung 2 — nennen wir auch Involutionen.

⁶⁾ Satz 1 ist der grundlegende Satz von den drei Spiegelungen a, b, c in seiner allgemeinen Form, Satz 2 die Umkehrung. Setzt man in Satz 1 für a speziell a' und in Satz 2 für a' speziell a , so können die Voraussetzungen, daß $a' b' a', ab' a$ involutorisch sind, als allgemeingültig weggelassen werden, und die entstehenden Aussagen stellen beide das Axiom 1 dar. Sowohl Satz 1 als Satz 2 hat also Axiom 1 zur Folge; und da im Text das Umgekehrte gezeigt wird, sind Axiom 1, Satz 1, Satz 2 drei Aussagen über die involutorischen Elemente, die in einer beliebigen Gruppe untereinander äquivalent sind.

Satz 1. Ist $a \neq b'$ und sind $a'b'a, a'b'b, a'b'c$ involutorisch, so ist abc involutorisch.

Satz 2. Ist $a \neq b$ und sind $a'b'a, a'b'b, abc$ involutorisch, so ist $a'b'c$ involutorisch.

Beweis von Satz 1. Wegen $a \neq b'$ kann a nicht sowohl gleich a' als gleich b' sein. Da a' und b' in dem Satz gleichberechtigt auftreten, dürfen wir $a \neq a'$ annehmen. Aus $a \neq b'$ und $a'b'a, a'b'b$ involutorisch folgt nach Axiom 1, daß $a'ab$ involutorisch ist, und ebenso aus $a \neq b'$ und $a'b'a, a'b'c$ involutorisch, daß $a'ac$ involutorisch ist. Mit $a'ab, a'ac$ sind auch $aa'b, aa'c$ involutorisch, und hieraus folgt wegen $a \neq a'$ nach Axiom 1, daß abc involutorisch ist.

Beweis von Satz 2. Für $a' = b'$ ist die Behauptung trivial. Da also $a \neq b'$ angenommen werden darf und $a'b'a, a'b'b$ nach Voraussetzung involutorisch sind, ist nach Axiom 1 $a'ab$, und entsprechend $b'ab$ involutorisch. Da also auch aba', abb' involutorisch sind und da nach Voraussetzung $a \neq b$ und abc involutorisch ist, ist nach Satz 1 $a'b'c$ involutorisch.

Ist $a \neq b$, so verstehen wir unter dem durch a, b bestimmten Büschel $J(ab)$ die Gesamtheit der Involutionen c , für die (1) gilt⁷⁾. Es gilt nun der Satz, daß jedes Büschel durch je zwei seiner Involutionen eindeutig bestimmt ist:

Satz 3. Aus $a \neq b$ und $a, b \in J(a'b')$ folgt $J(a'b') = J(ab)$.

Der Satz besagt: Ist $a \neq b, a' \neq b'$ und sind $a'b'a, a'b'b$ involutorisch, so folgt für beliebiges c daraus, daß $a'b'c$ involutorisch ist, daß abc involutorisch ist, und umgekehrt. Das sind aber die Aussagen von Satz 1 und 2.

Unter der Voraussetzung $a, b, c \in J(a'b')$ ist abc nach Satz 1 eine Involution. Für diese Involution gilt dann auch: $abc \in J(a'b')$. Ist $a = b$, so folgt diese Behauptung unmittelbar aus der Voraussetzung $c \in J(a'b')$. Ist $a \neq b$, so folgt aus den Voraussetzungen $a, b \in J(a'b')$ nach Satz 3 $J(a'b') = J(ab)$; und da $ab(abc) = abcb a$ involutorisch ist, also $abc \in J(ab)$ gilt, ergibt sich $abc \in J(a'b')$.

Ein Büschel ist nach dem so ergänzten Satz 1 eine, nach Satz 2 maximale, Menge von Involutionen aus G mit der Eigenschaft, daß das Produkt von je drei Involutionen der Menge wieder zur Menge gehört.

Diese Einführung des Büschelbegriffs ist in jeder Gruppe möglich, deren involutorische Elemente dem Axiom 1 genügen. Machen wir nun von der Grundannahme Gebrauch, nach der jedes Element der von uns betrachteten Gruppe als Produkt von zwei Involutionen darstellbar ist, und definieren wir, für jedes $\alpha \neq 1$, $J(\alpha)$ als die Menge der Involutionen c , für die αc involutorisch ist, so ist $J(\alpha)$ ein Büschel. Wir können die Sätze 1—3 daher auch in folgender Form aussprechen:

Satz 1'. Aus $a, b, c \in J(\alpha)$ folgt $abc \in J(\alpha)$.

Satz 2'. Aus $a \neq b$ und $a, b \in J(\alpha)$ und abc involutorisch folgt $c \in J(\alpha)$.

Satz 3'. Aus $a \neq b$ und $a, b \in J(\alpha), J(\beta)$ folgt $J(\alpha) = J(\beta)$.

v heißt eine Verbindung von α, β , wenn αv und βv involutorisch sind, d. h. für $\alpha, \beta \neq 1$, wenn v den beiden Büscheln $J(\alpha), J(\beta)$ angehört. v ist dann auch

⁷⁾ Das J -Symbol übernehme ich aus der angeführten Arbeit von R. BAER.

eine Verbindung aller α', β' mit $J(\alpha') = J(\alpha)$, $J(\beta') = J(\beta)$. Wir werden daher eine Involution v mit $v \in J(\alpha)$, $J(\beta)$ eine *Verbindung der beiden Büschel* nennen. Satz 3' lehrt:

Satz 3''. *Zwei verschiedene Büschel haben höchstens eine Verbindung.*

Neben der Relation (1) ist die zweistellige Relation

(2) ab ist involutorisch

von Bedeutung. Sie ist gleichwertig mit: a, b kommutieren und es ist $a \neq b$. Sie ist symmetrisch. Mit dem J -Symbol schreiben wir $b \in J(a)$, oder gleichwertig $a \in J(b)$.

Jede Involution g bestimmt ein Büschel $J(g)$, bestehend aus den c , für die gc involutorisch ist. Es gilt:

Satz 4. Aus $J(g) = J(g')$ folgt $g = g'$.

Beweis. Wird, entsprechend der Grundannahme, $g = ab$ gesetzt, so gilt $a \neq b$ und $a, b \in J(g)$, und nach Voraussetzung auch $a, b \in J(g')$, so daß also auch ag', bg' involutorisch sind. Man kann daher aus $a \neq b$ und $a, b \in J(g)$ und der Gleichung $ab(bg') = ag'$ nach Satz 2' schließen, daß $bg' \in J(g)$ gilt, d. h. daß $gg'b$ involutorisch ist. Wäre nun $g \neq g'$, so würde aus $g, g' \in J(b)$ und $gg'b$ involutorisch wiederum nach Satz 2' folgen, daß $b \in J(b)$ gilt. Das ist unmöglich.

Wir nennen ein Büschel $J(\alpha)$ *ordinär*, wenn ein g existiert, so daß $J(\alpha) = J(g)$ ist, sonst *singulär*. Ist $J(\alpha) = J(g)$, so kann g als der, nach Satz 4 eindeutig bestimmte involutorische Träger des ordinären Büschels $J(\alpha)$ bezeichnet werden. Es besteht also eine eineindeutige Beziehung zwischen den ordinären Büscheln und den einzelnen involutorischen Elementen als Trägern.

Wir geben einige weitere Kennzeichnungen der ordinären und singulären Büschel. Unmittelbar ergibt sich:

Satz 5. a) *Je zwei verschiedene Involutionen eines ordinären Büschels sind verbindbar, je zwei verschiedene Involutionen eines singulären Büschels sind nicht verbindbar.* b) *Ein ordinäres Büschel enthält Involutionen, für die (2) gilt, ein singuläres nicht.*

Beweis von a): Es sei $J(\alpha)$ das gegebene Büschel und $a, b \in J(\alpha)$ mit $a \neq b$; nach Satz 3' ist dann $J(\alpha) = J(ab)$. Ist nun $J(ab) = J(g)$ ordinär, so sind $a, b \in J(g)$, also ag, bg involutorisch, d. h. g ist eine Verbindung von a, b . Und umgekehrt: Ist v eine Verbindung von a, b , so sind av, bv involutorisch, also $a, b \in J(v)$ und nach Satz 3' $J(ab) = J(v)$ ordinär.

Beweis von b): Für ein ordinäres Büschel $J(g)$ setze man, entsprechend der Grundannahme, $g = ab$; aus dieser Gleichung folgt $a, b \in J(g)$ und ab involutorisch. Umgekehrt: Aus $a, b \in J(\alpha)$ und $ab = s$ involutorisch folgt $a \neq b$, und nach Satz 3' $J(\alpha) = J(ab) = J(s)$ ordinär.

Wir schreiben $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \alpha^\gamma$. Ein Element γ transformiert jedes Büschel in ein Büschel: $J(\alpha)^\gamma = J(\alpha^\gamma)$, und zwar ein ordinäres in ein ordinäres, ein singuläres in ein singuläres.

Ein weiterer Unterschied zwischen den ordinären und den singulären Büscheln ergibt sich, wenn man nach den Involutionen fragt, die ein Büschel in sich transformieren. Zunächst wird jedes Büschel durch jede seiner In-

volutionen in sich transformiert: Aus $c \in J(\alpha)$ folgt $J(\alpha)^c = J(\alpha)$. (Es sei αc involutorisch. Ist dann $\alpha^c s$ involutorisch, so ist $c \alpha c s = c \alpha \alpha^{-1} s = \alpha^{-1} s$ involutorisch, und also αs involutorisch; und dieser Schluß ist umkehrbar.) Für singuläre Büschel gilt auch die Umkehrung dieser Tatsache:

Satz 6. *Es sei $J(\alpha)$ singulär. Aus $c \in J(\alpha)$ folgt $J(\alpha)^c = J(\alpha)$, und umgekehrt.*

Beweis der Umkehrung. Angenommen, es ist $J(\alpha)^c = J(\alpha)$ und $c \notin J(\alpha)$. Es sei s eine beliebige Involution mit $s \in J(\alpha)$. Wegen $s^c \in J(\alpha)^c$, $J(\alpha)^c = J(\alpha)$ ist auch $s^c \in J(\alpha)$. Aus $s, s^c \in J(\alpha)$ und $c \notin J(\alpha)$ und $ss^c c = s c s$ involutorisch folgt nach Satz 2' $s = s^c$. c muß also $J(\alpha)$ elementweise in sich transformieren. Es wäre daher, wenn $J(\alpha) = J(ab)$ gesetzt wird, $a^c = a$, $b^c = b$, und also ac , bc involutorisch, also $a, b \in J(c)$, und nach Satz 3' $J(ab) = J(c)$ ordinär.

Im Gegensatz hierzu wird ein ordinäres Büschel auch durch seinen Träger in sich transformiert. Die Umkehrung lautet hier: Aus $J(g)^c = J(g)$ folgt $c = g$ oder $c \in J(g)$. Denn aus $J(g)^c = J(g)$ folgt nach Satz 4 $g^c = g$; und diese Gleichung gilt erstens, wenn $c = g$ ist, und bedeutet zweitens im Falle $c \neq g$, daß gc involutorisch ist, also $c \in J(g)$ gilt.

Aus Satz 6 ziehen wir die

Folgerung. *Ist $J(\alpha)$ ein singuläres Büschel, dem a angehört, und $c \in J(\alpha)$, so ist $J(\alpha)^c$ ein von $J(\alpha)$ verschiedenes singuläres Büschel, dem a angehört.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $c \in J(\alpha)$; denn $c, a \in J(\alpha)$ und $c \in J(a)$ würde nach Satz 5b der Singularität von $J(\alpha)$ widersprechen. $J(\alpha)^c$ ist ein singuläres Büschel, welches daher nach Satz 6 von $J(\alpha)$ verschieden ist, und dem $a^c = a$ angehört.

Wir nehmen nun die Axiome 2—4 hinzu. Da nach Satz 5a zwei Involutionen dann und nur dann nicht verbindbar sind, wenn sie ein singuläres Büschel bestimmen, geben die Axiome die folgenden Sätze über die singulären Büschel:

Satz 7. *Es gibt wenigstens ein singuläres Büschel.*

Satz 8. *Zwei singuläre Büschel sind stets verbindbar.*

Satz 9. *Eine Involution gehört höchstens zwei singulären Büscheln an.*

Beweis von Satz 9. Es seien $J(ab)$, $J(ac)$ zwei verschiedene singuläre Büschel, denen a angehört. Wegen der Verschiedenheit ist abc nach Satz 3' nicht involutorisch. Ist nun auch $J(ad)$ ein singuläres Büschel, dem a angehört, so ist nach Axiom 4 abd oder acd involutorisch, d. h. $d \in J(ab)$ oder $d \in J(ac)$, also nach Satz 3' $J(ad) = J(ab)$ oder $J(ad) = J(ac)$.

Wir beweisen nun einige Erweiterungen dieser unmittelbar aus den Axiomen folgenden Sätze.

Satz 10. *Es gibt wenigstens vier verschiedene singuläre Büschel.*

Beweis. $J(ab)$ sei das nach Satz 7 existierende singuläre Büschel. Nach Satz 6, Folgerung gibt es ein singuläres Büschel $J(\alpha) \neq J(ab)$ mit $a \in J(\alpha)$, und ein singuläres Büschel $J(\beta) \neq J(ab)$ mit $b \in J(\beta)$; es ist dann nach Satz 3' $a \notin J(\beta)$. Daher ist $J(\alpha) \neq J(\beta)$. Man betrachte nun das singuläre Büschel $J(\beta)^a$. Es ist $J(\beta)^a \neq J(ab)$, $J(\alpha)$, $J(\beta)$. Denn aus $a \in J(\beta)$ folgt erstens $a^a = a \in J(\beta)^a$, also, da $a \in J(ab)$, $J(\alpha)$ gilt, $J(\beta)^a \neq J(ab)$, $J(\alpha)$, und zweitens nach Satz 6 $J(\beta)^a \neq J(\beta)$.

Satz 11. Ist $J(\alpha)$ singulär und $c \in J(\alpha)$, so sind $J(\alpha)$, $J(c)$ verbindbar.

Zum Beweis betrachte man das Büschel $J(\alpha)^c$. Es ist nach Satz 6 von $J(\alpha)$ verschieden. Es sei v eine Verbindung dieser beiden Büschel: $v \in J(\alpha)$, $J(\alpha)^c$ (Satz 8). Durch Transformation mit c ergibt sich: $v^c \in J(\alpha)^c$, $J(\alpha)$. Daher ist nach Satz 3' $v = v^c$ und also, wegen $c \neq v$, cv involutorisch, d. h. $v \in J(c)$. Also gilt $v \in J(\alpha)$, $J(c)$.

Aus Satz 6, Folgerung und Satz 9 folgt

Satz 12. Gehört a einem singulären Büschel an, so genau einem zweiten, und mit $a = v$ die erste Teilaussage von

Satz 13. $J(\alpha)$, $J(\beta)$ seien verschiedene singuläre Büschel und v ihre Verbindung. Aus $c \in J(v)$ folgt $J(\alpha)^c = J(\beta)$, und umgekehrt.

Beweis der Umkehrung. Aus $J(\alpha)^c = J(\beta)$ folgt wie im Beweis von Satz 11, daß c die Verbindung v der beiden Büschel $J(\alpha)$, $J(\beta)$ in sich transformiert: $v^c = v$. Ferner ist $c \neq v$ (denn $J(\alpha)^c = J(\beta) \neq J(\alpha)$, $J(\alpha)^c = J(\alpha)$). Daher gilt $c \in J(v)$.

§ 3. Punktrechnung.

Die singulären Büschel nennen wir kurz *Punkte* und bezeichnen sie mit großen lateinischen Buchstaben (außer G, J, K, L). Für die Punkte gelten die folgenden Sätze:

Satz 6'. Aus $c \in A$ folgt $A^c = A$, und umgekehrt.

Satz 8'. Zwei verschiedene Punkte sind stets eindeutig verbindbar.

Satz 10'. Es gibt wenigstens vier verschiedene Punkte.

Satz 11'. Ist $c \in A$, so sind A , $J(c)$ eindeutig verbindbar.

Satz 12'. Gehört a einem Punkt an, so genau einem zweiten.

Satz 13'. Sei $A \neq B$ und v die Verbindung. Aus $c \in J(v)$ folgt $A^c = B$, und umgekehrt.

Grundlegend für die folgende Punktrechnung ist der Satz, daß es genau eine Involution gibt, die zwei gegebene Punktepaare vertauscht:

Satz 14. Sind $A, B \neq U, V$, so gibt es genau eine Involution s mit $A^s = B$, $U^s = V$.

Beweis. Ist zunächst $A = B$, $U = V$, so sind die Bedingungen für s nach Satz 6' äquivalent zu: $s \in A$, U , d. h. s ist eine Verbindung von A , U . Wegen $A \neq U$ gibt es nach Satz 8' genau ein solches s .

Ist etwa $A \neq B$, $U = V$, und ist v die Verbindung von A, B , so sind die Bedingungen für s nach Satz 13' und 6' äquivalent zu: $s \in J(v)$, U , d. h. s ist eine Verbindung von $J(v)$, U . Es ist nach Satz 12' $v \notin U$; denn v gehört A, B mit $A \neq B$ an, und daher keinem weiteren Punkt. Also sind $J(v)$, U nach Satz 11' eindeutig verbindbar.

Ist $A \neq B$, $U \neq V$, v die Verbindung von A, B und w die Verbindung von U, V , so sind die Bedingungen für s nach Satz 13' äquivalent zu: $s \in J(v)$, $J(w)$, d. h. s ist eine Verbindung von $J(v)$, $J(w)$. Es ist $J(vw)$ ordinär, nach Satz 12': da v, w verschiedenen Punktepaaren angehören, ist zunächst $v \neq w$; und wäre $J(vw)$ singulär, so wäre dies ein Punkt, dem v, w beide angehören. Also gibt es nach Satz 13a eine Verbindung von v, w , also von $J(v)$, $J(w)$, und diese ist, da aus $v \neq w$ nach Satz 4 $J(v) \neq J(w)$ folgt, nach Satz 3'' eindeutig.

Wir führen nun nach dem Vorbild von VY I, §81 eine Punktrechnung ein. Hierzu zeichnen wir zwei verschiedene Punkte O und U aus; ihre Verbindung sei o . Wir erklären für die Punkte $\neq U$ eine Addition, mit Hilfe der Involutionen, welche U in sich transformieren (nach Satz 6' sind dies die Involutionen aus U). Für $A, B \neq U$ definieren wir:

$A + B$ ist der Punkt, in den O durch diejenige Involution transformiert wird, welche U in sich und A in B transformiert (Satz 14), also:

(1) Ist a die Involution mit $U^a = U, A^a = B$, so ist $A + B = O^a$.

Die Addition ist stets eindeutig ausführbar; es ist $A + B \neq U$. Die Addition ist nach Definition kommutativ. O ist ein Nullelement. A^o ist zu A entgegengesetzt und wieder $\neq U$. Es ist $A^o = A$ nur für $A = O$; denn aus $A^o = A$ folgt nach Satz 6' $o \in A$, also da dann $o \in A, O, U$ und $A, O \neq U$ gilt, nach Satz 12' $A = O$. Ferner gilt das assoziative Gesetz, da für die Involutionen aus U Satz 1' gilt:

Seien $A, B, C \neq U$ und a, b, c die Involutionen, die U in sich transformieren und

(2) $A^a = B, B^b = C, C^c = A + B$

erfüllen. Aus diesen Relationen folgen, auf Grund von (1), die weiteren

(3) $A + B = O^a, B + C = O^b, (A + B) + C = O^c$.

abc ist eine Involution, und daher $c = abcab$. Aus den Gleichungen (2) und den beiden ersten Gleichungen (3) folgt

$$A^{abca} = B^{bca} = C^{cab} = (A + B)^{ab} = O^b = B + C.$$

Es gilt also $A^c = B + C$, und daher nach (1) $A + (B + C) = O^c$. Aus dieser und der dritten Gleichung (3) folgt die Behauptung.

Die Punkte $\neq U$ bilden also hinsichtlich der Addition eine abelsche Gruppe, mit $A + A = O$ nur für $A = O$.

Wir erklären nun für die Punkte $\neq O, U$ eine Multiplikation, mit Hilfe der Involutionen, welche O und U vertauschen (nach Satz 13' sind dies die Involutionen aus $J(o)$). Hierzu zeichnen wir einen dritten Punkt $E \neq O, U$ aus. Für $A, B \neq O, U$ definieren wir:

AB sei der Punkt, in den E durch diejenige Involution transformiert wird, welche O in U und A in B transformiert (Satz 14), also:

(4) Ist a die Involution mit $O^a = U, A^a = B$, so ist $AB = E^a$.

Die Multiplikation ist stets eindeutig ausführbar; es ist $AB \neq O, U$. Die Multiplikation ist kommutativ. E ist Einselement. Ist e die Involution, die O in U und E in sich transformiert, so ist A^e zu A invers und wieder $\neq O, U$. Das Assoziativgesetz wird wie bei der Addition bewiesen, aus der Tatsache, daß für die Involutionen aus $J(o)$ Satz 1' gilt.

Die Punkte $\neq O, U$ bilden hinsichtlich der Multiplikation eine abelsche Gruppe.

Wir definieren noch:

(5) $OA = AO = O$ für jedes $A \neq U$.

Wir wollen nun die Gültigkeit des distributiven Gesetzes beweisen. Es sei wieder e die Involution, die O in U und E in sich transformiert; dann ist

$$O^e = U, X^e = X^{-1} \text{ für } X \neq O, U.$$

Ferner sei $C \neq O$, U und c die Involution, welche O in U und E in C transformiert; dann ist

$$O^c = U, X^c = CX^{-1} \text{ für } X \neq O, U.$$

Daher ergibt sich, unter Berücksichtigung von (5):

$$(6) \quad U^{cc} = U, X^{cc} = CX \text{ für } X \neq U; \quad U^{ce} = U, X^{ce} = C^{-1}X \text{ für } X \neq U.$$

Nun seien weiter $A, B \neq U$, und es sei a die Involution, welche $A + B$ definiert, also die drei Gleichungen (1) erfüllt. Dann ist $ceaec$ als Transformierte einer Involution eine Involution d , die den Gleichungen

$$(7) \quad U^d = U, (CA)^d = CB, C(A+B) = O^d$$

genügt, wie man aus (1) und (6) entnimmt:

$$U^{ceaec} = U^{aec} = U^{ec} = U, (CA)^{ceaec} = A^{aec} = B^{ec} = CB,$$

$$O^{ceaec} = O^{aec} = (A+B)^{ec} = C(A+B).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (7) folgt, auf Grund der Definition der Addition: $CA + CB = O^d$; und daher ergibt sich mit der dritten Gleichung (7): $C(A+B) = CA + CB$. Dies Gesetz gilt schließlich nach (5) trivialerweise für $C = O$.

Wir haben also für die eingeführten Rechenoperationen gezeigt:

Satz 15. Die Punkte $\neq U$ bilden einen Körper K von Charakteristik $\neq 2$.

Ist P_1, P_2, P_3 ein Tripel verschiedener Punkte und Q_1, Q_2, Q_3 ein zweites, so gibt es nach Satz 14 Involutionen a, b , so daß $P_i^{ab} = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Denn nimmt man etwa an, daß $P_i = Q_i$ entweder höchstens für $i = 3$ oder mindestens für $i = 1, 2$ gilt, so kann man a so wählen, daß $P_1^a = Q_2, P_2^a = Q_1$ ist, und darauf b so, daß $Q_3^b = Q_1, (P_3^a)^b = Q_3$ ist. Ist daher O', E', U' ein von O, E, U verschiedenes Tripel von Grundpunkten, welches bei unserer Definition der Verknüpfungen zu einem Körper K' führt, so gibt es ein α aus G , das O, E, U in O', E', U' transformiert. Dann ist $X' = X^\alpha$ ein Isomorphismus von K und K' , nämlich eine eindeutige Abbildung von K auf K' und

$$(8) \quad (A+B)^\alpha = A^\alpha + B^\alpha, (AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha \text{ für alle } A, B \in K.$$

Die Gültigkeit dieser Gleichungen ergibt sich aus folgender Tatsache: Ist a die Involution, die in K die Summe bzw. das Produkt von A und B definiert, so ist a^α die Involution, die in K' die Summe bzw. das Produkt von A^α und B^α definiert; für Produkte, in denen A oder B gleich O ist, ist ferner die Festsetzung (5) heranzuziehen. Es gilt also:

Korollar. Eine Änderung der Grundpunkte führt zu einem isomorphen Körper.

§ 4. Darstellung durch gebrochen-lineare Transformationen.

Jedes Element α aus G induziert eine eindeutige Abbildung

$$(1) \quad X' = X^\alpha$$

der Menge der Punkte auf sich. Offenbar stellt die Zuordnung von α zu (1) einen Homomorphismus zwischen G und der Gruppe der induzierten Punktabbildungen her. Der Homomorphismus ist ein Isomorphismus, da nur $\alpha = 1$ die identische Punktabbildung induziert. Diese Behauptung besagt, daß das

Einelement das einzige Element aus G ist, welches jeden Punkt in sich transformiert; wir beweisen hierzu den folgenden schärferen Satz, der der Eindeutigkeitsaussage des Fundamentalsatzes der Projektiven Geometrie entspricht:

Satz 16. *Transformiert α drei verschiedene Punkte je in sich, so ist $\alpha = 1$.*

Zum Beweis sei α ein beliebiges, vom Einselement verschiedenes Element aus G .

A sei, falls $J(\alpha)$ singulär ist, ein beliebiger von dem Punkt $J(\alpha)$ verschiedener Punkt, und falls $J(\alpha) = J(g)$ ordinär ist, ein beliebiger Punkt, dem g nicht angehört. Wir behaupten, daß $A^\alpha \neq A$ ist. Es sei a die Verbindung von $J(\alpha)$, A (Satz 8', 11'). Es ist dann αa , also $a\alpha$ involutorisch, und daher α darstellbar in der Form $\alpha = ab$, und $A^\alpha = A^b$. Aus $A^b = A$ würde nach Satz 6' $b \in A$ folgen; man hätte $a \neq b$ und $a, b \in J(\alpha)$, A , also nach Satz 3' $J(\alpha) = A$. Dies widerspricht im ersten Fall der Annahme $J(\alpha) \neq A$, und im zweiten Fall der Annahme, daß $J(\alpha)$ ordinär ist.

Ist also $J(\alpha)$ singulär, so ist $J(\alpha)$ der einzige Punkt, den α in sich transformiert; und ist $J(\alpha) = J(g)$ ordinär, so kann α nur Punkte in sich transformieren, denen g angehört, also nach Satz 12' höchstens zwei. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß die Punktabbildungen (1) mit den gebrochen-linearen Transformationen

(2) $X' = (AX + B)(CX + D)^{-1}$ mit $A, B, C, D \in K$ und $AD - BC \neq 0$ übereinstimmen. Dabei denken wir die für $X \in K$, $CX + D \neq 0$ gültige Vorschrift (2) zu einer eindeutigen Abbildung der Menge aller Punkte auf sich in üblicher Weise durch die folgenden Festsetzungen ergänzt:

Bei $C = 0$ sei für $X = U$: $X' = U$

Bei $C \neq 0$ sei für $X = U$: $X' = AC^{-1}$, und für $X = -DC^{-1}$: $X' = U$

und behaupten:

Satz 17. *Zu jedem Element $\alpha \in G$ gibt es Elemente*

(3) $A, B, C, D \in K$ mit $AD - BC \neq 0$,

so daß

(4) $X^\alpha = (AX + B)(CX + D)^{-1}$

ist, und zu Elementen (3) gibt es ein Element $\alpha \in G$, so daß (4) gilt.

Zu einem Element $\alpha \in G$ gibt es höchstens ein, bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\neq 0$ bestimmtes Quadrupel (3), so daß (4) gilt, da zwei Transformationen (2) nur dann gleich sind, wenn die Koeffizienten proportional sind. Seien ferner zu zwei Elementen aus G Quadrupel (3) so bestimmt, daß je die Relation (4) gilt. Sind die beiden Elemente aus G verschieden, so können die beiden Quadrupel (3) nicht proportional sein, da, wie wir gesehen haben, verschiedene Elemente aus G verschiedene Abbildungen (1) induzieren. Und sind die beiden Elemente aus G beliebig, so stimmt das Produkt der beiden Abbildungen (1) mit dem Produkt der beiden Transformationen (2) überein, — wobei im letzten Produkt in üblicher Weise die Faktoren von rechts nach

links geschrieben sind. Sobald also Satz 17 bewiesen ist, folgt die Isomorphie von G und der Gruppe $L(K)$ der Transformationen (2).

Eine Transformation (2) ist dann und nur dann involutorisch, wenn $D = -A$ ist, und wir beweisen zunächst:

Satz 17*. *Zu jeder Involution $s \in G$ gibt es Elemente*

$$(5) \quad A, B, C \in K \text{ mit } A^2 + BC \neq 0,$$

so daß

$$(6) \quad X^s = (AX + B)(CX - A)^{-1}$$

ist, und zu Elementen (5) gibt es eine Involution $s \in G$, so daß (6) gilt.

Beweis von Satz 17*.

Sei zunächst $a \in G$ eine Involution mit $U^a = U$. Wird $O^a = A$ gesetzt, so ist nach der Definition der Addition

$$(7) \quad X^a = -X + A.$$

Sei zweitens $b \in G$ eine Involution mit $O^b = U$. Wird $E^b = B$ gesetzt, so ist $B \neq 0$ und nach der Definition der Multiplikation

$$(8) \quad X^b = BX^{-1} \text{ mit } B \neq 0.$$

Sei schließlich $c \in G$ eine beliebige Involution mit $U^c \neq U$. Es werde $U^c = A$ gesetzt, und es sei a die Involution, für die $U^a = U$, $O^a = A$ gilt (Satz 14). Dann ist aca eine Involution, die O in U transformiert: $O^{aca} = A^{ca} = U^a = U$. Daher gilt, analog zu (8): $X^{aca} = B^*X^{-1}$ mit $B^* = E^{aca} \neq 0$; und da $X^a = -X + A$ ist, ist

$$(9) \quad X^c = -B^*(-X + A)^{-1} + A \text{ oder } X^c = (AX + B)(X - A)^{-1}$$

mit $B = -A^2 + B^*$.

Also gibt es in der Tat zu jeder Involution $s \in G$ Elemente (5), so daß (6) gilt.

Umgekehrt gibt es zunächst, entsprechend der Definition der Verknüpfungen, zu jedem $A \in K$ eine Involution $a \in G$, so daß (7) gilt (nämlich die Involution a mit $U^a = U$, $O^a = A$), und zu jedem $B \in K$ mit $B \neq 0$ eine Involution $b \in G$, so daß (8) gilt (nämlich die Involution b mit $O^b = U$, $E^b = B$). Damit gibt es bereits im Falle $C = 0$ zu den Elementen (5) eine Involution aus G , so daß (6) gilt. Ist $C \neq 0$, so darf $C = E$ angenommen werden. Zu dem Tripel $A, B, E \in K$ mit $A^2 + B \neq 0$ gibt es eine Involution aus G , so daß (6) gilt: Man betrachte a, b^* mit $X^a = -X + A$, $X^{b^*} = (A^2 + B)X^{-1}$; dann ist $X^{ab^*a} = (AX + B)(X - A)^{-1}$.

Beweis von Satz 17. Daß es zu jedem $\alpha \in G$ Elemente (3) gibt, so daß (4) gilt, folgt aus der Grundannahme und Satz 17*. Die Umkehrung gilt, da nach Satz 17* jede involutorische Transformation (2) mit einer Abbildung $X' = X^s$ übereinstimmt und da jede Transformation (2) als Produkt von zwei involutorischen Transformationen (2) darstellbar ist. Von der letzteren Tatsache überzeugt man sich etwa folgendermaßen: Es genügt zu zeigen, daß es zu jeder Transformation (2) eine Transformation

$$(10) \quad X' = (A_1X + B_1)(C_1X - A_1)^{-1} \text{ mit } A_1, B_1, C_1 \in K \text{ und } A_1^2 + B_1C_1 \neq 0$$

gibt, so daß das Produkt von (2) und (10) involutorisch, d. h. $A_1(A - D) + B_1C + C_1B = 0$ ist. Da diese lineare Gleichung nur im Falle $A = D, C,$

$B \neq 0, O, O$ zu berücksichtigen ist und ihr dann höchstens zwei nicht proportionale Tripel A_1, B_1, C_1 mit $A_1^2 + B_1 C_1 = 0$ genügen, sind die Bedingungen für A_1, B_1, C_1 stets erfüllbar.

Aus Satz 17 folgt, wie gesagt,

Satz 18. G ist isomorph zu der Gruppe $L(K)$ der gebrochen-linearen Transformationen (2).

Hierbei ist K der in § 3 konstruierte Körper von Charakteristik $\neq 2$.

§ 5. Die durch das Axiomensystem gekennzeichneten Gruppen.

Satz 19. Die Gruppe $L(K)$ der gebrochen-linearen Transformationen über einem beliebigen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ genügt dem Axiomensystem.

Beweis. Man betrachte die homogenen, von $(0, 0, 0)$ verschiedenen Tripel $T = (A, B, C)$ über K und nenne zwei Tripel $T_1 = (A_1, B_1, C_1), T_2 = (A_2, B_2, C_2)$ zueinander konjugiert, wenn

$$(1) \quad (T_1, T_2) = 2 A_1 A_2 + B_1 C_2 + C_1 B_2 = 0$$

ist. Zu zwei verschiedenen Tripeln T_1, T_2 gibt es stets genau ein Tripel, welches zu beiden konjugiert ist, nämlich das Tripel

$$(2) \quad [T_1, T_2] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, 2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, 2 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \right).$$

$L(K)$ werde als die multiplikative Gruppe der homogenen Matrizen

$$(3) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ mit } AD - BC \neq 0$$

über K aufgefaßt. Jeder involutorischen Matrix

$$(4) \quad s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \text{ mit } A^2 + BC \neq 0$$

werde das Tripel $T = (A, B, C)$ mit $A^2 + BC \neq 0$ zugeordnet. Den involutorischen Matrizen entsprechen also eineindeutig die Tripel, die nicht selbstkonjugiert sind, d. h. für die $(T, T) \neq 0$ ist. Den für das Axiomensystem grundlegenden Beziehungen der Matrizen s_i entsprechen die folgenden Beziehungen der zugeordneten Tripel T_i :

1. $s_1 s_2$ ist dann und nur dann involutorisch, wenn T_1, T_2 konjugiert sind.
2. $s_1 s_2 s_3$ ist dann und nur dann involutorisch, wenn die Determinante $|T_1, T_2, T_3| = 0$ ist, wenn also T_1, T_2, T_3 linear abhängig sind.
3. s_1, s_2 sind dann und nur dann nicht verbindbar (im Sinne der Definition aus § 1), wenn $T_1 \neq T_2$ und $[T_1, T_2]$ selbstkonjugiert ist.

Die beiden ersten Kriterien ergeben sich allein aus der Tatsache, daß eine Matrix (3) dann und nur dann involutorisch ist, wenn $A + D = 0$ ist, und das dritte ist eine Konsequenz des ersten.

Für $L(K)$ gilt die Grundannahme unseres Axiomensystems, wie im Beweis von Satz 17 gezeigt wurde, und die Axiome übersetzen sich auf Grund der vorstehenden Kriterien in die folgenden Aussagen über nicht selbstkonjugierte Tripel T_i :

1. Ist $T_1 \neq T_2$ und sind sowohl T_1, T_2, T_3 als T_1, T_2, T_4 linear abhängig, so sind T_1, T_3, T_4 linear abhängig.
2. Es gibt T_1, T_2 mit $T_1 \neq T_2$, für die $[T_1, T_2]$ selbstkonjugiert ist.
3. Ist $T_1 \neq T_2, T_3 \neq T_4$ und sind $[T_1, T_2], [T_3, T_4]$ selbst-

konjugiert, so gibt es ein nicht selbstkonjugiertes Tripel T , so daß sowohl T_1 , T_2 , T als T_3 , T_4 , T linear abhängig sind. 4. Ist für $i = 2, 3, 4$ $T_1 \neq T_i$ und $[T_1, T_i]$ selbstkonjugiert, so sind T_1, T_2, T_3 oder T_1, T_2, T_4 oder T_1, T_3, T_4 linear abhängig.

1. ist offenbar gültig.

Ein Beispiel für 2. sind $T_1 = (1, 0, 0)$, $T_2 = (1, 0, 1)$.

Nachweis von 3.: Ist zunächst $[T_1, T_2] = [T_3, T_4]$, so sind T_1, T_2, T_3 zu diesem Tripel konjugiert, also linear abhängig, und es kann $T = T_3$ gewählt werden. Ist $[T_1, T_2] \neq [T_3, T_4]$, so wähle man $T = [[T_1', T_2'], [T_3, T_4]]$. T ist nicht selbstkonjugiert, da zwei verschiedene selbstkonjugierte Tripel nicht konjugiert sein können. Und es sind $([T_1, T_2], T) = 0$, $([T_3, T_4], T) = 0$, oder anders geschrieben $2|T_1, T_2, T| = 0$, $2|T_3, T_4, T| = 0$.

Nachweis von 4.: Da ein Tripel nur zu zwei selbstkonjugierten Tripeln konjugiert sein kann und T_1 zu den Tripeln $[T_1, T_i]$ konjugiert ist, müssen von diesen wenigstens zwei gleich sein. Ist etwa $[T_1, T_2] = [T_1, T_3]$, so sind T_1, T_2, T_3 zu diesem Tripel konjugiert, also linear abhängig.

Satz 18 und 19 ergeben den abschließenden

Satz 20. Das Axiomensystem aus § 1 kennzeichnet die Gruppe $L(K)$ der gebrochen-linearen Transformationen über einem beliebigen Körper K von Charakteristik $\neq 2$.

Es sei nun auf die geometrische Deutung der Gruppe G durch die Gruppe H aller projektiven Kollineationen einer projektiven Ebene, welche einen nicht ausgearteten Kegelschnitt in sich überführen, hingewiesen. Die Gruppe H ist, wenn K der Koordinatenkörper der projektiven Ebene ist, nach bekannten Sätzen zu der Gruppe $L(K)$ isomorph (VY I, Chap. VIII, Theorem 15). Daher repräsentieren die Gruppen H gleichfalls die durch das Axiomensystem gekennzeichneten Gruppen. Die involutorischen Elemente von H besitzen nun eine einfache geometrische Bedeutung: Es sind die harmonischen Homologien (projektiven Spiegelungen), deren Zentrum und Achse ein nicht inzidierendes Paar Pol und Polare in bezug auf den Kegelschnitt sind (VY I, Chap. VIII, Theorem 16).

Betrachten wir, an den Beweis von Satz 19 anknüpfend, die Tripel T als Punkte der projektiven Ebene über K und den Kegelschnitt $(T, T) = 0$, so können wir einen isomorphen Zusammenhang zwischen der Gruppe $L(K)$ und der Gruppe H folgendermaßen herstellen: Wir führen auf dem Kegelschnitt einen Parameter X so ein, daß

$$(5) \quad A : B : C = X : -X^2 : 1 \quad \text{für } A^2 + BC = 0$$

ist (vgl. VY I, § 82; II, § 75, Kleindruck). Wendet man auf X eine Transformation

$$(6) \quad X' = (AX + B)(CX - A)^{-1} \quad \text{mit } A^2 + BC \neq 0$$

an, so sind für jedes X die Punkte $(X, -X^2, 1)$, $(X', -X'^2, 1)$, (A, B, C) kollinear; denn ihre Determinante ist Null. Daher ist (6) die involutorische Projektivität auf dem Kegelschnitt, welche durch die harmonische Homologie mit dem nicht auf dem Kegelschnitt gelegenen Punkt (A, B, C) als Zentrum und seiner Polaren als Achse erzeugt wird. Damit haben wir zwischen

den Transformationen (6) und den involutorischen Elementen aus H ein eindeutiges Entsprechen, das sich auch auf die Produkte ausdehnt. Und da auch in H jedes Element als Produkt von zwei involutorischen darstellbar ist (VY I, Chap. VIII, Theorem 17), ergibt das Entsprechen der involutorischen Elemente einen Isomorphismus der beiden Gruppen $L(K)$ und H .

Für die Gruppe H haben auch unsere Axiome eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir die involutorischen Elemente von H wieder mit a, b, c, \dots , so gilt:

1. ab ist dann und nur dann involutorisch, wenn das Zentrum von a mit der Achse von b , und also die Achse von a mit dem Zentrum von b inzidiert (VY I, Chap. VIII, Theorem 21).

2. abc ist dann und nur dann involutorisch, wenn die Achsen von a, b, c im Büschel liegen (VY I, § 79, Ex. 12; II, § 108, Kleindruck).

3. a, b sind dann und nur dann nicht verbindbar (im Sinne der Definition aus § 1), wenn $a \neq b$ ist und die Verbindungsgerade der Zentren von a und b den Kegelschnitt berührt, d. h. der Schnittpunkt der Achsen von a und b auf dem Kegelschnitt liegt (folgt aus 1.).

Und auf Grund dieser Kriterien übersetzen sich die Axiome in die folgenden geometrisch unmittelbar einsichtigen Aussagen:

1. Ist $a \neq b$ und liegen die Achsen von a, b, c und die Achsen von a, b, d im Büschel, so liegen die Achsen von a, c, d im Büschel. 2. Es gibt a, b mit $a \neq b$, deren Achsen sich auf dem Kegelschnitt schneiden. 3. Ist $a \neq b, c \neq d$ und schneiden sich sowohl die Achsen von a, b als die Achsen von c, d auf dem Kegelschnitt, so gibt es eine den Kegelschnitt nicht berührende Gerade, die sowohl mit den Achsen von a, b als mit den Achsen von c, d im Büschel liegt. 4. Ist $a \neq b, c, d$ und schneidet die Achse von a die Achsen von b, c und d in Punkten des Kegelschnitts, so liegen die Achsen von a, b, c oder die Achsen von a, b, d oder die Achsen von a, c, d im Büschel.

Zum Schluß möchte ich Herrn P. BERGAU und Herrn W. KLINGENBERG meinen Dank aussprechen; durch Gespräche mit ihnen ist die vorliegende Untersuchung wesentlich gefördert worden.

Anhang.

Es soll hier gezeigt werden, daß man von dem Axiomensystem des § 1 im wesentlichen durch eine Gabelung, nämlich indem man das Axiom 2 durch seine Negation ersetzt (die Axiome 3 und 4 werden dann hinfällig), zu einem Axiomensystem für die *Bewegungsgruppe einer ebenen elliptischen Geometrie* gelangt. Genauer behaupten wir, daß das folgende Axiomensystem diese Gruppen kennzeichnet^{*)}:

Grundannahme. *Es sei eine aus ihren involutorischen Elementen erzeugbare Gruppe gegeben, in der kein involutorisches Element mit allen involutori-*

^{*)} Um eine genaue Gabelung zu erhalten, könnte man eine gemeinsame Grundannahme so formulieren: Gegeben sei eine Gruppe, in der jedes Element als Produkt von zwei involutorischen Elementen darstellbar und kein involutorisches Element mit allen involutorischen Elementen vertauschbar ist.

schen Elementen vertauschbar ist. Die involutorischen Elemente der Gruppe seien mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Axiom 1. Ist $a \neq b$ und sind abc, abd involutorisch, so ist acd involutorisch.

Axiom 2*. Zu a, b gibt es stets ein v , so daß av, bv involutorisch sind.

Wir beweisen, daß dies Axiomensystem zu dem Axiomensystem, welches ARNOLD SCHMIDT seiner Arbeit über die Bewegungsgruppe einer ebenen elliptischen Geometrie zugrunde gelegt hat^{*)}, äquivalent ist. Hierzu verwenden wir einige Beziehungen, die in einer beliebigen Gruppe zwischen den beiden Axiomen und den folgenden Forderungen an die involutorischen Elemente bestehen:

(1) Sind ag, bg, cg involutorisch, so ist abc involutorisch.

(2) Ist $a \neq b$ und sind ag, bg, abc involutorisch, so ist cg involutorisch.

(3) Ist $a \neq b$ und sind av, bv, av', bv' involutorisch, so ist $v = v'$.

(1) ist eine Form des „Satzes von den drei Spiegelungen“ (jedoch schwächer als der Satz 1 aus § 2), (2) die Umkehrung; (3) besagt, daß zwei verschiedene involutorische Elemente höchstens eine Verbindung haben.

Aus Axiom 1 folgen (1), (2), (3). Die in (1) und (2) auftretende Voraussetzung, daß ag involutorisch ist, bedeutet, daß das involutorische Element g in der Form $g = aa^*$ darstellbar ist. Setzt man dies ein, so besagen (1) und (2):

Sind aa^*, baa^*, caa^* involutorisch, so ist abc involutorisch.

Ist $a \neq b$ und sind aa^*, baa^*, abc involutorisch, so ist caa^* involutorisch. Dies sind Spezialfälle von Axiom 1, und daher hat Axiom 1 die Forderungen (1), (2) zur Folge^{*)}. Ferner lehrt der Beweis des Satzes 4 aus § 2: Aus (2) folgt (3).

Aus (1), (2), Axiom 2* folgt Axiom 1. Die Voraussetzung von Axiom 1 ist: $a \neq b$ und abc, abd involutorisch. Nach Axiom 2* gibt es ein v , so daß av, bv involutorisch sind. Da $a \neq b$ ist und av, bv, abc involutorisch sind, ist nach (2) cv involutorisch, und entsprechend, da abd involutorisch ist, auch dv involutorisch. Da also av, cv, dv involutorisch sind, ist nach (1) acd involutorisch.

Hiermit ist gezeigt:

Axiom 1, Axiom 2* sind äquivalent zu (1), (2), Axiom 2*, (3).

Man erkennt nun ohne Mühe, daß die Grundannahme und diese vier Forderungen zu dem Axiomensystem von ARNOLD SCHMIDT äquivalent sind; die jedem Paar a, b mit $a \neq b$ durch Axiom 2* und (3) eindeutig zugeordnete Verbindung v stellt die von ihm verwendete zweite Verknüpfung dar.

Da (3) aus (2) folgt und ferner, wie man aus den Beweisen der Sätze 4 und 5 einer früheren Note¹⁾ entnimmt, in dem System (1), (2), Axiom 2*, (3) die Forderung (2) eine Folge der übrigen ist, gilt überdies:

Axiom 1, Axiom 2* sind äquivalent zu (1), (2), Axiom 2* und äquivalent zu (1), Axiom 2*, (3).

^{*)} Analog lassen sich auch die Sätze 1 und 2 des § 2 aus Axiom 1 herleiten.

Ein neuer Test für das Problem der zwei Stichproben.

Von

B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Das Problem der zwei Stichproben ist sehr alt. In der GAUSSschen Fehlertheorie tritt es auf, wenn gemessene Werte x_1, \dots, x_g mit anderen Werten y_1, \dots, y_h derselben physikalischen Größe, die unter anderen Bedingungen gemessen sind, verglichen werden sollen. Ist das arithmetische Mittel \hat{x} der gemessenen x_j etwas größer als das Mittel \hat{y} der gemessenen y_k , so fragt man sich: kann diese Differenz rein zufällig sein? Um das zu entscheiden, bildet man

$$\begin{aligned} D &= \hat{x} - \hat{y} \\ s_1^2 &= \frac{1}{g-1} \sum (x_j - \hat{x})^2 \\ s_2^2 &= \frac{1}{h-1} \sum (y_k - \hat{y})^2 \\ S^2 &= \frac{1}{g} s_1^2 + \frac{1}{h} s_2^2. \end{aligned}$$

s_1^2 ist eine Schätzung für die Varianz σ_1^2 der x_j , ebenso s_2^2 für die Varianz σ_2^2 der y_k . Die beiden Glieder in S^2 sind Schätzungen für die Varianz der Mittel \hat{x} und \hat{y} , die Summe S^2 ist eine Schätzung für die Varianz der Differenz D . Schließlich bildet man den Quotienten D/S . Wenn dieser Quotient eine gewisse Schranke überschreitet, wird die Hypothese, daß der Unterschied zwischen \hat{x} und \hat{y} rein zufällig sei, verworfen zugunsten der Hypothese, daß der wahre Mittelwert a der x_j größer ist als der wahre Mittelwert b der y_k .

Bei der Berechnung der Schranke für den Quotienten D/S hat man in der älteren Fehlerrechnung immer die Variabilität des Nenners vernachlässigt. Man hat so getan, als ob der Nenner S gleich dem wahren mittleren Fehler der Differenz D wäre. Das ist aber nur für sehr große g und h erlaubt. Für kleine g und h muß man D/S als Quotient von zwei zufälligen Größen auffassen. So kommt man auf STUDENT's Test, der auch bei biologischen Experimenten häufig angewandt wird¹⁾.

Ein geringfügiger Unterschied zum früheren ist bei STUDENT's Test zunächst, daß man statt zweier Schätzungen s_1^2 und s_2^2 eine einzige geschätzte Varianz s^2 aus dem gesamten Beobachtungsmaterial berechnet:

$$s^2 = \frac{1}{g+h-2} \{ \sum (x_j - \hat{x})^2 + \sum (y_k - \hat{y})^2 \}.$$

Die Begründung ist etwa folgende. Die Hypothese H , die man prüfen will, besagt, daß die gefundene Differenz $\hat{x} - \hat{y}$ rein zufällig ist und daß die x_j und y_k in Wahrheit genau dieselbe Verteilungsfunktion haben. Nimmt man

¹⁾ R. A. FISHER, Applications of Student's distribution, Metron 5, Nr. 3, p. 90 (1925).
Mathematische Annalen. 126.

das an, so sind auch die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 gleich, und die beste Schätzung für diese gemeinsame Varianz σ^2 ist das eben angegebene s^2 .

Nun bildet man

$$S^2 = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) s^2$$

und dann den Quotienten D/S . Nimmt man an, daß die x_j und y_k alle unabhängig voneinander normal verteilt sind mit derselben Varianz σ^2 , so sind die Verteilungsfunktionen von D und S und damit auch des Quotienten D/S bekannt. Die Verteilung des Quotienten ist von σ unabhängig. Man kann also eine Schranke t finden, die vom Quotienten D/S nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% oder 1% überschritten wird. Die Schranke t hängt noch von der „Zahl der Freiheitsgrade“ $g + h - 2$ ab und ist in allen modernen Handbüchern der mathematischen Statistik tabuliert. Überschreitet der Quotient die Schranke, so wird die Hypothese H verworfen. Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H , wenn sie richtig ist, irrtümlich zu verwerfen, ist 5% oder 1%.

Bei der Herleitung dieses Tests wird angenommen, daß die Größen x_j und y_k exakt oder wenigstens annähernd normal verteilt sind. Sehr oft weiß man aber nicht, ob das der Fall ist. In einigen Fällen weiß man sogar, daß die Verteilung stark von der normalen abweicht.

Aus diesem Grunde hat man Tests entwickelt, die nur von der Anordnung der Beobachtungsergebnisse x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h abhängen. Man zählt z. B. nach WILCOXON²⁾ die Anzahl der „Inversionen“, d. h. die Anzahl der Male, daß ein y_j kleiner ist als ein x_k . Diese Tests beruhen nur auf der Annahme, daß x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h unabhängige Stichproben mit derselben stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ sind.

Die bisher entwickelten Tests sind aber, besonders für große Werte von $n = g + h$, schwächer als STUDENT'S Test, d. h. sie führen mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit zur Entscheidung. Der Unterschied in der Teststärke ist zwar nicht sehr groß, aber er wächst mit wachsendem Umfang der Stichproben an, wie an anderer Stelle gezeigt wurde³⁾. Dieses Anwachsen nun kann man vermeiden.

Im folgenden soll ein Test erklärt werden, der nur die Anordnung benutzt und der für große h bei festem g asymptotisch ebenso scharf ist wie STUDENT'S Test, sofern die x und y normal verteilt sind mit derselben Streuung.

Bei der Herleitung des Testes wird natürlich die Voraussetzung der normalen Verteilung nicht benutzt, sondern nur die Annahme, daß die x_j und y_k alle dieselbe Verteilungsfunktion $F(x)$ haben. Der Test darf also auch dann angewandt werden, wenn man nichts über die Verteilungsfunktion weiß.

Unter der *Schärfe* (Teststärke, power) eines Testes versteht man nach NEYMAN und E. S. PEARSON folgendes: Man will eine Hypothese H prüfen und nimmt zu dem Zwecke eine Stichprobe. Der Test gibt eine Regel an, nach der in gewissen Fällen die Hypothese H verworfen wird. Es wird so eingerichtet, daß die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Hypothese zu verwerfen, höch-

²⁾ F. WILCOXON, Biometrics Bull. 1, p. 80 (1945).

MANN and WHITNEY, Ann. Math. Stat. 18, p. 50 (1947).

³⁾ B. L. VAN DER WAERDEN, Proc. Kon. Akad. Amsterdam A 55, p. 453 (1952).

stens β beträgt ($\beta = 0,05$ oder $0,01$). Das Verwerfen einer richtigen Hypothese ist ein „Fehler erster Art“, das Nichtverwerfen einer falschen Hypothese ein „Fehler zweiter Art“. Der Test soll nun so eingerichtet werden, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art möglichst klein wird. Ist die Hypothese H falsch, so nimmt man eine „alternative Hypothese“ H' an. Unter der *Schärfe des Testes* in bezug auf die Hypothese H' versteht man die Wahrscheinlichkeit, daß H auf Grund des Testes verworfen wird, wenn H' richtig ist. Es handelt sich nun darum, diese Wahrscheinlichkeit möglichst groß zu machen, immer unter der Nebenbedingung, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art höchstens β beträgt.

Es sei H die Hypothese, daß x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h unabhängig voneinander normal verteilt sind, mit demselben Mittelwert (etwa Null) und derselben Streuung. Es sei H' die Hypothese, daß x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h unabhängig voneinander normal verteilt sind, mit derselben Streuung, aber mit verschiedenen Mittelwerten a und b für die x und für die y . Es sei $a > b$ und es möge sich um einen *einseitigen* Test handeln, d. h. die Hypothese H werde nur dann verworfen, wenn die meisten x größer sind als die meisten y . Dann ist bekannt, daß STUDENT'S Test unter allen Tests bei gegebenem β die größtmögliche Schärfe hat⁴⁾.

Die $g + h = n$ Beobachtungsergebnisse $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_h$ mögen, nach aufsteigender Größe geordnet, $z_{(1)}, \dots, z_{(n)}$ heißen. Ein x oder y erhält die *Rangnummer* i und wird mit $z_{(i)}$ bezeichnet, wenn genau $i - 1$ Werte x oder y kleiner als $z_{(i)}$ sind und $n - i$ größer.

Nun sei $\Phi(Z)$ eine normale Verteilungsfunktion:

$$(1) \quad \Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Die Φ -Werte gehen von 0 bis 1. In dem Intervall von 0 bis 1 bestimme man nun die n äquidistanten Punkte

$$(2) \quad W_{(i)} = \frac{i}{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und suche die zugehörigen Z -Werte (Fig. 1):

$$(3) \quad \Phi(Z_{(i)}) = W_{(i)}.$$

So erhält man n -Punkte $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ auf der Z -Achse. Ihre Rangordnung ist dieselbe wie die der Rangnummern i oder der Beobachtungen $z_{(i)}$. Wir nennen $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ die *normalisierten* Beobachtungen. Die Summe aller $Z_{(i)}$ ist Null.

Jeder normalisierten Beobachtung $Z_{(i)}$ ist eine wirkliche Beobachtung $z_{(i)}$ zugeordnet, die entweder ein x_j oder ein y_k sein kann. Ist sie ein x_j , so benennen

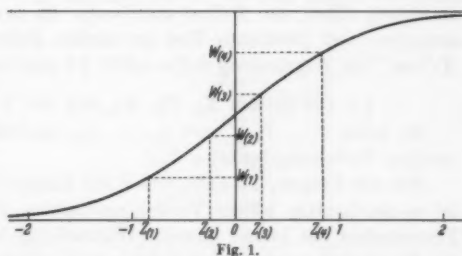


Fig. 1.

⁴⁾ J. NEYMAN and E. S. PEARSON, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 231, p. 332.

wir $Z_{(i)}$ mit der neuen Bezeichnung X_i ; ist sie ein y_k , mit Y_k . Die normalisierten Beobachtungen heißen also jetzt X_1, \dots, X_g und Y_1, \dots, Y_h .

Aus diesen X_i und Y_k bilden wir nun die Summen

$$(4) \quad X = X_1 + \dots + X_g$$

$$(5) \quad Y = Y_1 + \dots + Y_h.$$

Da die Summe aller $Z_{(i)}$ immer Null ist, muß

$$X + Y = 0$$

sein. Es genügt daher, X oder Y zu berechnen.

Überschreitet X einen kritischen Wert X_β , so wird die Hypothese, daß alle x_i und y_k eine Stichprobe aus derselben Verteilung bilden, verworfen. Der kritische Wert X_β wird so bestimmt, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art höchstens β beträgt.

Für kleine g und h muß X kombinatorisch bestimmt werden, etwa so: Man berechne für alle möglichen Rangordnungen von $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_h$ die X -Werte. Nun nimmt man, vom größten X -Wert angefangen, immer kleinere X -Werte hinzu, bis die Anzahl der Permutationen $\beta n!$ überschreitet. Der X -Wert, bei dem diese Überschreitung stattfindet, ist der kritische Wert X_β . Für Beispiele siehe § 4.

Für große g oder h kann man die Verteilungsfunktion von X durch eine normale Verteilung annähern und so das Verhalten von X_β als Funktion von g und h studieren. Das soll in § 2 und § 3 näher ausgeführt werden.

In § 5 wird der Beweis erbracht, daß der X -Test für feste g und für große h asymptotisch die gleiche Schärfe hat wie STUDENTs Test, falls x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h normal verteilt sind mit derselben Streuung.

Sind die Verteilungen weit von der Normalität entfernt, so bleibt STUDENTs Test für große g und h zwar annähernd gültig (d. h. die Irrtumswahrscheinlichkeit wird nicht erheblich größer als β), aber er verliert seine Schärfe. Das zeigt sich sehr deutlich an praktischen Beispielen, wo einige stark vom Mittel abweichende „Ausbeißer“ die Normalität ganz zerstören. In solchen Fällen macht man oft die Beobachtung, daß STUDENTs Test nicht zur Entscheidung führt, der X -Test aber wohl. In der Tat ist auch theoretisch zu erwarten, daß STUDENTs Test in solchen Fällen weniger scharf ist als der X -Test. Die Begründung dafür soll in § 6 gegeben werden.

§ 1. Die Größen X_i, Y_k, Z_m und ihre Verteilungsfunktionen.

Es seien x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h unabhängige Größen mit derselben stetigen Verteilungsfunktion $F(z)$.

Für alle Fragen, die sich nur auf die Rangordnung der x_i und y_k beziehen, ist es gleichgültig, welche Verteilungsfunktion $F(z)$ angenommen wird. Jede Permutation hat immer dieselbe Wahrscheinlichkeit $1/n!$. Daher können wir ein für allemal annehmen, daß die x_i und y_k normal verteilt sind mit der Verteilungsfunktion $\Phi(z)$.

Die $g + h = n$ Größen $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_h$ bezeichnen wir auch als z_1, \dots, z_n . Durch die Transformation

$$(6) \quad u = \Phi(x), \quad v = \Phi(y), \quad w = \Phi(z)$$

können neue Veränderliche $u_1, \dots, u_g, v_1, \dots, v_h$ oder w_1, \dots, w_n eingeführt werden. Die inverse Transformation sei

$$(7) \quad x = \Psi(u), \quad y = \Psi(v), \quad z = \Psi(w).$$

Werden z_1, \dots, z_n nach aufsteigender Größe geordnet, so heißen sie $z_{(i)}$. Aus der Rangnummer i werden die Quotienten

$$(8) \quad W_{(i)} = \frac{i}{n+1}$$

gebildet und daraus, vermöge der Umkehrtransformation (7),

$$(9) \quad Z_{(i)} = \Psi(W_{(i)}).$$

Ebenso wie die $z_{(i)}$ in anderer Reihenfolge auch z_1, \dots, z_n oder $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_h$ heißen, so heißen die $w_{(i)}$ in anderer Reihenfolge auch w_1, \dots, w_n oder $u_1, \dots, u_g, v_1, \dots, v_h$. Entsprechend heißen die $W_{(i)}$ auch W_1, \dots, W_n oder $U_1, \dots, U_g, V_1, \dots, V_h$, die $Z_{(i)}$ auch Z_1, \dots, Z_n oder $X_1, \dots, X_g, Y_1, \dots, Y_h$. Es ist also

$$(10) \quad X_j = \Psi(U_j), \quad Y_k = \Psi(V_k), \quad Z_m = \Psi(W_m).$$

Diese Bezeichnungen mögen festgehalten werden.

Wir setzen weiter

$$(11) \quad x_j = X_j + q_j, \quad y_k = Y_k + r_k, \quad z_m = Z_m + t_m.$$

Wiederum sind die t_m nur die q_j und r_k in anderer Bezeichnung. Wir haben nun die Verteilungsfunktion der z_m , Z_m und t_m zu untersuchen.

Die z_m sind normal verteilt. Die Z_m sind diskret verteilt: sie können nur die Werte

$$(12) \quad Z_{(i)} = \Psi\left(\frac{i}{n+1}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

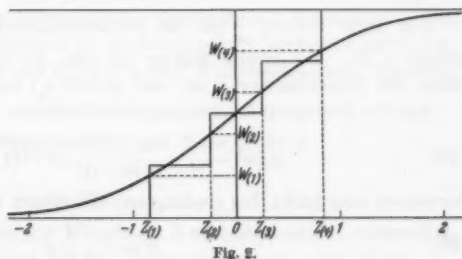
annehmen. Die Z_m liegen für große n in der Nähe der z_m : die t_m sind nur kleine Zusatzglieder von der Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$, wie wir in § 2 sehen werden.

Die z_m sind unabhängig, die Z_m aber nicht. Das folgt schon daraus, daß die Summe der Z_m immer Null ist:

$$Z_1 + \dots + Z_n = 0.$$

Je zwei von den Z_m , etwa Z_1 und Z_2 , haben, wie sich zeigen wird, eine negative Korrelation. Der Korrelationskoeffizient ist aber nur klein.

Die Verteilungsfunktion von Z_1 ist eine Treppenfunktion, die sich von der Normalverteilung $\Phi(z)$ nur wenig unterscheidet (Fig. 2). Nimmt man zum Vergleich eine Normalverteilung mit derselben Streuung, so wird die Übereinstimmung noch besser. Da die Korrelation zwischen Z_1 und Z_2 gering ist, so ist zu erwarten, daß die Summe $Z_1 + Z_2$ auch fast normal verteilt ist, ebenso die Summe



$Z_1 + Z_2 + Z_3$, usw. Diese Erwartung wird sich bestätigen: es zeigt sich, daß $Z_1 + \dots + Z_g = X_1 + \dots + X_g = X$ asymptotisch normal verteilt ist, sofern nur $n = g + h$ groß gegen g ist.

Ich vermute, daß dasselbe auch dann der Fall ist, wenn g und h dieselbe Größenordnung haben. Durchgerechnete Beispiele bestätigen diese Vermutung. Wenn sich diese Vermutung bestätigt, so wird die Herstellung von Tafeln für X_g dadurch sehr erleichtert, da man dann für große g und h nur die Streuung von X auszurechnen braucht und die Tafeln für die normale Verteilungsfunktion anwenden kann.

Wir holen nun zunächst den Beweis nach, daß die Zusatzglieder t_m in (11) nur von der Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$ sind.

§ 2. Die Verteilungsfunktion von t_m .

Es genügt, t_1 zu betrachten, da alle t_m dieselbe Verteilungsfunktion besitzen.

Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß z_1 zwischen den Grenzen z und $z + dz$ liegt und die Rangnummer i hat. Die Wahrscheinlichkeit, daß z_1 zwischen z und $z + dz$ liegt, ist $\frac{dw}{dz} dz$. Wenn z_1 aber gleich z ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau $i-1$ von den übrigen z_k kleiner als z sind und die übrigen $(n-i)$ größer, gleich

$$\binom{n-1}{i-1} w^{i-1} (1-w)^{n-i}.$$

Also ist die gesuchte differentielle Wahrscheinlichkeit das Produkt

$$(13) \quad f(i, z) dz = \binom{n-1}{i-1} w^{i-1} (1-w)^{n-i} \frac{dw}{dz} dz.$$

Durch Integration dieses Ausdruckes erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß z_1 zwischen irgend zwei Grenzen liegt und die Rangnummer i hat. Das kann man auch leicht streng beweisen, ohne Benutzung von Differentialen.

Der Ausdruck (13) läßt sich auch so schreiben:

$$(14) \quad f(i, z) dz = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} w^{i-1} (1-w)^{n-i} dw.$$

Der erste Faktor $\frac{1}{n}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Rangnummer gerade i ist. Der zweite Faktor ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit, wenn die Rangnummer i ist, daß $w_1 = \Phi(z_1)$ zwischen w und $w + dw$ liegt.

Aus der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte

$$(15) \quad \varphi_i(w) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} w^{i-1} (1-w)^{n-i}$$

berechnet man leicht den (bedingten) Mittelwert von w_1 :

$$(16) \quad W_{(i)} = \frac{i}{n+1}$$

und das Streuungsquadrat

$$(17) \quad \sigma_{(i)}^2 = \frac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)} \leq \frac{1}{4(n+2)}.$$

Nach dem Satz von TCHEBYSCHEFF haben also die Werte von $|w_1 - W_{(i)}|$, die groß gegen $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$ sind, eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit. Genauer: es sei η eine beliebige Zahl zwischen Null und Eins. Dann gibt es eine Konstante C , die nur von η abhängt, so daß mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \eta$

$$(18) \quad |w_1 - W_{(i)}| < C(n+2)^{-\frac{1}{2}}$$

gilt.

Aus der Ungleichung (18) folgt eine entsprechende Ungleichung für

$$|t_1| = |z_1 - Z_1| = |z_1 - Z_{(i)}|,$$

vorausgesetzt, daß w_1 nicht zu nahe bei 0 oder 1 liegt. Um das zu erzwingen, müssen wir Umgebungen der Null und Eins auf der w_1 -Achse ausschließen.

Da w_1 im Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt ist, so gilt mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - 2\eta$ die Ungleichung

$$(19) \quad \eta \leq w_1 \leq 1 - \eta.$$

Nimmt man n so groß, daß die rechte Seite von (18) kleiner als $\frac{1}{2}\eta$ ist, so folgt aus (18) und (19), daß w_1 und $W_{(i)}$ beide dem Intervall

$$\frac{1}{2}\eta \leq w \leq 1 - \frac{1}{2}\eta$$

angehören. In diesem Intervall sei M eine obere Schranke für

$$\Psi'(w) = \frac{dz}{dw}.$$

Dann folgt aus (18) die Ungleichung

$$(20) \quad |z_1 - Z_{(i)}| < CM(n+2)^{-\frac{1}{2}}$$

oder

$$(21) \quad |t_1| < CM(n+2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß (18) oder (19) verletzt ist, ist höchstens 3η . Die Wahrscheinlichkeit, daß (21) nicht gilt, ist also auch höchstens 3η , wobei η beliebig ist. Dabei handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten unter der Hypothese, daß z_1 gerade die Rangnummer i erhält. Um die totale Wahrscheinlichkeit, daß (21) nicht gilt, zu erhalten, muß man die bedingten Wahrscheinlichkeiten, die alle höchstens 3η betragen, mit $1/n$ multiplizieren und über i summieren. Das Ergebnis ist natürlich wieder höchstens gleich 3η .

Damit ist bewiesen: t_1 hat mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit höchstens die Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$.

§ 3. Die Verteilungsfunktion von X für große n .

Nach (11) ist

$$(22) \quad x_1 = X_1 + q_1.$$

Dabei ist x_1 normal verteilt mit Mittelwert 0 und Streuung 1, während q_1 nach § 2 nach Wahrscheinlichkeit nur die Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$ hat.

Daraus folgt sehr leicht, daß X_1 asymptotisch für große n normal verteilt ist mit Mittelwert Null und Streuung 1. Der Mittelwert Null gilt exakt, die Streuung 1 nur asymptotisch.

Beweis: Sei ε beliebig zwischen 0 und 1. Gemäß § 2 sei

$$(23) \quad \delta = C_1(n+2)^{-\frac{1}{2}}$$

so bestimmt, daß die Werte von $|q_1|$, die größer als δ sind, eine Wahrscheinlichkeit $< \varepsilon$ haben. Die Verteilungsfunktion von x_1 ist $\Phi(x)$, die von X_1 sei $F(x)$.

$F(x)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß $X_1 < x$. $F(x)$ ist also die Summe der Wahrscheinlichkeit, daß $X_1 < x$ und gleichzeitig $x_1 < x + \delta$, und der Wahrscheinlichkeit, daß $X_1 < x$ und $x_1 \geq x + \delta$. Im ersten Fall ist $x_1 < x + \delta$; die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\Phi(x + \delta)$. Im zweiten Fall ist $x_1 - X_1 < \delta$, also $|q_1| > \delta$; die Wahrscheinlichkeit dafür ist $< \varepsilon$. Also ist

$$(24) \quad F(x) < \Phi(x + \delta) + \varepsilon.$$

Für genügend große n ist aber, da $\Phi(x)$ gleichmäßig stetig ist,

$$(25) \quad \Phi(x + \delta) < \Phi(x) + \varepsilon.$$

Aus (24) und (25) folgt

$$(26) \quad F(x) < \Phi(x) + 2\varepsilon.$$

Genau so zeigt man

$$(27) \quad \Phi(x) < F(x) + 2\varepsilon,$$

(26) und (27) kann man zu

$$(28) \quad |F(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon$$

zusammenfassen.

Daß X_1 asymptotisch normal verteilt ist, kann man auch direkt beweisen: die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist ja genau bekannt. Die obige Beweismethode gilt aber auch für $X = X_1 + \dots + X_g$, sofern n groß gegen g ist. Setzt man nämlich

$$(29) \quad A = q_1 + \dots + q_g \text{ und } B = x_1 + \dots + x_g,$$

so ist

$$(30) \quad X = B - A.$$

Die Verteilung von B ist normal mit Mittelwert Null und Streuung \sqrt{g} . Von der Verteilung von A wissen wir jedenfalls, daß Werte $|A| > g C_1(n+2)^{-\frac{1}{2}}$ eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit haben. Diese Werte von $|A|$ können wir also von der Betrachtung ausschließen. Nun ist \sqrt{g} groß gegen $g(n+2)^{-\frac{1}{2}}$, da $n+2$ groß gegen g ist. Die zugelassenen Werte von A sind also klein gegen die Streuung von B . Das genügt aber für den obigen Beweis. B spielt dabei die Rolle des früheren x_1 , A die des kleinen Zusatzgliedes $q_1 = t_1$. Also ist X asymptotisch normal verteilt, wenn n/g gegen Unendlich geht.

Ist nicht g , sondern h klein gegen n , so kann man die Rollen von X und Y vertauschen: Y ist genähert normal verteilt, also X auch. Sind aber g und h von derselben Größenordnung, so ist es mir nicht gelungen, zu beweisen, daß X und Y asymptotisch normal verteilt sind.

Die Mittelwerte von X_1, \dots, X_g sind Null, also ist auch der Mittelwert von X Null. Die Streuung von X kann ebenfalls leicht exakt bestimmt werden.

Die Varianz, d. h. das Streuungsquadrat von Z_1 ist

$$(31) \quad Q = Q_{11} = \sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n \Psi\left(\frac{i}{n+1}\right)^2.$$

Für kleine n kann man Q leicht berechnen, für große n strebt Q gegen 1. Wir können Q also als bekannt betrachten. Selbstverständlich haben Q_{11} , Q_{22} , ..., Q_{nn} alle denselben Wert Q .

Die Summe $Z_1 + \dots + Z_n$ ist Null, der Erwartungswert von

$$Z_1(Z_1 + \dots + Z_n)$$

ist also auch Null. Bezeichnet Q_{12} den Erwartungswert von $Z_1 Z_2$, so folgt

$$(32) \quad Q_{11} + Q_{12} + \dots + Q_{1n} = 0$$

oder

$$(33) \quad Q + (n-1) Q_{12} = 0.$$

Daher ist

$$(34) \quad Q_{12} = -\frac{Q}{n-1}.$$

Die gemischten Q_{jk} sind also ebenfalls bekannt. Das Streuungsquadrat von

$$X = X_1 + \dots + X_g = Z_1 + \dots + Z_g$$

ist nun

$$\sigma_X^2 = \sum_1^g \sum_1^g Q_{jk} = g Q_{11} + g(g-1) Q_{12} = g Q - g \frac{g-1}{n-1} Q$$

oder

$$(35) \quad \sigma_X^2 = \frac{gh}{n-1} Q.$$

Wenn die Vermutung, daß X für große n normal verteilt ist, zutrifft, so kann man den X -Test für große n so formulieren:

Man ordne die Beobachtungen x_1, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h nach aufsteigender Größe. Aus den Rangnummern i der Beobachtungen x_j bilde man die Quotienten

$$(36) \quad U_j = U_{(i)} = \frac{i}{n+1}$$

und

$$(37) \quad X_j = \Psi(U_j).$$

Durch Addition der X_j erhält man X . Man berechne Q nach (31) und σ_X nach (35). Wenn dann X größer ist als $\Psi(1-\beta) \cdot \sigma_X$, wobei β die zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit ist, so wird die Hypothese H verworfen.

Für die Rechnung braucht man nur eine Tabelle der Funktion Ψ sowie eine Tabelle für Q als Funktion von n , beide etwa auf 2 Dezimalstellen genau. Eine vierstellige Tafel für Ψ findet man bei K. PEARSON, Tables for Statisticians and Biometricians I, 1924. Die Tafel für Q fängt so an:

$n = 5$	6	7	8	9	10	11	12
$Q = 0,45$	0,50	0,54	0,57	0,60	0,62	0,64	0,66

Für größere Werte von n kann man die asymptotische Formel

$$Q = 1 - \frac{2 \ln n}{n} - \frac{\ln \ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

benutzen, die K. STREBEL in einer nachfolgenden Arbeit beweisen wird.

§ 4. Einige Fälle mit kleinem n .

Bei $n = 6$ und $g = 1$ sind nur 6 wesentlich verschiedene Rangordnungen der Beobachtungen x_1 und y_1, \dots, y_6 möglich, denn das einzige, worauf es ankommt, ist die Rangnummer $i = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 der Beobachtung x_1 ; die Rangordnung der y_k untereinander ist ja gleichgültig. Die 6 zugehörigen Werte von X sind

$$-1,07 \quad -0,56 \quad -0,18 \quad +0,18 \quad +0,56 \quad +1,07.$$

Ihre Wahrscheinlichkeiten sind je $\frac{1}{6}$. Die Verteilungsfunktion von X ist in

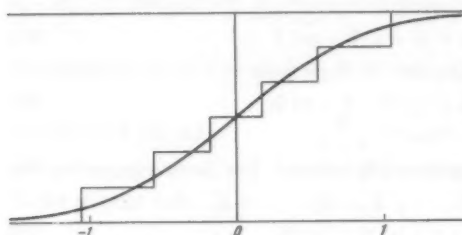


Fig. 3.

Fig. 3 als Treppenfunktion eingezeichnet. Zum Vergleich ist auch die normale Verteilungsfunktion mit den Streuungsquadrat $\sigma^2 = Q = 0,497$ eingezeichnet. Die Übereinstimmung ist schlecht, wie nicht anders zu erwarten.

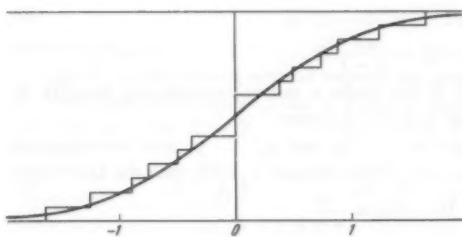


Fig. 4.

Bei $n = 6$ und $g = 2$ ist die Übereinstimmung bereits besser (Fig. 4), bei $g = 3$ noch besser (Fig. 5). Die Tatsache, daß bei wachsendem g die Übereinstimmung mit der normalen Verteilung immer besser wird, stützt die Vermutung, daß die Verteilung für große n auch dann asymptotisch normal ist, wenn g und h dieselbe Größenordnung haben.

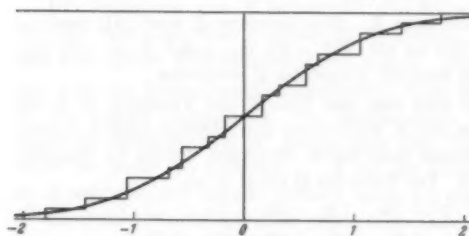


Fig. 5.

Bei $\beta = 0,05$ ist $n = 6$, $g = 3$ der niedrigste Fall, in dem der X -Test überhaupt angewandt werden kann. Ist die Rangordnung der Beobachtungen $y y y x x x$, so hat X den größtmöglichen Wert und die Hypothese H wird verworfen. Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H zu verwerfen, wenn

sie richtig ist, ist genau $\frac{1}{20} = 0,05$, denn alle 20 möglichen Rangordnungen sind gleich wahrscheinlich. Für den kritischen Wert X_β kann man 1,6 nehmen,

denn für die Rangordnung $y y y x x$ ist X größer als 1,6 und für alle anderen Rangordnungen kleiner.

Mit derselben Methode erhält man für $g > 2$ und $n \leq 10$ die folgenden X_g -Werte:

n	g	h	X_{05}	X_{01}
6	3	3	1,6	∞
7	3	4	2,0	∞
8	3	5	2,0	∞
	4	4	2,1	∞
9	3	6	2,1	∞
	4	5	2,1	2,8
10	3	7	2,0	2,7
	4	6	2,2	2,9
	5	5	2,2	2,9

Bei der Anwendung dieser Tabelle ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art immer höchstens 0,05 bzw. 0,01 (vorletzte bzw. letzte Spalte).

Würde man X_{05} aus der normalen Verteilung berechnen, so wäre die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art bei $n = 10$

$$\text{für } g = 3 \quad \frac{6}{120} = 0,05$$

$$\text{für } g = 4 \quad \frac{11}{210} = 0,052$$

$$\text{für } g = 5 \quad \frac{12}{252} = 0,048.$$

Diese Beispiele legen die Vermutung nahe, daß man für $g > 2$ und $n \geq 10$ ohne beträchtliche Fehler die Normalverteilung benutzen kann.

§ 5. Die Schärfe des X -Testes.

In der unter ³⁾ zitierten Arbeit wurde die Schärfe des X -Testes mit der von WILCOXON²⁾ Test verglichen. Für $n \leq 8$ und $\beta \leq 0,05$ sind beide Tests noch gleichwertig, aber bereits für $n = 10$ und $g = 3$ ist der X -Test schärfer. Geht n gegen Unendlich, während g fest bleibt, so wird der Unterschied noch größer. Jetzt soll gezeigt werden, daß der X -Test asymptotisch gleich scharf ist wie STUDENTs Test.

Es seien x_1, \dots, x_g unabhängig normal verteilt mit Mittelwert $a > 0$ und Streuung 1, ebenso y_1, \dots, y_h mit Mittelwert 0 und Streuung 1. Die Verteilungsfunktionen der x_i und y_k sind also $\Phi(x-a)$ und $\Phi(y)$. Wir wollen zunächst zeigen, daß bei festem g und großem h die Größe X asymptotisch normal verteilt ist mit Mittelwert $g a$ und Streuung \sqrt{g} .

Am einfachsten ist der Fall $g = 1$. Die Größe X ist dann einfach gleich X_1 . Die Verteilungsfunktion von X_1 kann wie in § 2—3 bestimmt werden. Nur hat man, da x_i und die y_k nicht mehr dieselbe Verteilungsfunktion haben, statt (13) zu schreiben

$$(38) \quad f(i, z) dz = \binom{n-1}{i-1} w^{i-1} (1-w)^{n-i} \frac{du}{dz} dz$$

mit $w = \Phi(z)$ und $u = \Phi(z-a)$.

Der Unterschied gegen (13) liegt in dem nichtkonstanten Faktor

$$(39) \quad \frac{du}{dw} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dw} = e^{-\frac{1}{2}(z-a)^2} e^{\frac{1}{2}a^2} = e^{za - \frac{1}{2}a^2}.$$

Obwohl dieser Faktor für $w \rightarrow 1$ unendlich wird, kann man doch im wesentlichen dieselben Schlüsse wie in § 2 durchführen, insbesondere kann man beweisen, daß die Größe

$$(40) \quad t_1 = q_1 = x_1 - X_1$$

nach Wahrscheinlichkeit nur die Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$ hat.

Um nämlich die Wahrscheinlichkeit für

$$(41) \quad |x_1 - X_1| > A(n+2)^{-\frac{1}{2}}$$

zu erhalten, muß man (38) über den Bereich

$$|z - X_{(i)}| > A(n+2)^{-\frac{1}{2}}$$

integrieren und dann über i summieren. Man kann nun zunächst wieder die Bereiche von $u = 0$ bis $u = \eta$ und von $u = 1 - \eta$ bis $u = 1$ von der Integration ausschließen; dabei macht man höchstens den Fehler 2η . In dem Bereich $\eta \leq u \leq 1 - \eta$ ist der Differentialquotient $\frac{du}{dw}$ beschränkt. Es sei B eine obere Schranke dieses Differentialquotienten. Berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (41) unter Zugrundelegung der früheren differentiellen Wahrscheinlichkeit (13), so erhält man wie in § 2 einen beliebig kleinen Wert. Durch passende Wahl von A kann man diesen Wert kleiner machen als

$$\eta' = \frac{\eta}{B}.$$

Geht man nun zur differentiellen Wahrscheinlichkeit (38) über, so hat man im Integranden einen Faktor

$$(42) \quad \frac{du}{dw} \leq B$$

hinzuzufügen; die Wahrscheinlichkeit bleibt dann immer noch kleiner als η . Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (41) also kleiner als 3η .

Um dasselbe Ergebnis für $g > 1$ zu erhalten, müssen wir den vorstehenden Beweis noch etwas modifizieren. Die um 1 verminderte Rangnummer $i-1$ der Größe x_1 ist die Anzahl unter den x_2, \dots, x_g und y_1, \dots, y_h , die kleiner als x_1 sind. Diese Anzahl kann so aufgespalten werden:

$$(43) \quad i-1 = (\lambda-1) + \mu.$$

Dabei ist $\lambda-1$ die Anzahl unter den x_2, \dots, x_g und μ die Anzahl unter den y_1, \dots, y_h , die kleiner als x_1 sind. Statt (38) haben wir eine differentielle Verteilungsfunktion

$$(44) \quad f(\lambda, \mu, z) dz = \binom{g-1}{\lambda-1} \binom{h}{\mu} u^{\lambda-1} (1-u)^{g-\lambda} w^\mu (1-w)^{h-\mu} \frac{du}{dz} dz$$

zu bilden. Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit haben wir (44) über z zu integrieren und über λ und μ zu summieren.

Die ursprüngliche Verteilungsfunktion (13) kann ähnlich aufgespalten werden, nur daß in diesem Fall $u = w$ zu setzen ist:

$$(45) \quad f_0(\lambda, \mu, z) dz = \binom{g-1}{\lambda-1} \binom{h}{\mu} w^{\lambda-1+\mu} (1-w)^{g-\lambda-\mu} \frac{dw}{dz} dz.$$

Nach Summation über λ bei festem μ erhält man aus (45) wieder (13). Die aus (45) berechneten Wahrscheinlichkeiten sind also genau dieselben wie die aus (13) berechneten.

Vergleicht man (44) mit (45), so sieht man, daß nur ein Faktor

$$(46) \quad \alpha(u) = \left(\frac{u}{w}\right)^{\lambda-1} \left(\frac{1-u}{1-w}\right)^{g-\lambda} \frac{du}{dw}$$

hinzugekommen ist. Dieser Faktor ist aber im Bereich $\eta \leq u \leq 1 - \eta$

beschränkt, und zwar gleichmäßig in λ , da nur die Werte $\lambda = 1, 2, \dots, g$ in Betracht kommen:

$$(47) \quad 0 < \alpha(u) \leq B.$$

Also kann man genau dieselben Schlüsse anwenden wie früher auf Grund der Ungleichung (42). Das Ergebnis ist wieder dasselbe: $x_1 - X_1$ hat nach Wahrscheinlichkeit nur die Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$.

Durch Summation folgt nunmehr, daß auch

$$x - X = \sum_1^g (x_j - X_j)$$

nach Wahrscheinlichkeit nur die Größenordnung $(n+2)^{-\frac{1}{2}}$ hat.

Daraus folgt wie in § 3, daß X für große n asymptotisch dieselbe Verteilung hat wie $x = x_1 + \dots + x_g$. Die Wahrscheinlichkeit, daß X eine Schranke X_β überschreitet, ist also asymptotisch gleich der Wahrscheinlichkeit, daß x dieselbe Schranke überschreitet.

Jetzt ergibt sich der Vergleich mit STUDENTs Test von selbst. In STUDENTs Test wird das arithmetische Mittel der x_j

$$\hat{x} = \frac{1}{g} (x_1 + \dots + x_g) = \frac{x}{g}$$

mit dem arithmetischen Mittel der y_k verglichen. Für große h ist aber das letztere nach Wahrscheinlichkeit fast gleich dem Mittelwert der y_k , den wir Null gesetzt haben. Die empirische Streuung s , die in STUDENTs Test im Nenner erscheint, ist nach Wahrscheinlichkeit asymptotisch gleich der wahren Streuung $\sigma = 1$. Also besteht STUDENTs Test asymptotisch darin, die Hypothese H zu verwerfen, sobald das Mittel x/g ein gewisses Vielfaches seiner eigenen Streuung $1/\sqrt{g}$ überschreitet:

$$\frac{x}{g} > \frac{\Psi(1-\beta)}{\sqrt{g}}$$

oder

$$x > \Psi(1-\beta) \sqrt{g}.$$

Der X -Test besteht aber darin, die Hypothese H zu verwerfen, sobald

$$X > \Psi(1-\beta) \cdot \sigma_X.$$

Nun ist aber σ_X asymptotisch gleich \sqrt{g} . Also ist der X -Test asymptotisch gleich scharf wie STUDENTs Test.

Das Ergebnis gilt sogar unter viel schwächeren Voraussetzungen als den eingangs formulierten. Die Verteilungsfunktion der x_j wurde als normal angenommen; das ist aber gar nicht nötig. Irgendeine stetig differenzierbare Verteilungsfunktion würde genau dasselbe ergeben, denn über die Funktion u wurde nur vorausgesetzt, daß ihre Ableitung im Bereich $\eta \leq u \leq 1-\eta$ beschränkt ist. Verschiedene x_j dürfen sogar verschiedene Verteilungen haben: es macht für den Beweis nichts aus. Wesentlich für den Beweis ist nur, daß die y_k unabhängig normal verteilt sein sollen und daß n bei festem g gegen Unendlich geht.

§ 6. Nicht normale Verteilungen.

Wenn die Größen x_j und y_k nicht normal verteilt sind, so kann man zur Prüfung der Hypothese H_0 , daß die x_j und y_k dieselbe Verteilungsfunktion besitzen, ohne weiteres den X -Test anwenden. Durch eine stetige monotone Transformation

$$(48) \quad z' = \tau(z)$$

kann man nämlich jede stetige Verteilung in eine normale überführen, und der X -Test bleibt von der Transformation unberührt.

Aber auch STUDENT'S Test kann man unverändert anwenden, ohne die Irrtumswahrscheinlichkeit β wesentlich zu erhöhen, sofern nur die Streuung endlich bleibt und g und h genügend groß sind. Das Mittel \hat{x} aus den unabhängigen Größen x_1, \dots, x_g ist nämlich bei genügend großem g annähernd normal verteilt, ebenso das Mittel \hat{y} bei genügend großem h und folglich auch die Differenz $D = \hat{x} - \hat{y}$. Der Nenner S in STUDENT'S Test kann für große $n = g + h$ durch die wahre Streuung Σ von D ersetzt werden. Der Quotient D/S hat also eine annähernd normale Verteilung mit einer Streuung, die sich für $n \rightarrow \infty$ der Eins nähert. Die Irrtumswahrscheinlichkeit von STUDENT'S Test ist also annähernd gleich dem normalen Wert β .

Um nun, immer für große g und h , die Schärfe von STUDENT'S Test mit der des X -Testes vergleichen zu können, müssen wir eine alternative Hypothese H_1 zugrunde legen. Die folgende Hypothese erlaubt eine einfache mathematische Behandlung und scheint nicht allzu unrealistisch zu sein:

H_1 . Die nach (48) transformierten Größen x'_j und y'_k seien normal verteilt mit Mittelwerten a und 0 ($a > 0$) und mit der gleichen Streuung 1 .

Die Verteilungsfunktion der x'_j sei also $\Phi(z' - a)$, die der y'_k sei $\Phi(z')$. Die Verteilungsfunktion der x_j ist also

$$(49) \quad F_a(z) = \Phi(\tau(z) - a),$$

die der y_k ebenso

$$(50) \quad F_0(z) = \Phi(\tau(z)).$$

Die Mittelwerte der x_j und y_k seien μ_a und μ_0 , die Streuungen σ_a und σ_0 . Die Formeln sind bekannt:

$$(51) \quad \mu_a = \int z dF_a(z), \text{ usw.}$$

Die Differenz $D = \hat{x} - \hat{y}$ ist annähernd normal verteilt mit dem Mittelwert $\mu_a - \mu_0$ und der Varianz

$$(52) \quad \Sigma^2 = \frac{1}{g} \sigma_a^2 + \frac{1}{h} \sigma_0^2.$$

Der Nenner S in STUDENT'S Test wird auf Grund der Formeln der Einleitung mit Hilfe der Schätzung s^2 berechnet. Für große $g + h$ nähert sich s^2 dem Grenzwert

$$\frac{1}{g+h-2} \{(g-1) \sigma_a^2 + (h-1) \sigma_0^2\}$$

oder, was im Limes auf dasselbe hinauskommt,

$$(53) \quad \gamma^2 = \frac{1}{g+h} (g \sigma_a^2 + h \sigma_0^2).$$

S^2 ist also annähernd gleich

$$(54) \quad \Gamma^2 = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \gamma^2 = \frac{1}{g h} (g \sigma_a^2 + h \sigma_0^2).$$

Der Quotient D/S ist somit annähernd normal verteilt mit Mittelwert $(\mu_a - \mu_0)/\Gamma$ und Streuung Σ/Γ . Die Stärke von STUDENT's Test, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Quotient D/S den kritischen Wert t überschreitet, ist also annähernd gleich

$$(55) \quad P = \Phi \left(\frac{\mu_a - \mu_0 - t \Gamma}{\Sigma} \right),$$

wobei Σ und Γ durch (52) und (54) gegeben sind⁵⁾.

Ist die Transformation (48) die Identität ($z' = z$), so erhält man die einfachere Formel

$$(56) \quad P' = \Phi \left(\frac{a - t \Gamma'}{\Gamma'} \right)$$

mit

$$(57) \quad \Gamma'^2 = \frac{g + h}{g h}.$$

Durch (55) ist die Stärke von STUDENT's Test im allgemeinen Fall, durch (56) im normalen Fall gegeben. Für STUDENT's Test, auf die transformierten Veränderlichen x'_i und y'_i angewandt, gilt (56), denn die transformierten Veränderlichen sind normal. Da nun STUDENT's Test im Fall normaler Verteilungen der stärkste unter allen Tests mit gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit β ist, so ist (56) sicher größer als (55). Durchgerechnete Beispiele zeigen, daß der Unterschied in der Stärke sehr beträchtlich werden kann. Es gibt nämlich Transformationen (48), welche die Mittelwerte μ_a und μ_0 fast nicht beeinflussen, die Streuungen σ_a und σ_0 aber sehr stark vergrößern. Durch solche Transformationen kann man (55) nahezu bis β herabdrücken, während (56) von der Transformation nicht beeinflußt wird. Es kann also z. B. vorkommen, daß P nach (55) nur 0,1 beträgt (bei $\beta = 0,05$), während P' nach (56) nahe bei 1 liegt.

Nun sei g so groß, daß die Verteilung des Mittels \hat{x} fast normal ist. Nachdem g gewählt ist, möge h so groß gewählt werden, daß der X -Test fast dieselbe Schärfe hat wie STUDENT's Test, auf die transformierten (normalen) Veränderlichen x' und y' angewandt. Die Schärfe von STUDENT's Test, auf die ursprünglichen x und y angewandt, ist wiederum gleich P nach Formel (55). Die Schärfe des X -Testes ist aber nahezu gleich P' , also größer, unter Umständen sogar viel größer.

Zusatz bei der Korrektur (Juli 1953). In den *Annals of Math. Stat.* 23 (1952) p. 346 hat M. E. TERRY einen Anordnungstest vorgeschlagen, der dem X -Test sehr ähnlich ist und numerisch fast dasselbe ergibt. Für feste g und wachsende h sind beide Tests asymptotisch äquivalent.

⁵⁾ Der Unterschied zwischen Σ und Γ ist bedeutungslos, denn in den Fällen, wo g und h groß sind und P erheblich von 1 verschieden ist, ist a klein und σ_a somit praktisch gleich σ_0 .

A New Inequality with Application to the Theory of Diophantine Approximation.

By
 J. W. S. CASSELS in Cambridge (England).

Let a_1, a_2, \dots, a_N be a set of real numbers. For $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ denote by $F(\alpha, \beta)$ the number of solutions of

$$\alpha \leq \{a_n\} < \beta,$$

where $\{x\}$ is the fractional part of x . Then

$$D = \max_{\alpha, \beta} \left| \left(\beta - \alpha \right) - \frac{1}{N} F(\alpha, \beta) \right|$$

is the discrepancy of the set. Suppose that E is the discrepancy of the set b_1, \dots, b_{N^2} , where the b_n are the differences between the a_n . VINOGRADOFF [4] has shown that

$$D \leq A E^{1/3},$$

where A is an absolute constant¹⁾. VAN DER CORPUT and PISOT [2] have shown that

$$D \leq A E^{1/2} \exp(A' |\log E|^{1/2}),$$

where A, A' are certain (specified) constants.

In this paper I prove the stronger result

$$(1) \quad D \leq A E^{1/2} (1 + |\log E|),$$

where A is an absolute constant. This result is best possible in the sense that it is not always true that

$$D \leq \varphi(E) E^{1/2} (1 + |\log E|)$$

where $\varphi(E)$ is any function of E which tends to zero with E , however slowly. The gegenbeispiel is apparently rather artificial. However, (1) also gives substantially the best possible result for the distribution of the quadratic residues modulo p , a prime, when applied to an appropriate „naturally occurring“ sequence.

Part I of this paper proves the basic inequality on which the above results depend. Part II gives the applications. Much of the detail of Part II is familiar in some or other context.

Part I.

Introduction. The object of this part is the proof of the following theorem. The connection with Diophantine approximation will be developed in part II. We also show (Theorem II) that Theorem I is best possible (apart, perhaps, from the constant).

¹⁾ I have given [1] a short proof of this in ignorance of the work of PISOT and VAN DER CORPUT. Note that D, E there have not quite the significance of D, E here.

Theorem I. Let Δ, k be real numbers and

$$(2) \quad k \geq \Delta > 0.$$

Let $f(x)$ be a real integrable function in $0 \leq x \leq k$ such that

- (i) $f(0) = 0$,
- (ii) $f(k) = \Delta$,
- (iii) $f(y) - f(x) \leq y - x$ if $0 \leq x \leq y \leq k$.

Put

$$(3) \quad \Phi(z) = \iint_{\substack{0 \leq x, y \leq k \\ |x-y| \leq z}} (f(y) - f(x))^2 dx dy$$

and

$$M(f) = \max_{0 < z \leq k} (\Delta z)^{-2} \Phi(z).$$

Let $M(k, \Delta)$ be the lower bound of $M(f)$ over all functions f satisfying (i), (ii), (iii). Then

$$M(k, \Delta) = \lambda(k/\Delta) (1 + \log k/\Delta)^{-2}$$

with some function $\lambda(k)$ satisfying

$$\lambda(k) \geq \Delta > 0$$

for some absolute constant Δ , and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) \geq \frac{1}{4e^2}.$$

Proof. From considerations of homogeneity we may suppose that

$$\Delta = 1.$$

We define the integer T and the positive real number s by

$$T = \left\lceil \frac{1}{2} \log k \right\rceil, \quad \log s = \frac{\log k + \log(2 + 2T)}{T + \frac{1}{2}},$$

so that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \log s = 2$$

and

$$(4) \quad \frac{s^T}{2(1+T)} = \frac{k}{s^{1/2}}.$$

To prove Theorem I it will be enough to show that

$$(5) \quad M = M(f) \geq \frac{1}{16s(1+T)^2}.$$

We shall deduce a contradiction from the falsity of (5); so we may suppose that

$$(6) \quad \Phi(z) < \frac{z^2}{16s(1+T)^2}.$$

We first show that²⁾

$$(7) \quad |\mathcal{G}_t| \geq \frac{s^t}{4(1+T)}, \quad (0 \leq t \leq T)$$

where \mathcal{G}_t is the set of x with

$$f(x) < \frac{2t+1}{4(1+T)}.$$

²⁾ Point sets are denoted by gothic capitals and e. g. the measure of \mathcal{G} is denoted by \mathcal{G} .
Mathematische Annalen. 128.

Now (7) is certainly true for $t = 0$ since

$$f(x) < \frac{1}{4(1+T)} \quad \text{for } 0 \leq x < \frac{1}{4(1+T)}$$

by (iii). We shall therefore suppose that (7) is true for t and prove it for $t+1$ if $t+1 \leq T$. Indeed, by (3) and (6) with

$$z = z_t = \frac{s^{t+1}}{2(1+T)}$$

the set \mathcal{E}_t of x with

$$\int_{|y-x| \leq z_t} (f(y) - f(x))^2 dy \geq \frac{z_t}{8(1+T)^2}$$

has measure

$$|\mathcal{E}_t| < \frac{s^t}{4(1+T)} \leq |\mathcal{G}_t|.$$

Hence there is some $x = x_t$ with $x \in \mathcal{G}_t$, $x \notin \mathcal{E}_t$, i. e.

$$f(x_t) < \frac{2t+1}{4(1+T)},$$

$$\int_{|y-x_t| \leq z_t} (f(y) - f(x_t))^2 dy \leq \frac{z_t}{8(1+T)^2}.$$

In particular, the set \mathcal{F}_t of y with

$$|f(y) - f(x_t)| \geq \frac{1}{2(1+T)}, \quad |y - x_t| \leq z_t$$

has measure

$$|\mathcal{F}_t| \leq \frac{1}{2} z_t.$$

But the set of y with

$$|y - x_t| \leq z_t, \quad 0 \leq y \leq k$$

has measure at least z_t , since

$$z_t \leq \frac{k}{s^{1/2}} < k,$$

by (4). Hence

$$f(y) < f(x_t) + \frac{1}{2(1+T)} < \frac{2t+3}{4(1+T)}$$

in a set of measure at least

$$\frac{1}{2} z_t = \frac{s^{t+1}}{4(1+T)}.$$

This proves (7) with $t+1$ for t . Hence, by induction, (7) is true for $0 \leq t \leq T$.

In particular, by (4), we have

$$f(x) < \frac{2T+1}{4(1+T)}$$

in a set \mathcal{G} of measure

$$|\mathcal{G}| = |\mathcal{G}_T| \geq \frac{k}{2s^{1/2}}.$$

Similarly,

$$f(x) > \frac{2T+3}{4(1+T)}$$

in a set \mathcal{H} of measure

$$|\mathcal{H}| \geq \frac{k}{2s^{1/2}}.$$

Hence, finally,

$$\begin{aligned}\Phi(k) &\geq \iint_{\substack{x \in \mathfrak{G} \\ y \in \mathfrak{D}}} (f(y) - f(x))^2 dx dy \\ &\geq \frac{|\mathfrak{G}| |\mathfrak{D}|}{4(1+T)^2} \\ &\geq \frac{k^2}{16s(1+T)^2},\end{aligned}$$

which contradicts (6). This contradiction shows that (5) is true and hence that Theorem I holds.

The following theorem shows that Theorem I is essentially the best possible.

Theorem II. *Let Δ, k be real numbers satisfying (2). Then there is a function $f(x)$ satisfying the conditions of Theorem I such that*

$$M(f) \leq \frac{B}{(1 + \log k/\Delta)^2}.$$

where B is an absolute constant.

Proof. As before we may suppose that

$$\Delta = 1.$$

For small k we put

$$f(x) = \frac{x}{k}, \quad (0 \leq x \leq k)$$

and so

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \iint_{\substack{0 \leq x, y \leq k \\ |y-x| \leq z}} (f(y) - f(x))^2 dx dy \\ &\leq \left(\frac{z}{k}\right)^2 \iint_{0 \leq x, y \leq k} dx dy \\ &= z^2.\end{aligned}$$

Hence we may suppose that

$$k > e.$$

For such k we put

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 & (0 \leq x \leq 1), \\ f(x) &= \frac{\log x}{\log k} & (1 \leq x \leq k),\end{aligned}$$

so that $f(x)$ is continuous and monotone. It clearly satisfies conditions (i), (ii) of Theorem I and it also satisfies (iii) since

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 & (0 \leq x < 1), \\ f'(x) &= \frac{1}{x \log k} < 1 & (1 < x \leq k),\end{aligned}$$

Further,

$$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{\log y - \log x}{\log k}$$

if

$$0 < x \leq y \leq k.$$

Hence, for any z ,

$$\begin{aligned}\Phi(z) &\leq 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq y \leq k \\ y-x \leq z}} (f(y) - f(x))^2 dx dy \\ &\leq \frac{2}{\log^2 k} \iint_{\substack{0 < x \leq y \leq k \\ y-x \leq z}} \left(\log \frac{y}{x}\right)^2 dx dy \\ &\leq \frac{2 B' z^2}{\log^2 k},\end{aligned}$$

where

$$B' = \iint_{\substack{0 < x \leq y < \infty \\ y-x \leq 1}} (\log y/x)^2 dx dy$$

is an absolute constant. This proves Theorem II.

Part II.

Introduction. In this part I prove the following theorems. The principal interest is when D, E are small.

Theorem III. Let a_1, \dots, a_N be some set and b_1, \dots, b_N the set of the differences in some order. Let D, E be the corresponding discrepancies. Then there is a function $\gamma(E)$ of E such that

$$D < \gamma(E) E^{1/2} (1 + |\log E|)$$

where

$$\gamma(E) \leq A$$

for some absolute constant A , and

$$\lim_{E \rightarrow 0+} \gamma(E) = e.$$

Theorem IV. Let $\phi(E)$ be any function of E tending arbitrarily slowly to 0 with E . Then it is not true that

$$D \leq \phi(E) E^{1/2} (1 + |\log E|)$$

for all sequences a_n .

The sequences used to prove Theorem IV are artificially constructed. However when Theorem III is applied to the sequence

$$a_n = \frac{n^2}{p} \quad 1 \leq n \leq N = \frac{p-1}{2},$$

where p is a large prime, it gives the following theorem.

Theorem V. Let p be a large prime. Then the number of quadratic residues of p less than x , where $x < p$, is

$$\frac{1}{2}x + O(p^{1/2} \log p),$$

where the constant implied by the O is independent of p (and x).

This result is known from the theory of GAUSS' sums, and PALEY [3] has shown that the error is not $o(p^{1/2} \log \log p)$. The only property of quadratic residues employed is that the number of solutions of

$$x = m^2 - n^2 (p) \quad 0 \leq m, n \leq \frac{p-1}{2}$$

for $p \nmid x$ is

$$\frac{1}{4}p + O(1).$$

Theorem V is equivalent to

$$(8) \quad \left| \sum_{u=x}^y \left(\frac{u}{p} \right) \right| \leq A p^{1/2} \log p$$

where $\left(\frac{u}{p} \right)$ is the symbol of quadratic residuacity and A is an absolute constant. A reworking of the proof with numerical constants (which I do not present in detail) gives indeed

$$\left| \sum_{u=x}^y \left(\frac{u}{p} \right) \right| \leq (2^{3/2} e + o(1)) p^{1/2} \log p$$

As the best result known to date appears to be

$$\left| \sum_{u=x}^y \left(\frac{u}{p} \right) \right| \leq p^{1/2} \log p,$$

even the numerical constant is not so bad as might have been anticipated.

We can prove a slightly stronger result than (8) namely

$$\left| \sum_{u=x}^y \left(\frac{u}{p} \right) \right| \leq A p^{1/2} \max \left(1, \log \frac{y-x}{p^{1/2}} \right).$$

This is a special case of a result given (without proof) in a footnote by PALEY. He presumably used entirely different methods, and it is perhaps rather surprising that the present methods lead to precisely the same form of estimate.

It should be remarked that Theorem I enables us to sharpen other theorems in the paper of VAN DER CORPUT and PISOT. For example a straightforward adaptation of their methods proves.

Theorem VI. Let a_1, \dots, a_N be a sequence and let

$$a_{i+1} - a_1, a_{i+2} - a_2, \dots, a_N - a_{N-i}$$

be the difference sequences with respective discrepancies $D, D^{(i)}$. Then for any integer $M, 1 \leq M \leq N$, we have

$$D < A \Omega^{1/2} (1 + |\log \Omega|),$$

where A is an absolute constant and

$$\Omega = \frac{(N+M)(M+1)}{N M^2} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^M D^{(i)} \right).$$

Proof of Theorem III. Define $F(\alpha, \beta)$ for $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, to be the number of solutions of

$$\alpha \leq \{a_n\} < \beta \quad 1 \leq n \leq N$$

and for $0 \leq \alpha < 1$ put

$$R(\alpha) = \alpha - \frac{1}{N} F(0, \alpha).$$

It is convenient to define $R(\alpha)$ for all α by putting

$$R(\alpha \pm 1) = R(\alpha).$$

Then the discrepancy D is

$$D = \max_{\alpha, \beta} |R(\beta) - R(\alpha)|.$$

Similarly we define $G(\alpha, \beta)$ for $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ to be the number of solutions of

$$\alpha \leq \{b_n\} < \beta \quad 1 \leq n \leq N^2.$$

For $0 \leq \alpha < 1$, put

$$S(\alpha) = \alpha - \frac{1}{N^2} G(0, \alpha)$$

and define $S(\alpha)$ for all α by periodicity modulo 1. Then

$$E = \max_{\alpha, \beta} |S(\beta) - S(\alpha)|.$$

Finally, for all x we put

$$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\}) = \min_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} |n - x|.$$

We first prove the following identity (which shows the connection with Theorem I).

Lemma 1.

$$(9) \quad \int_0^1 (R(\xi + \delta) - R(\xi))^2 d\xi = \int_0^{|\delta|} (S(-\xi) - S(\xi)) d\xi$$

for all δ .

Proof. Clearly both sides of the identity are periodic in δ modulo 1 since $R(x)$ is. Further, both are unchanged by writing $-\delta$ for δ . Hence we may suppose that

$$(10) \quad 0 \leq \delta = \|\delta\| \leq \frac{1}{2}.$$

We shall prove that both sides of the identity are

$$(11) \quad -\delta^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} \max(0, \delta - \|b_n\|).$$

Indeed,

$$(12) \quad \begin{aligned} \int_0^\delta S(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} \delta^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{0 \leq \{b_n\} < \delta} \int_{\{b_n\}}^\delta 1 d\xi \\ &= \frac{1}{2} \delta^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{0 \leq \{b_n\} < \delta} (\delta - \{b_n\}). \end{aligned}$$

Similarly, for $0 < \xi \leq 1/2$ we have

$$S(-\xi) = S(1 - \xi) = 1 - \xi - \frac{1}{N^2} \sum_{0 \leq \{b_n\} < 1 - \xi} 1 = -\xi + \frac{1}{N^2} \sum_{1 - \xi \leq \{b_n\}} 1.$$

Hence,

$$(13) \quad \int_0^\delta S(-\xi) d\xi = -\frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{1 - \delta \leq \{b_n\}} (\delta + \{b_n\} - 1).$$

Combining (12) and (13) and using (10) we see that the right hand side of (9) is in fact (11).

On the other hand,

$$R(\xi + \delta) - R(\xi) = \delta - \sum_{n=1}^N \varphi(a_n - \xi);$$

where $\varphi(x)$ is defined by

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{N} \text{ if } \{x\} < \delta, \\ &= 0 \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

Clearly

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^N \varphi(a_n - \xi) d\xi = \sum_{n=1}^N \int_0^1 \varphi(a_n - \xi) d\xi = \delta.$$

Further

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N \varphi(a_n - \xi) \right)^2 d\xi &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \int_0^1 \varphi(a_m - \xi) \varphi(a_n - \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \text{Max}(0, \delta - \|a_m - a_n\|) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \text{Max}(0, \delta - \|b_n\|). \end{aligned}$$

But the left hand side of (9) is

$$\int_0^1 \left(\delta - \sum_{n=1}^N \varphi(a_n - \xi) \right)^2 d\xi,$$

and so is equal to (11).

This concludes the proof of the lemma.

Corollary.

$$\int_0^1 (R(\xi + \delta) - R(\xi))^2 \leq |\delta| E.$$

Proof.

$$|S(-\xi) - S(\xi)| \leq E; \quad |\delta| \geq \|\delta\|.$$

Lemma 2. Suppose that

$$\int_0^1 (R(\xi + \delta) - R(\xi))^2 d\xi \leq |\delta| \Omega$$

for all δ and some Ω . Then

$$D \leq \gamma(\Omega) \Omega^{1/2} (1 + |\log \Omega|),$$

where $\gamma(\Omega)$ depends only on Ω . Further,

$$\gamma(\Omega) \leq A,$$

where A is an absolute constant, and

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0+} \gamma(\Omega) = e.$$

Remark. Theorem II then follows immediately from Lemma 1, Corollary and Lemma 2.

Proof. Let ε be arbitrarily small. By the definition of D we can find α , β such that

$$R(\alpha) - R(\beta) > D - \varepsilon$$

where, by the periodicity of R , we may suppose that

$$\alpha < \beta < \alpha + 1.$$

Put

$$k = \beta - \alpha,$$

$$\Delta = R(\beta) - R(\alpha) (> D - \varepsilon),$$

and

$$f(x) = R(\alpha + x) - R(\alpha) \quad (0 \leq x \leq k).$$

Then, by hypothesis,

$$\int_0^{k-\delta} (f(x + \delta) - f(x))^2 dx \leq \delta \Omega \quad (0 \leq \delta \leq k).$$

Integrating over $0 \leq \delta \leq z$ we have

$$\iint_{\substack{0 \leq x, y \leq k \\ |y-x| \leq z}} (f(y) - f(x))^2 dx dy \leq z^2 \Omega$$

for all z . Hence, by Theorem I,

$$(14) \quad \Omega \geq \frac{\lambda(k/\Delta) \Delta^2}{(1 + \log k/\Delta)^2},$$

where $\lambda(k)$ is a function such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) \geq \frac{1}{4e^2}; \quad \lambda(k) \geq A > 0,$$

for some absolute constant A .

We now deduce that

$$(15) \quad \Omega \geq \frac{\mu(D) D^2}{(1 + |\log D|)^2}$$

where $\mu(D)$ is a function of D such that

$$(i) \quad \mu(D) \geq A > 0 \text{ for an absolute constant } A.$$

$$(ii) \quad \lim_{D \rightarrow 0+} \mu(D) = \frac{1}{4e^2}.$$

Indeed (15) for some $\mu(D)$ satisfying (i) follows at once from Theorem I, since $0 < k < 1$, $\lambda(k) \geq A > 0$, on letting $\Delta \rightarrow D$. It remains to show that we can find a $\mu(D)$ satisfying (ii). But, by Theorem I, if η is arbitrarily small we can find a k_0 such that

$$\lambda(k) \geq \frac{1}{4e^2} - \eta \quad (\text{all } k \geq k_0).$$

If $\frac{k}{\Delta} \geq k_0$, the right hand side of (14) is at least

$$(16) \quad \frac{\left(\frac{1}{4e^2} - \eta\right) \Delta^2}{(1 + |\log \Delta|)^2}.$$

If $k/\Delta < k_0$, the right hand side of (14) is at least

$$\frac{A \Delta^2}{(1 + \log k_0)^2},$$

where A is the constant of (i), and this is greater than (16) if Δ is sufficiently small. Hence, in any case, the right hand side of (14) is at least (16) if Δ is small enough. On letting $\Delta \rightarrow D$ we see that (15) holds for a $\mu(D)$ satisfying (ii).

Finally, the truth of lemma 2 is an immediate consequence of (15) on noting that

$$\lim_{D \rightarrow 0+} \frac{\log \Omega_0(D)}{\log D} = 2,$$

where $\Omega_0(D)$ is the right hand side of (15).

From (14) we can obtain a slightly stronger result which we express as a corollary.

Corollary. *Let α, β be two numbers such that*

$$0 \leq \alpha < \beta = \alpha + k < 1, \quad R(\beta) - R(\alpha) = \Delta > 0.$$

Then

$$(17) \quad \Delta \leq A \Omega^{1/2} \text{Max} \left(1, \log \frac{k}{\Omega^{1/2}} \right)$$

for some absolute constant²) A .

Proof. We may assume that

$$\Delta \geq \Omega^{1/2}$$

since otherwise (17) is certainly true. But then, by (14)

$$\begin{aligned} \Delta &\leq A \Omega^{1/2} (1 + \log k/\Delta) \\ &\leq A \Omega^{1/2} (1 + \log k/\Omega^{1/2}). \end{aligned}$$

Proof of Theorem IV. In view of Theorem V and since the proof of Theorem IV is similar to that of Theorem II we give only an outline. Suppose that Δ is a number such that

$$0 < \Delta < \frac{1}{2e}$$

and put

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{if } \|x\| < \Delta \\ f(x) &= \Delta \frac{\log \|x\| - \log \Delta}{\log 1/2 - \log \Delta} \quad \text{if } \Delta \leq \|x\|. \end{aligned}$$

Clearly $f(x)$ is continuous and

$$f(y) - f(x) < y - x \quad \text{if } y > x,$$

since $f'(x) < 1$ where the derivative exists. Put

$$g(y) = \int_0^1 (f(x) - f(x+y)) f'(x) dx.$$

It is easily verified that

$$|g(y)| \leq \frac{A \Delta^2}{\log^2 \Delta}$$

for some absolute constant A .

But $f(x)$ can be approximated to arbitrarily closely by the $R(x)$ of a sequence a_1, \dots, a_N . [e. g. by taking N large and taking a_n to be the (unique) solution of $a_n - f(a_n) = \frac{n-1}{N}$]. Then $g(y)$ is an arbitrarily good approximation to $S(y)$. Hence, for such a sequence,

$$D \div \Delta, E = \text{Max}_{\alpha, \beta} |S(\beta) - S(\alpha)| = O\left(\frac{D^2}{\log^2 D}\right).$$

This is the assertion of the theorem.

Proof of Theorem V. Let $p = 2N + 1$ be a large prime. Then for integer u , the number of solutions of

$$(18) \quad m^2 - n^2 = u(p) \quad 0 < m, n < \frac{1}{2}p$$

is

$$(19) \quad \begin{cases} N & \text{if } u \equiv 0(p), \\ \frac{1}{2}(N-1) & \text{if } u \not\equiv 0(p) \text{ and } 2 \nmid N, \\ \frac{1}{2}\left(N-1 - \left(\frac{u}{p}\right)\right) & \text{if } u \not\equiv 0(p) \text{ and } 2|N, \end{cases}$$

²) We have written $\text{Max}(1, \log k/\Omega^{1/2})$ and not $1 + \log k/\Omega^{1/2}$ to cover the case when Ω is large but k and Δ are small.

where $\left(\frac{u}{p}\right)$ is the symbol of quadratic residuacity; as is easily verified. In particular, if

$$0 \leq x < p$$

and x is real, the number of solutions of (18) with

$$0 \leq u < x$$

is

$$(20) \quad \frac{1}{2} N x + O(N) = N^2 \cdot \frac{x}{p} + O(N).$$

We now apply Theorem III to the N numbers

$$(21) \quad a_n = \frac{n^2}{p} \quad (1 \leq n \leq N).$$

The N^2 numbers $\{b_n\}$ are then just the numbers

$$\frac{u}{p} \quad (0 \leq u < p)$$

with the multiplicities given by (19). In particular, by (20), their discrepancy E is given by

$$N^2 E = O(p) \\ \text{i. e. } E = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Hence, by Theorem IV, the discrepancy of the N numbers (21) is

$$D = O(p^{-1/2} \log p).$$

But this is precisely the assertion of Theorem V.

We can indeed prove the following slightly stronger assertion.

Corollary. The number r of quadratic residues in an interval

$$0 \leq a \leq u < b \leq p$$

is

$$r = \frac{1}{2}(b-a) + p^{1/2} O\left(\text{Max}\left(1, \log \frac{b-a}{p^{1/2}}\right)\right).$$

Proof. We have

$$R(b) - R(a) = \frac{1}{2}(a-b) - r.$$

If $R(b) > R(a)$ the corollary follows at once by using Lemma 2, Corollary instead of Lemma 2. If $R(b) < R(a)$ we consider the distribution of the non-residues instead of the residues.

I am grateful to Dr. E. S. BARNES for commenting on the manuscript.

References.

- [1] J. W. S. CASSELS: A theorem of VINOGRADOFF on uniform distribution. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **46**, 642—644 (1950). — [2] J. G. VAN DER CORPUT and CH. PISOT: Sur la discrepancy modulo un. *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* **52**, 476—486, 554—565, 713—722 (1939). — *Indag. Math.* **1**, 143—153, 184—195, 260—269 (1939). — [3] R. E. A. C. PALEY: A theorem on characters. *J. London Math. Soc.* **7**, 28—32 (1932). — [4] И. М. ВИНГРАДОВ: О ДРУГЫХ ЧАСТЯХ ЦЕЛОГО МНОГОЧЛЕНА. *Изв. Акад. Наук* **20**, 585—600 (1926).

(Eingegangen am 29. September 1952.)

Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen.

I. Komplexflächen als Schiebflächen*.

Von

MARTIN BARNER in Freiburg/Br.

Die Komplexflächen bilden neben den Regelflächen wohl die auffallendste spezielle Flächenklasse der projektiven Differentialgeometrie. Sie hängen von fünf willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab. Laut Definition gehören die Tangenten einer jeden Asymptotenlinie der einen Schar einem linearen Komplex an.

A. TERRACINI hat verschiedene Arbeiten der Geometrie dieser Flächen gewidmet und deren wichtigste allgemeine Eigenschaften angegeben¹⁾. Er gewinnt seine geometrischen Aussagen mit differentiell synthetischen Mitteln. Durch K. STRUBECKER haben vor kurzem die zweisinnigen Komplexflächen eine eingehende Behandlung erfahren²⁾.

In der vorliegenden Untersuchung wird die Theorie der (einsinnigen) Komplexflächen analytisch aufgebaut mit dem Ergebnis, daß sich ihre Parameterdarstellung in gewisser Weise explizit angeben läßt. Die rechnerische Behandlung dieser Flächen gewinnt hierdurch etwa dieselbe Einfachheit wie die der Regelflächen. Es ergeben sich dann ohne Mühe die bekannten und wohl auch einige neue geometrische Einzelheiten³⁾.

Dies wird ermöglicht durch Anwendung der kinematischen Betrachtungsweise auf die projektive Differentialgeometrie. Hierzu wird zunächst die allgemeine Theorie der „projektiven Bewegungen“ entwickelt [1⁴⁾], zu denen insbesondere die sog. „Schiebungen“ als Spezialfall gehören. Im bewegten System einer Schiebung ist ein Nullsystem ausgezeichnet, das jeden Punkt

*) Über die Grundgedanken dieser Behandlungsweise der Komplexflächen hat Verfasser bereits 1951 in Berlin berichtet.

¹⁾ A. TERRACINI, *Sulle superficie, le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe*; *Atti Soc. natural. e. matem. Modena* (5) 5, 82—107 (1919/20).

G. FUBINI-E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale I, II. Appendice IV*^a: A. TERRACINI, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*. (Bologna 1927.)

²⁾ Gehören die Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen an, so sprechen wir von zweisinnigen Komplexflächen. Sie fallen natürlich mit unter die hier betrachteten Flächen, haben jedoch viele spezielle Eigenschaften, auf die hier nicht eingegangen wird. Man vgl.:

K. STRUBECKER, *Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören*. *Math. Zeitschr.* 52, 401—435 (1949). Man findet dort auch die ältere Literatur angegeben.

³⁾ Weitere geometrische Ergebnisse, die sich mit den dargestellten Methoden gewinnen lassen, sollen an anderer Stelle folgen.

⁴⁾ Die Nummern verweisen auf die entsprechenden Abschnitte der vorliegenden Arbeit.

auf die Schmiegeebene der hindurchlaufenden Bahnkurve abbildet [2]. Zu einer Schiebung gehört dann umkehrbar eindeutig eine Kurve des Geradenraumes [3]. Eine Komplexkurve im bewegten System einer Schiebung, die durch das ausgezeichnete Nullsystem in ihre Schmiegeebenenmannigfaltigkeit übergeführt wird, erzeugt eine Komplexfläche, und jede Komplexfläche läßt sich so gewinnen. Damit hat man auch die Parameterdarstellung [4]. Es ist dann noch von den Eigenschaften der Bahnkurven einer Schiebung die Rede, insbesondere führen Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Schiebungen auf ebensolche für Komplexflächen [5]. Zuletzt wird erwähnt, wie man in Fortführung der Theorie zu weiteren geometrischen Ergebnissen gelangen kann [6].

1. Projektive Kinematik. Durch vier linear unabhängige Vektoren

$$a_i = \{\overset{i}{a}_0, \overset{i}{a}_1, \overset{i}{a}_2, \overset{i}{a}_3\}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

wird im dreidimensionalen projektiven Raum ein Koordinatensystem definiert. Die a_i bilden die Basisvektoren dieses Bezugssystems, wir sprechen kurz auch von einer Basis.

Ein Punkt p des Raumes besitzt die Darstellung

$$p = p_0 a_0 + p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3.$$

Umgekehrt gehört zu vier Zahlen p_0, p_1, p_2, p_3 , die nicht alle verschwinden, genau ein Punkt. Den Basisvektoren selbst sind so vier Punkte zugeordnet, die die Eckpunkte des Koordinatentetraeders bilden. Die p_i heißen die Koordinaten des Punktes p , bezogen auf die Basis der a_i .

Die Koordinaten sind homogen, durch

$$p_i \text{ und } \varrho p_i, \quad \varrho \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

wird derselbe Punkt festgelegt. Aus diesem Grund definieren die Vektoren

$$(1,1) \quad a_i \text{ und } \lambda a_i, \quad \lambda \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

ein und dieselbe Basis.

Mit den a_i sind auch die Vektoren

$$(1,2) \quad \hat{a}_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} a_k, \quad \|a_{ik}\| \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

linear unabhängig und als Basisvektoren brauchbar. Bei freier Wahl der Koeffizientenmatrix

$$A = (a_{ik})$$

führt man in dem betrachteten Raum die allgemeinste Basis ein.

Wir denken uns jetzt das Bezugssystem „bewegt“, d. h. analytisch, wir betrachten die Vektoren a_i als Funktionen eines Parameters t , unter dem wir uns die Zeit vorstellen können. Wir sprechen dann von einer *projektiven Bewegung*. Die *projektive Kinematik* beschäftigt sich mit dem Studium solcher Bewegungsvorgänge, zu denen natürlich als Sonderfälle auch die euklidischen und nichteuklidischen Bewegungen gehören.

Irgendein fester Punkt im bewegten System

$$(1,3) \quad p = p_0 a_0 + p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3, \quad p_i = \text{const.}$$

beschreibt eine Bahnkurve in der Bewegung. Insbesondere durchlaufen die

Eckpunkte des Koordinatentetraeders selbst Bahnkurven, doch sind diese vor anderen im allgemeinen nicht ausgezeichnet.

Nach (1) lassen die Vektoren $a_i(t)$ noch Umnormungen mit einem gemeinsamen Faktor $\lambda(t)$ zu, der jetzt auch von t abhängen kann. Dies nützen wir aus, die Normierung der Basisvektoren so einzurichten, daß die Determinante

$$(1,4) \quad (a_0, a_1, a_2, a_3) = \text{const.}$$

konstant ist. Gehen wir nun mittels (2) (mit einer konstanten Matrix A) zu einer anderen Basis des bewegten Systems über, so haben die zugehörigen Basisvektoren $\hat{a}_i(t)$ dieselbe Eigenschaft. Andererseits kann man durch (2) jede zulässige Basis im bewegten System einführen.

Die Vektoren $a_i(t)$ genügen Ableitungsgleichungen der Gestalt

$$(1,5) \quad a'_i = \sum_{k=0}^3 \gamma_{ik} a_k, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

und die Normierungsbedingung (4) hat zur Folge, daß die Spur der Matrix

$$(1,6) \quad \Gamma = (\gamma_{ik})$$

verschwindet, d. h. es ist:

$$(1,7) \quad \gamma_{00} + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = 0.$$

Beim Übergang zu anderen Basisvektoren des bewegten Systems mittels (2) wird nach (5):

$$\hat{a}'_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} a'_k = \sum_{k,l=0}^3 a_{ik} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k,l,m=0}^3 a_{ik} \gamma_{kl} a_{lm}^{-1} \hat{a}_m,$$

und also gilt:

$$(1,8) \quad \hat{\Gamma} = A \Gamma A^{-1}.$$

Hier ist $A^{-1} = (a_{lm}^{-1})$ die zu A inverse Matrix. Die Spur einer Matrix ist bei Transformation invariant — die Spur von $\hat{\Gamma}$ verschwindet also wieder, wie es sein soll.

Es folgt: *Zwei projektive Bewegungen sind (unter Beachtung der Parameterverteilung) dann und nur dann projektiv gleichwertig, wenn die zugehörigen Koeffizientenmatrizen der Ableitungsgleichungen der normierten Basisvektoren durch Transformation mit einer Matrix mit konstanten Elementen auseinander hervorgehen.*

Da wir im folgenden die kinematische Methode auf Fragen der projektiven Differentialgeometrie anwenden wollen, kommt es uns im allgemeinen auf die spezielle Wahl der Parameterverteilung nicht an. Gegenüber Parameterttransformation sind die a_i invariant, die γ_{ik} also Halbinvariante vom Gewicht 1⁵⁾.

⁵⁾ Setzt man $t^* = F(t)$ und $\frac{dt^*}{dt} = \varphi(t)$, so wird $\gamma_{ik}^* = \varphi^{-1} \gamma_{ik}$. Über die halbinvarianten Methoden in der projektiven Differentialgeometrie vergleiche man die Arbeiten von G. BOL, in unserem Zusammenhang etwa: G. BOL: Einige Ergebnisse aus der Differentialgeometrie der Raumkurven im dreidimensionalen Raum. Arch. Math. 1, 1—8 (1948). Oder die zusammenfassende Darstellung: G. BOL: Projektive Differentialgeometrie. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, Bd. 1 (1950), Bd. 2 u. 3 im Erscheinen.

Die einfachsten halbinvarianten Größen, die mit der Bewegung invariant verknüpft sind, sind die Invarianten der Matrix F . Deren Verschwinden hat also für die Bewegung invariante Bedeutung. Die Determinante $\|\gamma_{ik}\|$ z. B. ist eine Halbinvariante vom Gewicht 4⁶⁾. Verschwindet sie nicht, so kann man durch

$$(1,9) \quad \bar{t} = \int \sqrt{\pm \|\gamma_{ik}\|} dt$$

einen invarianten Parameter in der Bewegung festlegen⁷⁾. Nach seiner Einführung entscheidet man dann mittels des ausgesprochenen Satzes, ob zwei Bewegungen projektiv gleichwertig sind (ohne Rücksicht auf die Parameterverteilung) oder nicht.

Betrachten wir die Bewegung eines Punktes

$$q = \sum_{k=0}^3 q_k a_k,$$

der nicht fest zu sein braucht im bewegten System. Es wird:

$$(1,10) \quad q' = \sum_{k=0}^3 q'_k a_k + \sum_{k,l=0}^3 q_k \gamma_{kl} a_l.$$

Dieser Vektor, dem ein Punkt auf der Tangente an die von q beschriebene Kurve entspricht, setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen. Zum ersten Vektor gehört ein Punkt der Tangente der von q im bewegten System durchlaufenen Kurve, der zweite Vektor dagegen kennzeichnet einen Punkt der Tangente der Bahnkurve, die entsteht, wenn man q an der betrachteten Stelle festhält im bewegten System. Ist der erste Bestandteil mit q selbst proportional, so haben wir es mit einem festen Punkt des bewegten Systems zu tun. Ist dies dagegen beim zweiten Bestandteil der Fall, so sprechen wir von einem *momentanen Fixpunkt*. Die momentanen Fixpunkte einer projektiven Bewegung berechnen sich also aus

$$(1,11) \quad \sum_{k=0}^3 (\gamma_{ki} - \varrho \delta_{ki}) q_k = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

wobei ϱ eine der vier Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(1,12) \quad \|\gamma_{ki} - \varrho \delta_{ki}\| = 0$$

ist. Die stationären Punkte dagegen findet man aus

$$q' - \varrho q = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$(1,13) \quad -q'_i + \varrho q_i = \sum_{k=0}^3 \gamma_{ki} q_k, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Statt von den Punkten können wir von den Ebenen des Raumes ausgehen und projektive Bewegungen in der Ebenengesamtheit betrachten. Bilden die Vektoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ eine Basis des bewegten Systems (als Gesamtheit deren Ebenen), so gelten auch hier Ableitungsgleichungen:

$$(1,14) \quad \mathfrak{A}'_i = \sum_{k=0}^3 \Gamma_{ik} \mathfrak{A}_k, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

⁶⁾ Es ist $\|\gamma_{ik}^*\| = \varphi^{-4} \|\gamma_{ik}\|$, das Vorzeichen von $\|\gamma_{ik}\|$ hat also invariante Bedeutung.

⁷⁾ Bezogen auf \bar{t} ist $\|\gamma_{ik}\| = \pm 1$. Die Normierung einer anderen Invarianten der Matrix F zu 1 führt in gleicher Weise auf einen invarianten Parameter.

Handelt es sich um Ebenen desselben bewegten Systems, so können wir die Basisvektoren \mathfrak{A}_i durch

$$(1,15) \quad \mathfrak{A}_i \alpha_k = \delta_{ik}$$

definieren, und Differentiation lehrt dann nach (5) und (14) mittels (15):

$$(1,16) \quad \Gamma_{ik} + \gamma_{ki} = 0.$$

Die Geraden des Raumes denken wir uns — wie üblich — auf die Punkte der absoluten Quadrik Q des fünfdimensionalen KLEINSchen Geradenraumes abgebildet. Eine projektive Bewegung des R_3 induziert dann im Geradenraum eine projektive Bewegung derart, daß die absolute Quadrik Q — natürlich nicht punktweise — festbleibt. Insofern entspricht einer projektiven Bewegung des R_3 eine hyperbolische Bewegung des KLEINSchen R_5 .

Eine feste Gerade im bewegten System des R_3 hat als Bild im R_5 eine Bahnkurve, die ganz auf der absoluten Quadrik Q liegt. Einem Punkt des Geradenraumes, der nicht auf Q liegt, ist im R_3 ein linearer Komplex zugeordnet; alle Geraden, deren Bilder polar zu dem genannten Punkt bezüglich Q sind, gehören dem Komplex an. Einem linearen Komplex des bewegten Systems des R_3 entsprechen in dieser Weise die Bahnkurven der Bewegung des R_3 , die nicht auf der absoluten Quadrik liegen.

Die Vektoren

$$(1,17) \quad (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_0, a_3), (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)$$

bilden eine Basis des bewegten Systems des R_5 . Hierdurch ist die induzierte Bewegung des Geradenraumes analytisch zugänglich.

Wir wollen hier die allgemeine Theorie der projektiven Bewegungen nicht weiter verfolgen, sondern zu einem Spezialfall übergehen, bei dem die gleichzeitige Betrachtung der projektiven Bewegung des R_3 und der hyperbolischen Bewegung des R_5 von Nutzen sein wird. Die speziellen Bewegungen, auf die wir abzielen, spielen in der Theorie der Komplexflächen eine wichtige Rolle.

2. *Schiebungen als spezielle projektive Bewegungen.* Fragen wir zunächst einmal danach, ob es projektive Bewegungen der Eigenschaft gibt, daß die Tangenten an die Bahnkurven des R_3 an jeder Stelle zu Bildern im R_5 momentane Fixpunkte haben. Betrachten wir die von p(1,3) beschriebene Bahnkurve. Nach (1,5) wird

$$(2,1) \quad \begin{aligned} p &= \sum_{i=0}^3 p_i a_i, \\ p' &= \sum_{i,k=0}^3 p_i \gamma_{ik} a_k, \\ p'' &= \sum_{i,k=0}^3 p_i \gamma'_{ik} a_k + \sum_{i,k,l=0}^3 p_i \gamma_{ik} \gamma_{kl} a_l. \end{aligned}$$

Der Bildpunkt der Tangente an die Bahnkurve im R_5

$$(2,2) \quad (p, p') = \sum_{i,k,l=0}^3 p_i p_k \gamma_{kl} (a_i, a_l)$$

ist momentaner Fixpunkt in der Bewegung des R_5 , falls in

$$(p, p')' = (p, p'') = \sum_{i, k, l=0}^3 p_i p_k \gamma_{kl}^i (a_i, a_l) + \sum_{i, k, l, m=0}^3 p_i p_k \gamma_{kl}^i \gamma_{lm}^i (a_i, a_m)$$

der zweite Bestandteil rechts mit (p, p') selbst proportional ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn es Funktionen $\varrho_n(t)$ mit $\varrho_3 \neq 0$ gibt derart, daß gilt:

$$\varrho_1 \sum_{k, m=0}^3 p_k \delta_{km} a_m + \varrho_2 \sum_{k, m=0}^3 p_k \gamma_{km} a_m + \varrho_3 \sum_{k, l, m=0}^3 p_k \gamma_{kl} \gamma_{lm} a_m = 0.$$

Die Tangente an jede Bahnkurve ist also momentaner Fixpunkt im R_5 , wenn für die Koeffizientenmatrix Γ die Beziehung besteht:

$$(2,3) \quad \varrho_1 \delta_{km} + \varrho_2 \gamma_{km} + \varrho_3 \sum_{l=0}^3 \gamma_{kl} \gamma_{lm} = 0, \quad k, m = 0, 1, 2, 3,$$

der man auch die Form

$$(2,4) \quad \varrho_1 E + \varrho_2 \Gamma + \varrho_3 \Gamma^2 = 0$$

geben kann. (3) bzw. (4) kennzeichnet projektive Bewegungen, in denen die Bilder der Tangenten an die Bahnkurven momentane Fixpunkte der induzierten Bewegung des R_5 sind.

Wir kommen nun zu unserer eigentlichen Fragestellung. Es sei im bewegten System des R_3 ein linearer Komplex ausgezeichnet, den wir als nicht speziell voraussetzen. Wir können dann die Basis des bewegten Systems so wählen, daß dem Punkt des R_5

$$(2,5) \quad w = (a_0, a_3) + (a_1, a_2)$$

dieser Komplex zugeordnet ist. Dies bedeutet u. a., daß wir die Kanten (a_0, a_3) , (a_1, a_2) des Koordinatentetraeders mit zwei Geraden zusammenfallen lassen, die in dem zum Komplex gehörenden Nullsystem konjugiert sind.

Gibt es — so fragen wir uns — projektive Bewegungen derart, daß die Tangente an jede Bahnkurve an jeder Stelle diesem linearen Komplex angehört? Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt (2) des R_5 für jede Wahl der p_i zu (5) polar ist, d. h. die Koeffizienten der Produkte $p_i p_k$ müssen einzeln zu w polar sein. Dies sind die Punkte des R_5 :

$$(2,6) \quad (a_i, a'_k) + (a_k, a'_i) = \sum_{l=0}^3 \gamma_{kl}^i (a_i, a_l) + \sum_{l=0}^3 \gamma_{li}^k (a_k, a_l), \quad i, k = 0, 1, 2, 3.$$

Polarität zu (2) tritt dann und nur dann ein, falls die Bedingungen

$$(2,7) \quad \begin{aligned} \gamma_{03} &= \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{30} = 0, \\ \gamma_{13} + \gamma_{02} &= 0, & \gamma_{31} + \gamma_{20} &= 0 \\ \gamma_{23} - \gamma_{01} &= 0, & \gamma_{32} - \gamma_{10} &= 0 \\ \gamma_{33} - \gamma_{00} &= 0, & \gamma_{22} - \gamma_{11} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Der Schluß, der zu (6) führt, bleibt auch richtig, wenn man im bewegten System zehn Punkte betrachtet, die nicht auf einer Quadrik liegen, und verlangt, daß die Tangenten an die von ihnen erzeugten Bahnkurven dem Komplex (5) angehören. Somit: *Gibt es im bewegten System zehn Punkte, die nicht auf einer Quadrik liegen, derart, daß die Tangenten der von ihnen beschriebenen Bahnkurven an jeder Stelle einem im bewegten System festen linearen Komplex angehören, so haben auch die Bahnkurven aller anderen Punkte diese Eigenschaft.*

Eine solche spezielle projektive Bewegung nennen wir eine projektive Schiebung oder kurz auch eine Schiebung^{a)}.

Nach (7) und (1,7) hat die Koeffizientenmatrix die Gestalt:

$$(2,8) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02} & 0 \\ \gamma_{10} & -\gamma_{00} & 0 & -\gamma_{02} \\ \gamma_{20} & 0 & -\gamma_{00} & \gamma_{01} \\ 0 & -\gamma_{20} & \gamma_{10} & \gamma_{00} \end{pmatrix}.$$

Legen wir die Basis des bewegten Systems einer Schiebung so, daß der ausgezeichnete Komplex durch (5) charakterisiert wird, so hat die Koeffizientenmatrix der Ableitungsgleichungen (1,5) die Form (8).

Aus (8) folgt nun sofort

$$(2,9) \quad \Gamma^2 = (\gamma_{00}^2 + \gamma_{00} \gamma_{10} + \gamma_{02} \gamma_{20}) E,$$

und der Vergleich mit (4) lehrt: In einer Schiebung sind die Bilder der Tangenten an die Bahnkurven momentane Fixpunkte der induzierten Bewegung des Geradenraumes.

Betrachten wir nun die Ebenen des bewegten Systems einer Schiebung. Diese sind durch das Nullsystem, das zu dem ausgezeichneten linearen Komplex gehört, den Punkten eindeutig zugeordnet. Bei dieser Korrelation gehen die Geraden des linearen Komplexes in sich über — der lineare Komplex hat für die Ebenen dieselbe Bedeutung wie für die Punkte. Es gilt also: In einer Schiebung definiert jede im bewegten System feste Ebene eine Torse, deren Erzeugende an jeder Stelle dem ausgezeichneten Komplex angehören. Analytisch läuft das darauf hinaus, daß die Koeffizientenmatrix Γ beim Umklappen um die Hauptdiagonale [vgl. (1,16)] in eine Matrix derselben Gestalt (8) übergeht.

Die Verhältnisse liegen jedoch noch bedeutend einfacher. Die Kehlpunkte dieser Torsen sind selbst fest im bewegten System, sie sind also die Bildpunkte im Nullsystem der Ebenen, die die Torsen erzeugen. Umgekehrt: die Schmiegeebene an eine jede Bahnkurve ist die Nullebene des zugehörigen Punktes.

Dies folgt unmittelbar aus der oben hervorgehobenen Tatsache, daß die Bildpunkte der Tangenten an die Bahnkurven momentane Fixpunkte in der Bewegung des Geradenraumes sind. Die Tangente der Kurve (p, p') fällt deshalb zusammen mit der Tangente an die Kurve, die (p, p') im bewegten System beschreibt. Diese Kurve verläuft jedoch nach Voraussetzung ganz in der Polarebene von w . Somit liegt

$$(p, p')' = (p, p'')$$

im ausgezeichneten Komplex. Die Geraden (p, p') und $(p, p'')^b$ spannen also die Nullebene von p und natürlich auch die Schmiegeebene der von p beschriebenen Bahnkurve auf. Es gilt also, wie behauptet, die für die Schie-

^{a)} Dieser Name rechtfertigt sich — wie wir später sehen werden — darin, daß zu den Schiebungen als Sonderfälle die CLIFFORDSchen Schiebungen der elliptischen, quasi-elliptischen und isotropen Geometrie gehören.

^{b)} Fallen diese beiden Geraden zusammen, so hat die Bahnkurve an der betrachteten Stelle einen Wendepunkt, und wir können jede Ebene durch die Tangente an die Bahnkurve, also insbesondere auch die Nullebene als Schmiegeebene betrachten.

bungen wichtige Aussage: *Durch das Nullsystem des ausgezeichneten Komplexes einer Schiebung wird jeder Punkt des bewegten Systems auf die Schmiegeebene der durch ihn laufenden Bahnkurve abgebildet.* Dual formuliert: *Das Nullsystem führt jede Ebene des bewegten Systems über in den Kehlpoint der von ihr in der Schiebung erzeugten Torse.*

Es ist klar, daß diese Eigenschaft die Schiebungen unter den projektiven Bewegungen kennzeichnet. Allgemeiner gilt: *Gibt es im bewegten System einer projektiven Bewegung eine Korrelation, die zu jeder Zeit jeden Punkt auf die Schmiegeebene der von ihm erzeugten Bahnkurve abbildet, so ist die Bewegung eine Schiebung.* Denn da Punkt und Bildebene, die ja Schmiegeebene sein soll, inzidieren, so kann die Abbildung nur ein Nullsystem sein. Da ferner die Tangente an die von einem Punkt erzeugte Bahnkurve in der Schmiegeebene liegt, die Nullebene sein soll, so sind diese Tangenten Gerade des zum Nullsystem gehörenden linearen Komplexes. Wir kommen zu unserem Ausgangspunkt zurück: Die Tangenten an die Bahnkurven gehören einem Komplex an, der fest ist im bewegten System.

Aus der Tatsache, daß die Bilder der Tangenten an die Bahnkurven momentane Fixpunkte in der Bewegung des Geradenraumes sind, folgt auch noch, daß diese Bilder an jeder Stelle in einem dreidimensionalen Unterraum liegen, d. h. die Tangenten gehören an jeder Stelle einer linearen Kongruenz an. Da nämlich (p, p') und (p, p') polar zu w sind, so sind auch w und w' polar zu (p, p') . Es gilt somit: *Die Tangenten an die Bahnkurven einer Schiebung gehören an jeder Stelle der durch*

$$(2,9) \quad w, w'$$

definierten linearen Kongruenz an.

Es ist zweckmäßig, die Auszeichnung des Komplexes w bereits in der Bezeichnungsweise hervortreten zu lassen. Hierzu setzen wir bzw.:

$$a_0 = q_1, \quad a_1 = \tilde{s}_1, \quad a_2 = \tilde{s}_2, \quad a_3 = q_2$$

$$w = (q_1, q_2) + (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2).$$

Die Ableitungsgleichungen (1,5) nehmen dann die Gestalt an

$$(2,10) \quad \begin{aligned} q'_i &= \alpha_{i1} \tilde{s}_1 + \alpha_{i2} \tilde{s}_2 + \alpha_i q_i \\ \tilde{s}'_i &= \beta_{i1} q_1 + \beta_{i2} q_2 + \beta_i \tilde{s}_i, \end{aligned} \quad i = 1, 2,$$

wobei

$$(2,11) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \beta_{11} & \beta & 0 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 0 & \beta & \beta_{22} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Hierin sind die ersten vier Bedingungen (7) bereits verwendet, die anderen und (1,7) lauten:

$$(2,12) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= \beta_{22}, & \alpha_{12} &= -\beta_{12}, & \alpha + \beta &= 0. \\ \alpha_{22} &= \beta_{11}, & \alpha_{21} &= -\beta_{21}, \end{aligned}$$

Zusammenfassend schreibt man hierfür:

$$(2,13) \quad \sum_{i=1}^2 \alpha_{i1} \beta_{ik} = \|\alpha_{ik}\| \delta_{ik}, \quad \alpha + \beta = 0, \quad i, k = 1, 2.$$

Für die Ebenenvektoren

$$(2,14) \quad \mathfrak{A}_0 = -\mathfrak{D}_2, \quad \mathfrak{A}_1 = -\mathfrak{S}_2, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{D}_1$$

wird entsprechend nach (1,16) wegen (10) und (12)

$$(2,15) \quad \begin{aligned} \mathfrak{D}_i' &= -\alpha_{i1} \mathfrak{S}_1 - \alpha_{i2} \mathfrak{S}_2 - \alpha \mathfrak{D}_i \\ \mathfrak{S}_i' &= -\beta_{i1} \mathfrak{D}_1 - \beta_{i2} \mathfrak{D}_2 - \beta \mathfrak{S}_i \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Zwischen Punkt und Ebenenvektoren besteht dann die Produkttabelle

$$(2,16) \quad \begin{array}{c|cccc} & q_1 & \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & q_2 \\ \hline \mathfrak{D}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathfrak{S}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{S}_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{D}_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Das Nullsystem des ausgezeichneten linearen Komplexes \mathfrak{w} ordnet dann den Punkt

$$q = q_0 q_1 + q_1 \hat{s}_1 + q_2 \hat{s}_2 + q_3 q_2$$

und die Ebene

$$\mathfrak{D} = q_0 \mathfrak{D}_1 + q_1 \mathfrak{S}_1 + q_2 \mathfrak{S}_2 + q_3 \mathfrak{D}_2$$

einander zu.

3. *Eineindeutige Zuordnung der Schiebungen des R_3 zu den Kurven des Geradenraumes.* Betrachten wir nun die projektive Bewegung, die durch die Schiebung des R_3 im Geradenraum induziert wird. Nach (1,17) bilden die Vektoren

$$(3,1) \quad (q_1, q_2), (\hat{s}_1, \hat{s}_2), (q_1, \hat{s}_1), (q_1, \hat{s}_2), (q_2, \hat{s}_1), (q_2, \hat{s}_2)$$

eine Basis des bewegten Systems des R_3 . Mittels (2,10) findet man für sie die Ableitungsgleichungen:

$$(3,2) \quad \begin{aligned} (q_1, q_2)' &= 2 \alpha (q_1, q_2) + \alpha_{21} (q_1, \hat{s}_1) + \alpha_{22} (q_1, \hat{s}_2) - \alpha_{11} (q_2, \hat{s}_1) - \alpha_{12} (q_2, \hat{s}_2) \\ (\hat{s}_1, \hat{s}_2)' &= 2 \beta (\hat{s}_1, \hat{s}_2) - \beta_{21} (q_1, \hat{s}_1) + \beta_{11} (q_1, \hat{s}_2) - \beta_{22} (q_2, \hat{s}_1) + \beta_{12} (q_2, \hat{s}_2) \\ (q_1, \hat{s}_1)' &= \beta_{12} (q_1, q_2) - \alpha_{12} (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \\ (q_1, \hat{s}_2)' &= \beta_{22} (q_1, q_2) + \alpha_{11} (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \\ (q_2, \hat{s}_1)' &= -\beta_{11} (q_1, q_2) - \alpha_{22} (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \\ (q_2, \hat{s}_2)' &= -\beta_{21} (q_1, q_2) + \alpha_{21} (\hat{s}_1, \hat{s}_2). \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin nach (2,12) die β_{ik} durch α_{ik} , β durch α und führt statt der Vektoren (q_1, q_2) , (\hat{s}_1, \hat{s}_2) die Linearkombinationen

$$(3,3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{w} &= (q_1, q_2) + (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \\ \mathfrak{v} &= (q_1, q_2) - (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \end{aligned}$$

als Basisvektoren ein, so nehmen die Ableitungsgleichungen (2) die Gestalt an:

$$(3,4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{w}' &= 2 \alpha \mathfrak{v} + 2 \alpha_{21} (q_1, \hat{s}_1) + 2 \alpha_{22} (q_1, \hat{s}_2) - 2 \alpha_{11} (q_2, \hat{s}_1) - 2 \alpha_{12} (q_2, \hat{s}_2) \\ \mathfrak{v}' &= 2 \alpha \mathfrak{w} \\ (q_1, \hat{s}_1)' &= -\alpha_{12} \mathfrak{w} \\ (q_1, \hat{s}_2)' &= \alpha_{11} \mathfrak{w} \\ (q_2, \hat{s}_1)' &= -\alpha_{22} \mathfrak{w} \\ (q_2, \hat{s}_2)' &= \alpha_{21} \mathfrak{w}. \end{aligned}$$

Die im bewegten System feste Hyperebene E mit der Parameterdarstellung (3,5) $\mathbf{r} = r_1 \mathbf{v} + r_2 (q_1, \hat{s}_1) + r_3 (q_1, \hat{s}_2) + r_4 (q_2, \hat{s}_1) + r_5 (q_2, \hat{s}_2)$, $r_i = \text{const.}$, ist die Polarebene des Punktes \mathbf{w} . Ihr Schnitt mit der absoluten Quadrik Q kennzeichnet die Geraden des ausgezeichneten Komplexes des R_3 .

Irgend ein Punkt dieser Ebene E — etwa der Punkt \mathbf{r} in (5) — beschreibt nach (4) eine Bahnkurve derart, daß

$$(3,6) \quad \mathbf{r}' = \Phi \mathbf{w}$$

mit

$$\Phi = 2 \alpha r_1 - \alpha_{12} r_2 + \alpha_{11} r_3 - \alpha_{22} r_4 + \alpha_{21} r_5.$$

Das heißt: Die Tangente an eine jede Bahnkurve, die von einem Punkt der Ebene E erzeugt wird, trifft den Pol \mathbf{w} dieser Ebene. Im Sinne der hyperbolischen Geometrie in diesem Raum stehen diese Tangenten alle senkrecht auf der Ebene E . Diese Ebene bewegt sich also normal, d. h. sie rollt über die von ihr erzeugte Torse ab ohne zu gleiten. Somit: *Eine Schiebung induziert im Geradenraum eine hyperbolische Bewegung derart, daß eine feste Ebene des bewegten Systems entlang einer Torse abrollt, ohne zu gleiten.* Die Punkte, die nicht in dieser Hyperebene liegen, sind aber mit ihr hyperbolisch starr verbunden¹⁰). Durch den Abrollvorgang ist also diese Bewegung im Geradenraum eindeutig definiert, und es folgt: *Durch Angabe einer einparametrischen Schar von Hyperebenen bzw. deren Polkurve im Geradenraum ist eine Schiebung eindeutig definiert.*

Es ist nun die Frage, ob auch die Umkehrung gilt. Führt die Vorgabe einer beliebigen einparametrischen Ebenenschar im R_5 in dieser Weise immer auf eine Schiebung des R_3 ? Dies ist in der Tat der Fall.

Zum Beweis betrachten wir die hyperbolische Bewegung eines Systems mit der Basis

$$(3,7) \quad \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5$$

derart, daß die Hyperebene

$$(3,8) \quad (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5)$$

dieses Systems auf einer gegebenen Torse hyperbolisch abrollt, ohne zu gleiten. Wir wollen voraussetzen, daß die Ebenen der Torse die absolute Quadrik Q nicht berühren. Dann möge \mathbf{q}_0 an jeder Stelle den Pol der Ebene (8) darstellen. Ferner denken wir uns die Vektoren (7) so normiert, daß ihre Determinante

$$(3,9) \quad (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5) = \text{const.}$$

ist. Dies ist durch Umnormung mit einem gemeinsamen Faktor immer zu erreichen.

Unter den gemachten Voraussetzungen gelten dann für die \mathbf{q}_i Ableitungsgleichungen der Art:

$$(3,10) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_0' &= \tau_0 \mathbf{q}_0 + \sigma_1 \mathbf{q}_1 + \sigma_2 \mathbf{q}_2 + \sigma_3 \mathbf{q}_3 + \sigma_4 \mathbf{q}_4 + \sigma_5 \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_i' &= \tau_i \mathbf{q}_i + \xi_i \mathbf{q}_0 \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 5.$$

¹⁰) Man denke an den entsprechenden Vorgang in einem dreidimensionalen euklidischen Raum, der dem geschilderten völlig analog ist.

mit

$$(3,10a) \quad \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 = 0,$$

wobei wir jetzt noch auszudrücken haben, daß die absolute Quadrik dieses Raumes fest bleibt.

Setzen wir für einen Punkt u des R_5

$$(3,11) \quad u = u_0 q_0 + u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 + u_4 q_4 + u_5 q_5,$$

so können wir im Einklang mit den Voraussetzungen die Gleichung der Quadrik Q etwa in der Gestalt annehmen:

$$(3,12) \quad Q = u_0^2 - u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 - u_5^2 = 0.$$

Q ist fest in der Bewegung, falls gilt:

$$(3,13) \quad Q' - \varrho Q = 0.$$

Nun gewinnt man aus

$$u' - \lambda u = 0$$

mittels (10) die Stationaritätsbedingung eines Punktes u :

$$(3,14) \quad \begin{aligned} \lambda u_0 - u'_0 &= \tau_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 + \xi_5 u_5 \\ \lambda u_i - u'_i &= \tau_i u_i + \sigma_i u_0, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Geht man damit in (12), (13) ein, so wird

$$(3,15) \quad \begin{aligned} Q' &= \sum_{i=0}^5 2 u_i u'_i (-1)^i \\ &= 2 u_0 (\tau_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 + \xi_5 u_5) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^5 (-1)^i u_i (\tau_i u_i + \sigma_i u_0) \pmod{Q}, \end{aligned}$$

und (13) führt also auf die Bedingungen

$$(3,16) \quad \begin{aligned} \xi_i + \sigma_i (-1)^i &= 0 & i = 1, 2, \dots, 5 \\ \tau_i &= \varrho & i = 0, 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

deren zweite Gruppe wegen (10a) übergeht in

$$(3,17) \quad \tau_i = \varrho = 0.$$

Schreiben wir nun die Ableitungsgleichungen (10) um, indem wir einmal (16) und (17) verwenden und zum anderen statt q_2, q_3, q_4, q_5 die Vektoren

$$(3,18) \quad q_2 + q_5, \quad q_3 + q_4, \quad q_4 - q_3, \quad q_5 - q_2$$

als Basisvektoren einführen, so gehen die Gl. (10) über in:

$$(3,19) \quad \begin{aligned} q'_0 &= \sigma_1 q_1 + (\sigma_2 + \sigma_5) \cdot \frac{1}{2} (q_2 + q_5) + (\sigma_3 + \sigma_4) \cdot \frac{1}{2} (q_3 + q_4) \\ &\quad + (\sigma_5 - \sigma_2) \cdot \frac{1}{2} (q_5 - q_2) + (\sigma_4 - \sigma_3) \cdot \frac{1}{2} (q_4 - q_3) \\ q'_1 &= \sigma_1 q_0 \\ \frac{1}{2} (q_2 + q_5)' &= \frac{1}{2} (\sigma_5 - \sigma_2) q_0 \\ \frac{1}{2} (q_3 + q_4)' &= -\frac{1}{2} (\sigma_4 - \sigma_3) q_0 \\ \frac{1}{2} (q_4 - q_3)' &= -\frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_4) q_0 \\ \frac{1}{2} (q_5 - q_2)' &= \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_5) q_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind aber tatsächlich äquivalent denjenigen (4), auf die eine Schiebung des R_3 im Geradenraum geführt hat. Man hat in (4) bzw. (19) zu ersetzen nach dem Schema:

$$(3,20) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{v} & (q_1, \tilde{s}_1) & (q_1, \tilde{s}_2) & (q_2, \tilde{s}_1) & (q_2, \tilde{s}_2) \\ q_0 & q_1 & \frac{1}{2}(q_2 + q_5) & \frac{1}{2}(q_3 + q_4) & \frac{1}{2}(q_4 - q_3) & \frac{1}{2}(q_5 - q_2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} & -2\alpha_{11} & -2\alpha_{12} \\ \sigma_1 & (\sigma_2 + \sigma_5) & (\sigma_3 + \sigma_4) & (\sigma_4 - \sigma_3) & (\sigma_5 - \sigma_2) \end{pmatrix}$$

Auch lehrt (12), daß die in (18) genannten Punkte auf der absoluten Quadrik liegen. Die beiden sich nach (20) entsprechenden Simplexe haben bezüglich der absoluten Quadrik dieselbe Lage.

Damit ist also in der Tat gezeigt: *Zu jeder Torse des Geradenraumes (bzw. deren Polkurve) kann man im R_3 eine Schiebung angeben, deren Bild im Geradenraum diese erzeugt.*

Zusammenfassend haben wir also die folgenden Verhältnisse: *Der projektiven Kinematik des R_3 entspricht im Geradenraum die hyperbolische Kinematik. Die Theorie der Schiebungen dagegen führt auf die Kurventheorie des Geradenraumes.* Ausgeschlossen sind dabei Kurven bzw. Stellen von Kurven, die auf der absoluten Quadrik Q liegen. Die Dimension der betrachteten Kurve unterliegt keiner Einschränkung. Diese wird also, wie wir später ausführen werden, eine der wichtigsten invarianten Eigenschaften der Schiebungen repräsentieren, die sich auch im R_3 widerspiegelt.

Für den dreidimensionalen Raum hat dies die Konsequenz, daß nicht nur durch eine Schiebung eine einparametrische Schar linearer Komplexe festgelegt wird, sondern daß auch umgekehrt zu einer einparametrischen Schar linearer Komplexe genau eine Schiebung gehört. Es werden also in der projektiven Differentialgeometrie überall dort Schiebungen eine Rolle spielen, wo einparametrische Scharen linearer Komplexe auftreten.

Dies ist besonders bei den Flächen der Fall, deren Asymptotenlinien der einen Schar (oder auch beider Scharen) linearen Komplexen angehören, eine Flächenklasse, deren Flächen — Komplexflächen genannt — sich bei den verschiedensten Fragen der projektiven Differentialgeometrie als ausgezeichnet erweisen.

Andererseits ist z. B. mit einer Raumkurve die einparametrische Schar von Schmiegekomplexen verknüpft. Die Kurventheorie stellt sich nun wirklich als ein Spezialfall in der Theorie der Schiebungen und der Komplexflächen heraus.

Wir wollen hier jedoch zunächst mit den dargestellten Methoden die Theorie der Komplexflächen aufbauen.

4. *Komplexflächen als Schiebflächen.* Eine Kurve, deren Tangenten einem linearen Komplex angehören — man spricht von einer *Komplezkurve* — kann man explizit angeben¹¹⁾. Bezieht man die Kurve auf die Basisvektoren \tilde{q}_1, \tilde{s}_1 ,

¹¹⁾ Vgl. etwa: G. BOL: Projektive Differentialgeometrie, Bd. 1, § 54, S. 206.

\tilde{s}_2, \tilde{q}_2 und ist der zugehörige Komplex gekennzeichnet durch

$$\tilde{w} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) + (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2),$$

so besitzt jede solche Kurve eine Parameterdarstellung der Art

$$(4,1) \quad \tilde{\eta}(s) = \tilde{q}_1 + s \tilde{s}_1 + f'(s) \tilde{s}_2 + (2f(s) - s f'(s)) \tilde{q}_2,$$

und (1) stellt bei beliebiger Wahl der Funktion $f(s)$ eine Komplexkurve dar.

Denken wir uns jetzt eine einparametrische Schar Komplexkurven gegeben, so kennen wir auch die einparametrische Schar der zugehörigen Komplexe und können die hierzu eindeutig definierte Schiebung konstruieren. Bezogen auf die Basis des bewegten Systems ist der ausgezeichnete Komplex durch

$$w = (q_1, q_2) + (s_1, s_2)$$

gekennzeichnet, und die zu einem jeden Wert des Parameters t gehörende Komplexkurve besitzt in diesem System dann also nach (1) die Darstellung

$$(4,2) \quad \eta(t, s) = q_1(t) + s s_1(t) + F_s(s, t) s_2(t) + [2F(s, t) - s F_s(s, t)] q_2(t).$$

Einer einparametrischen Schar Komplexkurven kann man immer die Parameterdarstellung (2) geben, wobei die q_i, s_i den Ableitungsgleichungen (2,10) mit (2,12) genügen. (2) stellt eine solche Schar für jede Wahl der Funktion $F(s, t)$ dar.

Von einer Schiebfläche sprechen wir, wenn die Komplexkurve im bewegten System fest ist, d. h. analytisch, daß die Funktion $F(s, t)$ nur von s , aber nicht von t abhängt. Betrachten wir einmal die Bahnkurve, die von einem Punkt der Komplexkurve in der Schiebung erzeugt wird. Diese Kurve ist eine Parameterkurve $s = \text{const.}$ auf der entstehenden Schiebfläche. Die Schmiegenebene dieser Kurve ist — wie wir wissen, ist es für jede Bahnkurve der Fall — Nullebene in dem zum ausgezeichneten Komplex gehörenden Nullsystem. Als Nullebene liegen in ihr die Geraden des linearen Komplexes, die durch den zugehörenden Punkt gehen, also insbesondere auch die Tangente an die Komplexkurve (laut Definition der Komplexkurve). Die Schmiegenebene der Bahnkurve enthält also sowohl die Tangente an die Komplexkurve wie natürlich auch die Tangente an die Bahnkurve. Eine Bahnkurve ist somit Asymptotenlinie der von einer Komplexkurve von w in der Schiebung erzeugten Fläche.

Bei einer Komplexkurve nun bildet das zum linearen Komplex gehörende Nullsystem jeden Punkt der Kurve auf die Schmiegenebene an die Komplexkurve in diesem Punkt ab¹²⁾. Die Nullebene, von der wir gerade sahen, daß sie Tangentenebene der erzeugten Fläche ist, ist also auch Schmiegenebene der Komplexkurve — die Komplexkurven selbst sind ebenfalls Asymptotenlinien der von einer Komplexkurve von w in der Schiebung erzeugten Fläche.

Flächen, deren eine Schar von Asymptotenlinien Komplexkurven sind, nennt man Komplexflächen. Wir haben somit den Satz: Eine Komplexkurve von w des bewegten Systems einer Schiebung erzeugt eine Komplexfläche.

¹²⁾ Vgl. etwa: G. BOL: Proj. Differentialgeometrie, § 44, S. 173.

Nun wirft sich die Frage auf: läßt sich jede Komplexfläche so erzeugen? Eine Komplexfläche trägt jedenfalls eine einparametrische Schar Komplexkurven und besitzt also sicher eine Parameterdarstellung der Gestalt (2). Die Komplexkurven, d. h. die Parameterkurven $t = \text{const.}$, sind Asymptotenlinien dieser Fläche, falls:

$$(4,3) \quad \eta_t \equiv 0 \pmod{\eta, \eta_s, \eta_{ss}}.$$

Würde nun $F(s, t)$ in (2) von t nicht abhängen, so hätten wir es mit einer Schiebfläche der oben genannten Art zu tun, die Kurven $t = \text{const.}$ wären Asymptotenlinien, und (3) wäre also erfüllt. Es bleibt daher in (3) nur die Ableitung der Funktion $F(s, t)$ nach t zu berücksichtigen, und es muß also sein:

$$(4,4) \quad F_{st} \hat{s}_2 + (2 F_t - s F_{st}) q_2 \equiv 0 \pmod{\eta, \eta_s, \eta_{ss}}.$$

Aus (2) folgt

$$(4,5) \quad \begin{aligned} \eta_s &= \hat{s}_1 + F_{ss} \hat{s}_2 + (F_s - s F_{ss}) q_2 \\ \eta_{ss} &= F_{sss} (\hat{s}_2 - s q_2), \end{aligned}$$

und damit (4) erfüllt ist, muß also notwendig

$$(4,6) \quad F_t = 0$$

sein.

Wir haben den für die Theorie der Komplexflächen grundlegenden Satz: *Eine Komplexkurve des bewegten Systems einer Schiebung, deren Tangenten dem in diesem System ausgezeichneten linearen Komplex angehören, erzeugt in der Schiebung eine Komplexfläche, und jede Komplexfläche läßt sich so erzeugen.*

Jede Komplexfläche besitzt eine Parameterdarstellung

$$(4,7) \quad \eta(t, s) = q_1 + s \hat{s}_1 + G'(s) \hat{s}_2 + [2 G(s) - s G'(s)] q_2,$$

worin $G(s)$ eine geeignet gewählte Funktion von s ist und die Vektoren $q_1, \hat{s}_1, \hat{s}_2, q_2$, die von t abhängen, den Ableitungsgleichungen (2,10) mit (2,12) genügen. (7) stellt für jedes $G(s)$ eine Komplexfläche dar.

Aus den oben ausgesprochenen Sätzen gewinnt man also die folgenden, vom kinematischen Standpunkt aus trivialen, Eigenschaften der Komplexflächen: *Die Komplexkurven einer Komplexfläche sind projektiv gleichwertig. Die zweite Schar von Asymptotenlinien bildet diese projektiv aufeinander ab. Diese Abbildung wird auch vermittelt durch die Asymptotenlinien der Regelflächen, die die Tangenten an die Komplexkurven längs der Asymptotenlinien der anderen Schar bilden. Es sind ja gerade die Bahnkurven in der erzeugenden Schiebung die Asymptotenlinien dieser Regelflächen.*

Betrachten wir noch die Tangenten an die Asymptotenlinien der anderen Schar längs einer Komplexkurve einer Komplexfläche. Diese Asymptoten-

linien sind Bahnkurven, ihre Tangenten gehören an jeder Stelle, wie alle Tangenten an Bahnkurven, einer linearen Kongruenz an. Somit: *Die Regelflächen, gebildet aus Tangenten an die Asymptotenlinien der anderen Schar längs einer Komplexkurve einer Komplexfläche, sind Kongruenzregelflächen.*

Von unserem kinematischen Standpunkt aus zerfällt eine eingehendere Theorie der Komplexflächen einmal in das Studium der Schiebungen — eigenartigerweise spiegeln sich auch die auffallenden flächentheoretischen Eigenschaften in Eigenschaften der zugehörigen Schiebungen wieder —, zum anderen in Fragen, die mit der Wahl und speziellen Lage der Komplexkurve im bewegten System zusammenhängen. Einige prinzipielle Aussagen über Schiebungen im Zusammenhang mit den Komplexflächen werden in dem folgenden Abschnitt gemacht — eine eingehendere Behandlung beider Fragenkreise jedoch wollen wir auf später verschieben.

5. *Die Eigenschaften der Bahnkurven der Schiebungen.* Wir betrachten die Regelflächen, die durch Schiebung einer Geraden entstehen. Gehört die Gerade dem Komplex \mathfrak{w} an, so ist — wie wir bereits sahen — die einparametrische Schar von Bahnkurven, die die Regelfläche trägt, die Schar ihrer „krümm-linigen“ Asymptotenlinien. Die Schmiegeebene an eine Bahnkurve ist Nullebene, und eine Komplexgerade liegt also in ihr.

Die anderen Geraden, die nicht dem Komplex \mathfrak{w} angehören, ordnen sich zu Paaren, die konjugierte Gerade im Nullsystem sind. In der Schiebung entstehen so Regelflächenpaare. Ein Punkt einer solchen Geraden durchläuft eine Bahnkurve, deren Schmiegeebene als Nullebene die konjugierte Gerade enthält. Die Schmiegeebenen der Bahnkurven längs einer solchen Geraden schneiden sich alle in der konjugierten Geraden — und diese Eigenschaft ist natürlich wechselseitig in bezug auf beide konjugierte Gerade.

Lassen wir — um konkrete Verhältnisse zu haben — die Geraden (q_1, q_2) , (\bar{s}_1, \bar{s}_2) mit den betrachteten konjugierten Geraden zusammenfallen — wir können ja die Basis immer so legen. Die Gerade (q_1, \bar{s}_1) gehört dem Komplex an. Die von q_1 und \bar{s}_1 erzeugten Bahnkurven sind Asymptotenlinien der aus (q_1, \bar{s}_1) in der Schiebung entstehenden Regelfläche. Zwei solche Kurven nennt man deshalb *asymptotisch Transformierte erster Stufe* voneinander. Desgleichen beschreiben \bar{s}_1 und q_2 zwei Kurven, die asymptotisch Transformierte erster Stufe voneinander sind. q_1, q_2 ihrerseits nennt man jetzt *asymptotisch Transformierte zweiter Stufe* voneinander. Es folgt: *Zwei Bahnkurven einer Schiebung sind asymptotisch Transformierte erster oder zweiter Stufe voneinander, je nachdem ob die Geraden der von ihnen erzeugten Regelfläche dem Komplex angehören oder nicht.*

Die von (q_1, q_2) erzeugte Regelfläche trägt also eine Doppelverhältnisschar (die Bahnkurven in der Schiebung) derart, daß je zwei Kurven dieser Schar asymptotisch Transformierte zweiter Stufe voneinander sind. Diese Transformation wird vermittelt von jeder Kurve einer Doppelverhältnisschar (wieder die Bahnkurven in der Schiebung) auf (\bar{s}_1, \bar{s}_2) . Andererseits haben die Kurven der Schar auf (\bar{s}_1, \bar{s}_2) genau dieselbe Eigenschaft, wobei dann jede der Kurven auf (q_1, q_2) die asymptotische Transformation vermittelt.

Zwei Regelflächen, deren Erzeugende in dieser Weise einander zugeordnet sind, nennt man nach FINIKOFF *schichtbar* (stratifiable)¹³. Die beiden die Schichtung vermittelnden Doppelverhältnisscharen sind die Schichtkurven. Wir haben also: *Zwei im ausgezeichneten Nullsystem konjugierte Gerade des bewegten Systems bilden in der Schiebung ein schichtbares Regelflächenpaar.*

Im Geradenraum ist ein solches Regelflächenpaar durch eine Gerade des bewegten Systems definiert, die durch \mathfrak{w} geht, etwa die Gerade $(\mathfrak{r}, \mathfrak{w})$. \mathfrak{r} ist in (3,5) erklärt. In der Bewegung beschreibt diese Gerade eine Torse, deren Kehlpunkt in dem zu \mathfrak{w} polaren Punkt \mathfrak{r} liegt [vgl. (3,6)]. Gibt man umgekehrt im Geradenraum eine Torse (die auch in einen Kegel entartet sein kann) vor, so schneiden deren Erzeugende aus der absoluten Quadrik zwei Kurven aus, die Bilder eines schichtbaren Regelflächenpaares des R_3 sind. Betrachtet man nämlich die Polkurve der Kehlkurve der gegebenen Torse und konstruiert zu dieser Kehlkurve die einparametrische Polaryhyperebenenschar, so definiert diese nach Abschnitt 3 eine zu einer Schiebung des R_3 gehörende Bewegung des Geradenraumes, in der die Kehlkurve, von der wir ausgingen, Bahnkurve ist. Jetzt liegt aber die betrachtete Figur vor, und das von der Torse definierte Regelflächenpaar des R_3 ist wie alle anderen ein schichtbares Paar. *Eine Schiebung ist durch eines der von ihr erzeugten schichtbaren Regelflächenpaare eindeutig bestimmt, und umgekehrt gibt es zu einem Paar schichtbarer Regelflächen genau eine Schiebung derart, daß sie Bahnkurven der Bewegung des R_3 , bzw. daß deren Schichtkurven Bahnkurven des R_3 sind.*

Auf einer Regelfläche eines schichtbaren Paares liegen Kurvenpaare, die asymptotisch Transformierte zweiter Stufe voneinander sind — dies war ja unser Ausgangspunkt. Nun gehört aber umgekehrt — wie bekannt ist¹⁴ — zu einem Paar asymptotisch Transformatierter zweiter Stufe immer die Figur eines schichtbaren Regelflächenpaares, zu denen laut Konstruktion auch die Ausgangskurven gehören. Daraus erhalten wir: *Eine Schiebung ist durch Angabe zweier ihrer Bahnkurven, die asymptotisch Transformierte zweiter Stufe voneinander sind, eindeutig bestimmt, und umgekehrt gibt es zu einem Paar asymptotisch transformierter Kurven immer eine Schiebung, die das Kurvenpaar als Bahnkurven enthält.*

Man kann den ausgesprochenen Existenzsatz noch allgemeiner fassen, wenn man ein Ergebnis von A. PANTAZI¹⁵ heranzieht, wonach zwei beliebige Kurven des dreidimensionalen Raumes sich so aufeinander beziehen lassen, daß die Kurven dann asymptotisch Transformierte zweiter Stufe voneinander sind. Diese Beziehung ist im Kleinen sogar eindeutig, falls die Ausgangskurven

¹³) Man spricht auch von W -transformierten Regelflächen, da sie Brennflächen eines W -Strahlensystems sind.

¹⁴) Vgl. etwa: M. BARNER, Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare. Math. Zeitschr. 56, 409—442 (1952).

¹⁵) A. PANTAZI, Sur le problème de KOENIGS. Disquisit. math. et phys. Bucuresti 1, 357—368 (1941). Die gemachte Aussage ist geometrisch evident, wenn man weiß, daß die asymptotische Transformation zweier Kurven für die Bilder der Tangenten im Geradenraum bedeutet, daß die Schmiegeebenen der Dimension zwei einen Punkt gemeinsam haben. Für Komplexkurven desselben Komplexes ist dies natürlich immer der Fall.

nicht demselben linearen Komplex angehören. Liegen diese dagegen in demselben linearen Komplex, so bilden sie bei jeder Zuordnung ihrer Punkte ein Paar asymptotisch transformierter zweiter Stufe (oder erster Stufe, was wir ausschließen wollen). Somit: *Es gibt immer Schiebungen, die zwei in ihrer gegenseitigen Lage im Raum vorgegebene, nicht aufeinander bezogene Kurven als Bahnkurven enthalten. Durch eine solche Schiebung wird dann einem Punkt C der einen Kurve ein Punkt \bar{C} der anderen Kurve zugeordnet, und die betrachtete Schiebung ist die einzige, in der C und \bar{C} zusammengehören, es sei denn, die beiden Ausgangskurven gehören einem gemeinsamen linearen Komplex an.* Dann aber haben wir es in der Hand zu verlangen, daß eine willkürlich vorgeschriebene Korrespondenz zwischen den Ausgangskurven sich auf diese als Bahnkurven der Schiebung überträgt.

Aus den in diesem Abschnitt hervorgehobenen Sätzen folgen sofort wieder entsprechende Aussagen für die Asymptotenlinien der anderen Schar — dies sind die Asymptotenlinien, die nicht Komplexkurven sind — einer einsinnigen Komplexfläche. Sind die Asymptotenlinien beider Scharen Komplexkurven, so haben natürlich die Kurven beider Scharen die genannten Eigenschaften. Zunächst: *Zwei Asymptotenlinien der anderen Schar einer Komplexfläche sind asymptotisch transformierte zweiter Stufe voneinander.* — (Es sei denn, diese Kurven sind Asymptotenlinien der von ihnen erzeugten Regelfläche. In diesem Fall enthalten die Tangentenebenen in den betreffenden Punkten sich wechselseitig. Die Tangentenebenen, d. h. die Schmiegebenen an die Komplexkurve, schneiden sich in den Verbindungsgeraden dieser Punkte. Ein solches Punktepaar der erzeugenden Komplexkurve nimmt natürlich eine Sonderstellung ein.)

Ferner: *Betrachtet man zwei Asymptotenlinien der anderen Schar, so bilden die beiden Regelflächen, die erzeugt werden einmal aus Verbindungsgeraden zusammengehörender Punkte, zum anderen aus Schnittgeraden zusammengehörender Tangentenebenen, ein schichtbares Regelflächenpaar.*

Die Eindeutigkeitsätze für Schiebungen übertragen sich in Eindeutigkeitsätze für Komplexflächen. Insbesondere gilt: *Durch Angabe zweier Asymptotenlinien der anderen Schar (und, falls diese demselben linearen Komplex angehören, durch Angabe ihrer punktweisen Zuordnung) und einer Komplexkurve ist eine Komplexfläche eindeutig bestimmt. (Gehören die Ausgangskurven einem linearen Komplex an, so hat man zu fordern, daß zusammengehörende Punkte auf dieselben erzeugenden Komplexkurven fallen.)* Der entsprechende Existenzsatz lautet: *Gibt man zwei punktwise aufeinander bezogene Kurven vor, die asymptotisch transformierte zweiter Stufe voneinander sind, und an einer Stelle dieses Kurvenpaares eine Komplexkurve, die jede der beiden Kurven trifft und dem zugehörigen¹⁶⁾ Komplex des Kurvenpaares angehört, so gibt es genau eine Komplexfläche, die die vorgegebenen Kurven als Asymptotenlinien enthält. Gehört das Ausgangspaar ein und demselben linearen Komplex an, so hat man zusätzlich zu fordern, daß zusammengehörende Punkte des Aus-*

¹⁶⁾ In dem oben definierten Sinne: Das Kurvenpaar führt auf ein Paar schichtbarer Regelflächen und diese auf eine Torse im R_3 . Der polare Punkt des Kehlpoints auf der Erzeugenden dieser Torse kennzeichnet den zugehörigen Komplex dieser Stelle.

gangspaars auf dieselbe Komplexkurve zu liegen kommen. Im allgemeinen Fall stellt sich diese Zuordnung von selbst ein.

In der letzten Bemerkung ist bereits eine Verallgemeinerung angedeutet, die wir wie folgt formulieren: *Gibt man zwei beliebige Kurven und eine Komplexkurve vor, so gibt es mindestens eine Komplexfläche, die die beiden gegebenen Kurven unter Beachtung ihrer gegenseitigen Lage (eine Zuordnung dieser Kurven ist nicht vorgegeben) als Asymptotenlinien besitzt und deren erzeugende Komplexkurven mit der vorgegebenen projektiv verwandt sind.* Hat man eine derartige Fläche und ist C bzw. \bar{C} je ein Punkt der beiden Ausgangskurven auf derselben erzeugenden Komplexkurve, so gewinnt man jede andere den Voraussetzungen genügende Komplexfläche, bei der C und \bar{C} auf derselben erzeugenden Komplexkurve liegen, indem man eine beliebige erzeugende Komplexkurve (etwa die durch C und \bar{C}) dieser Fläche herausgreift und auf diese eine Projektivität anwendet, die den zugehörigen Komplex festläßt und zwei gleiche oder andere Punkte der Komplexkurve mit dem zugehörigen Punktepaar der Ausgangskurven zur Inzidenz bringt. Eine Komplexfläche, die diese Komplexkurve und die Ausgangskurven als Asymptotenlinien enthält, existiert, ist eindeutig bestimmt (falls die Ausgangskurven nicht demselben linearen Komplex angehören) und genügt den gemachten Voraussetzungen (falls die Ausgangskurven in demselben Komplex liegen, wird C und \bar{C} unter Umständen nicht auf derselben erzeugenden Komplexkurve liegen). Im allgemeinen Fall hängt die durch die Voraussetzungen umrissene Klasse von Komplexflächen nur von Konstanten ab. Es sind dies dann genau die Flächen, die zwei Asymptotenlinien der anderen Schar unter Beachtung der Zuordnung ihrer Punkte gemeinsam haben und deren Komplexkurven projektiv verwandt sind. Gehören die Ausgangskurven demselben linearen Komplex an, so gilt dasselbe, nur daß die Zuordnung der Punkte der Ausgangskurven nur noch an der einen Stelle, an der die Projektivität angewandt wurde, festgehalten wird.

Ferner sieht man, daß in dieser Weise jede Komplexfläche erzielbar ist, wenn man die beiden Kurven, die Komplexkurve und die Punkte C und \bar{C} , von denen wir ausgingen, geeignet wählt.

6. *Ausblick.* Die Klassifikation der Schiebungen kann nun zunächst nach der Dimension der Kurve erfolgen, die \mathfrak{w} im R_6 erzeugt¹⁷⁾. Beschreibt insbesondere \mathfrak{w} eine ebene Kurve der Dimension 2, so ist die Schiebung eine CLIFFORD-Schiebung einer elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Geometrie, deren Behandlung hier in einheitlicher Weise erfolgen kann. Hierzu gehören gerade die zweisinnigen Komplexflächen.

Andere invariante Eigenschaften einer Schiebung gewinnt man an Hand der Leitgeraden der ausgezeichneten Kongruenz, die durch \mathfrak{w} , \mathfrak{w}' definiert sind. Diese Geraden können eventuell zusammenfallen und dann in der Schiebung entweder eine allgemeine Regelfläche oder eine Torse erzeugen.

¹⁷⁾ Einige Ergebnisse hierzu hat Verfasser 1952 in Salzburg mitgeteilt. Eine ausführliche Behandlung erscheint in den Math. Ann.

An den Komplexflächen fällt besonders auf, daß die erzeugenden Komplexkurven sich unter Umständen berühren. So entstehen Hüllkurven, die Singularitätenkurven der Fläche sind. Diese hängen eng mit den aus den Leitgeraden der ausgezeichneten Kongruenz entstehenden Regelflächen zusammen.

Insbesondere gibt es mit der Schiebung invariant verbundene Komplexflächen, die Singularitätenkurven gewisser Vielfachheit tragen. Im allgemeinen Fall hat man zwei einparametrische Systeme solcher Flächen mit jeweils einer zweifachen Singularitätenkurve. Es handelt sich um die Schichtflächen zweier schichtbildender Kongruenzen.

Erzeugen insbesondere die an jeder Stelle zusammenfallenden Leitlinien eine Torse, so ist mit dieser Schiebung genau eine Komplexfläche verbunden, die eine vierfache Singularitätenkurve trägt. In der Schiebung ist also eine Kurve ausgezeichnet, und diese Beziehung ist umkehrbar. Man gelangt so zu interessanten geometrischen Zusammenhängen zwischen der Theorie der Komplexflächen und der Theorie der Raumkurven.

(Eingegangen am 18. August 1952.)

Pseudoverband und Flechtwerk.

Von

FRITZ KLEIN-BARMEN in Wuppertal.

Im Zuge der Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes hat D. ELLIS vor einiger Zeit den Begriff des *Pseudoverbandes* aufgestellt und seine Aufmerksamkeit vor allem den zwischen Verband und Pseudoverband bestehenden logischen Beziehungen gewidmet¹⁾. Angeregt durch die ELLISSchen Betrachtungen habe ich mich ebenfalls mit diesem Gegenstand befaßt und eine Klasse von Pseudoverbänden studiert, die ich als schwach distributiv bezeichnet habe²⁾.

Im Gegensatz zum Verband kann der Pseudoverband sehr wohl eine *Gruppe* in bezug auf eine der beiden Elementverknüpfungen sein. Ich bezeichne einen Pseudoverband, der in diesem Sinn eine Gruppe ist, kurz als ein *Flechtwerk*. Der von D. ELLIS in einem Unabhängigkeitsbeweis verwendete Pseudoverband ist ein Flechtwerk³⁾. Pseudoverband und Flechtwerk reichen, was Universalität und Leistungsfähigkeit anbelangt, bei weitem nicht an den Verband heran; dagegen sind beide in axiomatischer Hinsicht bemerkenswert.

In der vorliegenden Note entwickle ich die Grundbegriffe der Theorie der Flechtwerke. Neben dem allgemeinen behandle ich die schwach distributiven Flechtwerke. Außerdem gehe ich auf die Konstruktion der Flechtwerke ein. Die Kenntnis der mit [N. 1] und [N. 2] bezeichneten Arbeiten wird vorausgesetzt. Hinsichtlich Terminologie, Abkürzungen usw. schließe ich mich an [N. 2] an; wie dort sollen kleine lateinische Buchstaben Elemente der als Grundgegebenheit fungierenden Menge M , kleine griechische Buchstaben natürliche Zahlen bedeuten.

§ 1. Der Pseudoverband.

1. Es sei M ein *kommutatives Assoziativ* sowohl in bezug auf eine durch \cup als auch in bezug auf eine durch \cap symbolisierte Verknüpfung. Da M Potenzen in bezug auf beide Verknüpfungen enthält, ist zwischen „potenzgebunden in bezug auf \cup “ und „potenzgebunden in bezug auf \cap “ zu unterscheiden; ebenso bei „eng gebunden“, „tief gebunden“, „Potenzhöhe“, „Periode“ und „Hauptelement“. Zur Unterscheidung werde gesetzt

$$x^{(\alpha+1)} = x \cup x^{(\alpha)}, x^{\alpha+1} = x \cap x^{\alpha}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x^{(1)} = x^1 = x.$$

2. Wir ziehen zwei Klassen von Koppelungsaxiomen⁴⁾ heran. Die Axiome

¹⁾ Vgl. ELLIS [2].

²⁾ Vgl. [N. 1].

³⁾ Vgl. ELLIS [2], S. 207.

⁴⁾ Unter einem Koppelungsaxiom ist ein Axiom zu verstehen, vermöge dessen die Verknüpfungen \cup und \cap aufeinander einwirken.

der ersten Klasse sind:

IV. Mit $x \cup y = x$ ist $x \cap y = y$.

IV. Mit $x \cap y = x$ ist $x \cup y = y$.

IV. Mit $x \cup y = x$ ist $x \cap y = y$ und umgekehrt.

Wenn IV in Kraft ist, so ist ein etwa vorhandenes \mathfrak{S}' - bzw. \mathfrak{S}'' -Element in bezug auf \cup zugleich \mathfrak{S}'' - bzw. \mathfrak{S}' -Element in bezug auf \cap . Das Umgekehrte findet statt, wenn IV in Kraft ist.

Gilt IV, so heißt M ein *Pseudoverband* in bezug auf \cup und \cap .

3. Durch die Axiome der zweiten Klasse werden die Verknüpfungen distributiv gekoppelt. Wir sprechen von *schwach distributiver Koppelung*, wenn eines der Axiome V gilt, von *halb distributiver Koppelung*, wenn eines der Axiome VI gilt.

Die Axiome V lauten: Für jedes x und alle α, β, γ ist

$$\text{V. 1. } x^{[\alpha]} \cup (x^{[\beta]} \cap x^{[\gamma]}) = x^{[\alpha + \beta]} \cap x^{[\alpha + \gamma]};$$

$$\text{V. 2. } x^{[\alpha]} \cap (x^{[\beta + \gamma]}) = (x^{[\alpha]} \cap x^{[\beta]}) \cup (x^{[\alpha]} \cap x^{[\gamma]});$$

$$\text{V. 1. } x^\alpha \cap (x^\beta \cup x^\gamma) = x^{\alpha + \beta} \cup x^{\alpha + \gamma};$$

$$\text{V. 2. } x^\alpha \cup x^{\beta + \gamma} = (x^\alpha \cup x^\beta) \cap (x^\alpha \cup x^\gamma).$$

Die Axiome VI lauten: Für alle x, y, z ist

$$\text{VI. 1. } x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$$

$$\text{VI. 2. } x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z).$$

§ 2. Das Flechtwerk.

1. Ein Pseudoverband in bezug auf \cup und \cap , der zugleich eine Gruppe, also eine Abelsche Gruppe in bezug auf \cap ist, heißt ein *Flechtwerk* in bezug auf \cup/\cap .

Während sich die Verknüpfungen \cup und \cap beim allgemeinen Pseudoverband vollständig dual verhalten, geht die Dualität beim Flechtwerk teilweise verloren, da, wie man leicht feststellt, ein Flechtwerk in bezug auf \cup/\cap keine Gruppe in bezug auf \cup , also kein Flechtwerk in bezug auf \cap/\cup ist, wenn man von dem Fall absieht, daß M aus einem einzigen Element besteht, in welchem Fall \cup und \cap dieselbe Verknüpfung bedeuten.

Es sei M ein Flechtwerk in bezug auf \cup/\cap . Die Gruppeneinheit, die weiterhin stets mit e bezeichnet wird, ist \mathfrak{S}' -Element in bezug auf \cap und somit \mathfrak{S}'' -Element in bezug auf \cup . Die ausgezeichnete Rolle, die e spielt, wird durch den Umstand unterstrichen, daß M kein \mathfrak{S}'' -Element in bezug auf \cap und infolgedessen auch kein \mathfrak{S}' -Element in bezug auf \cup besitzt, wenn man den eben erwähnten Ausnahmefall außer Betracht läßt. Aus diesem Grund darf e einfach das *Hauptelement* (\mathfrak{S} -Element) von M genannt werden.

e ist in bezug auf beide Verknüpfungen sowohl eng gebunden mit der Potenzhöhe 1 als auch tief gebunden mit der Periode 1. Außer e ist kein Element eng gebunden in bezug auf \cap und kein Element tief gebunden in bezug auf \cup . Es ist deshalb zulässig, statt „eng gebunden in bezug auf \cup “ kurz „eng gebunden“, statt „Potenzhöhe in bezug auf \cup “ kurz „Potenzhöhe“ und ebenso

statt „tief gebunden in bezug auf \cap “ kurz „tief gebunden“, statt „Periode in bezug auf \cap “ kurz „Periode“ zu sagen. Im Einklang damit werde unter $\chi(x)$ das kleinste α verstanden derart, daß

$$x^{[\alpha]} = x^{[\alpha+1]}$$

ist, und unter $\omega(x)$ das kleinste δ derart, daß

$$x = x^{1+\delta}$$

ist. Man beachte, daß bei „potenzgebunden“ der Hinweis auf die Verknüpfung nicht fortgelassen werden darf.

2. In den beiden folgenden Sätzen kann M endlich oder unendlich sein.

Satz 1. Mit

$$(1) \quad x^{[\alpha]} = x^{[\alpha+\delta]}$$

gilt

$$(2) \quad x^{[\alpha]} = e;$$

umgekehrt gilt mit (2) auch (1) für jedes δ .

Beweis. Aus (1) ergibt sich nach IV

$$x^{[\delta]} = x^{[\alpha]} \cap x^{[\delta]}$$

und daraus (2). Die Umkehrung ergibt sich nach IV.

Es folgt:

Satz 2. Ist x potenzgebunden in bezug auf \cup , so auch eng gebunden. Dann und nur dann ist $\chi(x) = \alpha$, wenn α die kleinste Zahl ist, die (2) genügt.

Die Gegenstücke zu diesen Sätzen gelten unabhängig von IV und IV' und sind trivial. Wir führen sie an, um zu zeigen, wie die Bildung des Analogons vorzunehmen ist:

Satz 1'. Mit

$$(1') \quad x^x = x^{x+\delta}$$

gilt

$$(2') \quad x^\delta = e;$$

umgekehrt gilt mit (2') auch (1') für jedes α .

Satz 2'. Ist x potenzgebunden in bezug auf \cap , so auch tief gebunden. Dann und nur dann ist $\omega(x) = \delta$, wenn δ die kleinste Zahl ist, die (2') genügt.

3. Nunmehr sei M endlich; die Elemente seien a_1, \dots, a_m mit $a_m = e$.

Satz 3. Für $m \geq 3$ ist

$$a_1 \cup \dots \cup a_{m-1} = e.$$

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß

$$a_1 \cup \dots \cup a_{m-1} = a_1$$

ist. Nach IV folgt

$$a_1 \cap (a_2 \cup \dots \cup a_{m-1}) = a_2 \cup \dots \cup a_{m-1},$$

also $a_1 = e$.

Satz 4. Für jedes x ist $\chi(x) \leq m$.

Beweis. M ist endlich, also existiert $\chi(x)$. Es sei $\chi(x) = \alpha$. Da nach einem bekannten Satz⁵⁾ die Potenzen $x, x^{[2]}, \dots, x^{[\alpha]}$ alle verschieden sind, ist $\alpha \leq m$.

⁵⁾ Vgl. [N. 2], Satz 5.

§ 3. Schwach distributive Flechtwerke.

1. Es sei M ein Flechtwerk m -ter Ordnung in bezug auf \cup/\cap . Es sei $\check{V}.1$ in Kraft. Über Satz 4 hinaus gilt:

Satz 5. Für jedes x ist, wenn $m \geq 3$ ist, $\chi(x) \leq m-1$.

Beweis. Wäre $\chi(x) = m$, so müßten die m Potenzen

$$(3) \quad x, x^{[2]}, \dots, x^{[m]}$$

alle verschieden, insbesondere $x^{[2]} \neq x^{[3]}$ sein. Das kann aber nicht sein, denn nach $\check{V}.1$ und Satz 4 ist

$$x^{[m-2]} \cup (x \cap x^{[2]}) = x^{[m-1]} \cap x^{[m]} = x^{[m-1]},$$

woraus, da die Elemente (3) die Menge M erschöpfen,

$$x \cap x^{[2]} = x, x^{[2]} = x^{[3]}$$

folgt.

2. Wieder sei M ein Flechtwerk m -ter Ordnung in bezug auf \cup/\cap . Diesmal sei $\check{V}.2$ in Kraft. Ferner sei m eine Primzahl.

Vorweg werde bemerkt, daß mit $\check{V}.2$

$$x^\alpha \cup x^{\beta_1 + \dots + \beta_n} = (x^\alpha \cup x^{\beta_1}) \cap \dots \cap (x^\alpha \cup x^{\beta_n}),$$

speziell

$$(4) \quad x \cup x^n = (x \cup x)^n$$

stattfindet.

Satz 6. Für $x \neq e$ ist $\chi(x) = 2$.

Beweis. Die m Elemente von M sind

$$(5) \quad x, x^2, \dots, x^m \quad (x^m = e).$$

Es sei $\chi(x) = \alpha$, so daß also

$$(6) \quad x^{[\alpha]} = e, x^{[\alpha-1]} \neq e$$

ist. Nun ist $x^{[\alpha-1]}$ mit einem der Elemente (5) identisch; es sei etwa

$$x^{[\alpha-1]} = x^\beta \quad (1 \leq \beta \leq m-1).$$

Nach (4) ist

$$x \cup x^{[\alpha-1]} = x \cup x^\beta = (x \cup x)^\beta$$

und somit nach (6)

$$(x \cup x)^\beta = e.$$

Wegen $\beta < m$ ist $x \cup x = e$, d. h. $\alpha = 2$.

Satz 7. Für jedes x und alle v ist

$$(7) \quad x \cup x^v = e.$$

Beweis. Evident ist (7) richtig für $x = e$. Sei also $x \neq e$. Nach Satz 6 trifft (7) für $v = 1$ zu. Unter der Annahme, daß (7) für ein bestimmtes v richtig ist, folgt nach $\check{V}.2$ und Satz 6

$$x \cup x^{v+1} = (x \cup x^v) \cap (x \cup x) = e.$$

Satz 8. Für alle x und y ist $x \cup y = e$.

Beweis. Das ist richtig für $x = e$. Ist $x \neq e$, so gibt es einen Exponenten β derart, daß $y = x^\beta$ ist, woraus sich die Behauptung nach Satz 7 ergibt.

§ 4. Konstruktion spezieller Flechtwerke.

1. Ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion von Flechtwerken ist nicht bekannt. Die beiden Sätze dieses Paragraphen ermöglichen es, Flechtwerke herzustellen, deren Elemente der Bedingung $\chi(x) \leq 3$ genügen.

Es sei M eine *Abelsche Gruppe* in bezug auf \cap mit e als Gruppeneinheit. Zugleich sei M ein *kommutatives Operativ* in bezug auf \cup . Es sei M' eine e enthaltende Teilmenge von M , die im Maximalfall mit M zusammenfallen, im Minimalfall sich auf e reduzieren kann. Außerdem seien die beiden folgenden Axiome in Kraft:

(α) Für alle x, y aus M gehört $x \cup y$ zu M' .

(β) Gehört x zu M' und ist y beliebig, so ist $x \cup y = e$.

Satz 9. Die vorstehend beschriebene Menge M ist ein Flechtwerk in bezug auf \cup/\cap mit $\chi(x) \leq 3$ für alle x .

Beweis. Nach einem bekannten Satz⁶⁾ ist M ein kommutatives Assoziativ in bezug auf \cup mit $\chi(x) \leq 3$. Daß IV in Kraft ist, ergibt sich so: Gilt $x \cup y = x$, so gehört x wegen (α) zu M' ; wegen (β) ist $x = e$; somit gilt $x \cap y = y$. Ähnlich ergibt sich IV .

Für $M' = M$ oder $M' = \{e\}$ geht aus Satz 9 hervor:

Satz 10. Ist M eine Abelsche Gruppe in bezug auf \cap mit e als Gruppeneinheit und gilt $x \cup y = e$ für alle x und y , so ist M ein Flechtwerk in bezug auf \cup/\cap mit $\chi(x) \leq 3$ für alle x .

Ein Flechtwerk in bezug auf \cup/\cap , bei dem $x \cup y = e$ für alle x und y ist, soll als *monoton* bezeichnet werden.

Man stellt sofort fest, daß ein monotones Flechtwerk in bezug auf \cup/\cap halb distributiv gemäß VI.1, also schwach distributiv gemäß $\check{V}.1$ und $\hat{V}.2$ ist. Das Flechtwerk in § 3, Abschn. 2 ist monoton. Jede Abelsche Gruppe kann ohne weiteres als ein monotones Flechtwerk aufgefaßt werden.

2. In den folgenden Beispielen ist m eine natürliche Zahl und M die Menge der m -ten Einheitswurzeln. Unter \cap ist die gewöhnliche Multiplikation zu verstehen, so daß also $e = 1$ ist. Die Verknüpfung \cup ist durch die beigefügte Kompositionstafel bestimmt.

$$\begin{array}{lll} 1) & m = 2 \\ & M = \{1, -1\} & \text{Diagr. 1} \\ & M' = \{1\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2) & m = 3 \\ & M = \{1, e_2, e_3\} & \text{Diagr. 2} \\ & M' = \{1, e_2\} \\ & (e_2^3 = e_3^3 = 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3) & m = 4 \\ & M = \{1, -1, i, -i\} & \text{Diagr. 3} \\ & M' = \{1, -1\} \end{array}$$

⁶⁾ Vgl. [N. 2], Satz 15.

\cup	1	-1
1	1	1
-1	1	1

Diagr. 1

\cup	1	ε_2	ε_3
1	1	1	1
ε_2	1	1	1
ε_3	1	1	ε_3

Diagr. 2

\cup	1	-1	i	-i
1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1
i	1	1	-1	-1
-i	1	1	-1	-1

Diagr. 3

Das erste Flechtwerk ist monoton; die beiden anderen sind nicht monoton. Wie man unschwer erkennt, genügt das dritte Flechtwerk dem Axiom VI.1, während das zweite Flechtwerk, weil von Primzahlordnung, diesem Axiom nicht genügt. Zu dem ersten Flechtwerk gehört (1, 2), zu den beiden anderen (1, 2, 3) als Höhenzahlenfolge⁷⁾.

⁷⁾ Somit ist die in [N. 1], S. 314, Fußnote ^{a)} aufgeworfene Frage bejahend zu beantworten. Ob es Pseudoverbände, insbesondere Flechtwerke gibt mit Elementen, deren Potenzhöhe größer als 3 ist, ist noch nicht entschieden.

Literaturverzeichnis.

ELLIS, D.: [2] Notes on the foundations of lattice theory. Publ. math. (Ungarn) 1, 205—208 (1950). — KLEIN-BARMEN, F.: [N. 1] Schwach distributive Pseudoverbände. Math. Ann. 124, 309—315 (1952). — [N. 2] Zur Theorie der Operative und Assoziative. Math. Ann. 126, 23—30 (1953).

(Eingegangen am 1. September 1952.)

Some Self-Dual primitive Functions for Propositional Calculi.

By

ALAN ROSE in Nottingham.

It has been shown (1,3) that the conditioned disjunction function $[Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y]$, which takes the same truth-value as X_i when Y takes the truth-value i ($i = 1, 2, \dots, m$), together with the logical constants $1, 2, \dots, m$ form a complete set of independent connectives for the m -valued Propositional Calculus and that these connectives are self-dual, the dual of a formula being obtained by writing it backwards and interchanging the constants i and $m - i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$). It has since been shown (4) that in the LEWIS system $S 2$ (2) and all stronger calculi the same holds for the logical constants n and i together with the function $[U, X, Z, Y, U]$ with the same meaning as

$$(\sim \diamond \sim U \cdot X) \vee (((X \cdot Z) \vee (Y \cdot \sim Z)) \cdot \diamond U \cdot \diamond \sim U) \vee (Y \cdot \sim \diamond U).$$

The object of the present paper is to show that in $S 2$ and all stronger Calculi and in those m -valued Propositional Calculi in which m is even, we can replace the above primitives by a single primitive and that in those m -valued Propositional Calculi in which m is odd we can replace them by three primitives.

When m is even we introduce into the m -valued Propositional Calculus the function \neg such that if the truth-values of $\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A}$ are $x, f(x)$ respectively then

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(m) &= m - 1 \\ f(2n) &= 2n + 2 \left(n \neq \frac{1}{2}m \right) \\ f(2n+1) &= 2n - 1 \quad (n \neq 0). \end{aligned}$$

When $m = 2$ this is the usual negation function of the 2-valued Propositional Calculus.

When m is odd we introduce into the m valued Propositional Calculus the functions \neg_1 and \neg_2 such that if the truth-values of $\mathfrak{A}, \neg_1 \mathfrak{A}, \neg_2 \mathfrak{A}$ are $x, g(x), h(x)$ respectively then

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) &= 1 \\ h\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) &= m \\ g(x) &= g(m+1-x) = x+1 \left(x < \frac{1}{2}m\right) \\ h(x) &= h(m+1-x) = x-1 \left(x > \frac{1}{2}m+1\right). \end{aligned}$$

Theorem 1. *If m is even then the system whose only primitive is the self-dual function $\langle Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y \rangle$ with the same truth-table as $\neg [Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y]$ is functionally complete and the dual of a formula can be obtained by writing it backwards.*

Lemma 1. *There exists a function φ such that, when \mathfrak{A} takes the truth-value i , $\neg^{\varphi(i)} \mathfrak{A}$ takes the truth-value 1.*

Since $f(2n+1) = 2n-1$ ($n \neq 0$) it follows that

$$\varphi(2n+1) = n \left(n=0, 1, \dots, \frac{1}{2}m-1 \right).$$

Since $f(2n) = 2n+2 \left(n \neq \frac{1}{2}m \right)$ it follows that if \mathfrak{A} takes the truth-value $2n$ then $\neg^{m/2-n} \mathfrak{A}$ takes the truth-value $2n+2 \left(\frac{1}{2}m-n \right)$, i. e. m . Hence, since $f(m) = m-1$, $\neg^{m/2-n+1} \mathfrak{A}$ takes the truth-value $m-1$. But since

$$\varphi(2n+1) = n \text{ it follows that}$$

$$\varphi(m-1) = \frac{1}{2}m-1.$$

Hence

$$\varphi(2n) = \frac{1}{2}m-n+1 + \frac{1}{2}m-1 = m-n.$$

Thus we have evaluated φ for $i = 1, 2, \dots, m$ and the Lemma is proved.

Lemma 2. *To each truth-value i there corresponds a function V_i , definable in terms of \neg and conditioned disjunction exclusively, such that $V_i(X)$ always takes the truth-value i .*

It follows from Lemma 1 that $\neg^{\varphi(i)} X$ takes the truth-value 1 when X takes the truth-value i . Hence $V_1(X)$ is $[X, \neg^{\varphi(1)} X, \neg^{\varphi(2)} X, \dots, \neg^{\varphi(m)} X, X]$. Since $f(1) = 2$ and $f(2n) = 2n+2 \left(n \neq \frac{1}{2}m \right)$ it follows that $V_{2n}(X)$ is $\neg^n V_1(X) \left(n=1, 2, \dots, \frac{1}{2}m \right)$. Hence $V_{m-1}(X)$ is $\neg^{m/2+1} V_1(X)$. Since $f(2n+1) = 2n-1$ ($n \neq 0$) it follows that $V_{2n+1}(X)$ is $\neg^{m/2-n-1} V_{m-1}(X)$, i. e. $\neg^{m-n} V_1(X)$. Thus we have defined $V_i(X)$ for $i = 1, 2, \dots, m$ and the Lemma is proved.

Lemma 3. *The system with \neg and conditioned disjunction as its only primitives is functionally complete.*

Since the constants 1, 2, \dots, m together with conditioned disjunction form a complete set of primitives we can, given a function $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ define it in terms of these primitives. Since $V_i(X_1)$ always takes the truth-value i it follows that Φ is definable in terms of conditioned disjunction and \neg by replacing the constant i in the above definition by the unabbreviated form of $V_i(X_1)$, ($i = 1, 2, \dots, m$).

Lemma 4. *If the dual of \mathfrak{A} is \mathfrak{B} then the dual of $\neg \mathfrak{A}$ is $\neg \mathfrak{B}$.*

We must prove that $f(x) = m - f(m-x+1) + 1$. We shall consider the four cases $x = 1$, $x = m$, $x = 2n$, $x = 2n+1$.

If $x = 1$ then $f(x) = 2$ and $m - f(m - x + 1) + 1 = m - f(m) + 1 = m - (m - 1) + 1 = 2 = f(x)$.

If $x = m$ then $f(x) = m - 1$ and $m - f(m - x + 1) + 1 = m - f(1) + 1 = m - 1 = f(x)$.

If $x = 2n \left(n \neq \frac{1}{2}m \right)$ then $f(x) = 2n + 2$ and $m - f(m - x + 1) + 1 = m - f(m - 2n + 1) + 1 = m - f\left(2\left(\frac{1}{2}m - n\right) + 1\right) + 1$
 $= m - \left(2\left(\frac{1}{2}m - n\right) - 1\right) + 1 \left(\text{since } \frac{1}{2}m - n \neq 0\right)$
 $= 2n + 2 = f(x)$.

If $x = 2n + 1 \left(n \neq 0 \right)$ then $f(x) = 2n - 1$ and $m - f(m - x + 1) + 1 = m - f(m - 2n) + 1 = m - f\left(2\left(\frac{1}{2}m - n\right)\right) + 1$
 $= m - \left(2\left(\frac{1}{2}m - n\right) + 2\right) + 1 \left(\text{since } \frac{1}{2}m - n \neq \frac{1}{2}m\right)$
 $= 2n - 1 = f(x)$.

Thus the Lemma is proved.

Proof of the Main Theorem.

It follows from Lemma 2 that if \mathcal{A} takes the truth-value 1 then $\neg^{m-\varphi(i)}\mathcal{A}$ takes the truth-value i . But if \mathcal{A} takes the truth-value i then $\neg^{(i)}\mathcal{A}$ takes the truth-value 1. Hence the truth-values of \mathcal{A} and $\neg^m\mathcal{A}$ are always the same. It follows from the truth-table for conditioned disjunction that the truth-values of \mathcal{A} and $[\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}, \mathcal{A}]$ are always the same. Thus we can define negation and conditioned disjunction in terms of the primitive by

$$\neg \mathcal{A} =_{df} \langle \mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle$$

$$[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}] =_{df} \neg^{m-1} \langle \mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B} \rangle.$$

It follows at once from Lemma 3 that the system is functionally complete. Since the dual of $[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}]$ is $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$ where $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m, \mathcal{D}$ are the duals of $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}$ respectively it follows from Lemma 4 that the dual of $[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}]$ is $\langle \mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D} \rangle$. Thus our primitive is self-dual and the dual of a formula can be obtained by writing it backwards.

We now prove

Theorem 2. *If m is odd then the system whose only primitives are the self-dual independent set of conditioned disjunction, \neg_1 and \neg_2 is functionally complete and the dual of a formula can be obtained by writing it backwards and interchanging the functions \neg_1 and \neg_2 .*

Lemma 5. *There exist functions ψ_1, ψ_2 such that when \mathcal{A} takes the truth-value i the formula $\overline{\neg^{\psi_1(i)} \neg^{\psi_2(i)} \mathcal{A}}$ takes the truth-value 1.*

Since $g(x) = x + 1$ when $x < \frac{1}{2}m$ and $g\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = 1$ it follows that

$$\psi_2(i) = \frac{1}{2}(m+3) - i, \quad \psi_1(i) = 0 \left(i < \frac{1}{2}m\right).$$

Since $h(x) = x - 1$ when $x > \frac{1}{2}m + 1$ and $g\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = 1$ it follows that

$$\psi_1(i) = i - \frac{1}{2}(m+1), \quad \psi_2(i) = 1 \left(i > \frac{1}{2}m + 1\right).$$

Since $g\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = 1$ it follows that $\psi_1\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = 0$, $\psi_2\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = 1$.

Thus we have defined ψ_1, ψ_2 for $i = 1, 2, \dots, m$ and the Lemma is proved.

Lemma 6. *To each integer i there corresponds a function V_i , definable in terms of conditioned disjunction, \neg_1 and \neg_2 , such that $V_i(X)$ always takes the truth-value i .*

We first define V_1 by a method analogous to that of Lemma 2. We then define the other V -functions by

$$V_i(X) =_{df.} \overline{V_1(X)}^{i-1} \left(i \leq \frac{1}{2}(m+1)\right)$$

$$V_i(X) =_{df.} \overline{V_{m-1}(X)}^2 \left(i > \frac{1}{2}(m+1)\right).$$

Lemma 7. *If the dual of \mathfrak{A} is \mathfrak{B} then the dual of $\overline{\mathfrak{A}}^1$ is $\overline{\mathfrak{B}}^2$.*

We must show that $g(x) = m - h(m - x + 1) + 1$.

If $x < \frac{1}{2}m$ then $m - x + 1 > \frac{1}{2}m + 1$. Hence

$$\begin{aligned} m - h(m - x + 1) + 1 &= m - (m - x + 1 - 1) + 1 \\ &= x + 1 = g(x). \end{aligned}$$

If $x > \frac{1}{2}m + 1$ then $m - h(m - x + 1) + 1 = m - (x - 1) + 1 = m + 1 - x + 1 = g(m + 1 - (m + 1 - x))$ (since $m + 1 - x < \frac{1}{2}m$) $= g(x)$.

If $x = \frac{1}{2}(m+1)$ then $m - h(m - x + 1) + 1 = m - h\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) + 1 = m - m + 1 = 1 = g(x)$.

Thus the Lemma is proved.

Proof of the Main Theorem.

Since all the V -functions are definable in terms of the primitives it follows as in Lemma 3 that the system is functionally complete. Since the dual of any function defined exclusively in terms of conditioned disjunction can be obtained by writing it backwards it follows from Lemma 7 that the dual of any formula of the system can be obtained by writing it backwards and interchanging the functions \neg_1 and \neg_2 . It remains for us to show that the primitives are independent.

Conditioned disjunction cannot be defined in terms of \neg_1 and \neg_2 since these functions are of the first degree. We now denote the sets

$$\left\{1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m+1)\right\}, \quad \left\{\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2}(m+3), \dots, m\right\}$$

by E, F respectively. When the truth-values of Y, X_1, X_2, \dots, X_m are members of E the truth-values of $[Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y], \bar{Y}^1$ are members of E , but when Y takes the truth-value $\frac{1}{2}(m+1)$ \bar{Y}^2 takes the truth-value m . Since $\frac{1}{2}(m+1)$ is a member of E but m is not, it follows that $\bar{\cdot}_2$ cannot be defined in terms of conditioned disjunction and $\bar{\cdot}_1$. When the truth-values of Y, X_1, X_2, \dots, X_m are members of F the truth-values of $[Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y], \bar{Y}^2$ are members of F , but when Y takes the truth-value $\frac{1}{2}(m+1)$, \bar{Y}^1 takes the truth-value 1. Since $\frac{1}{2}(m+1)$ is a member of F but 1 is not, it follows that $\bar{\cdot}_1$ cannot be defined in terms of conditioned disjunction and $\bar{\cdot}_2$. Hence our primitives are independent and the theorem is proved.

Theorem 3. *In the LEWIS system S 2 and all stronger calculi the LEWIS primitives can be replaced by the self-dual function $\langle U, X, Z, Y, U \rangle$ with the same meaning as $\sim [U, X, Z, Y, U]$ and the dual of a formula can be obtained by writing it backwards.*

Since $\sim \diamond \sim X \vee (\diamond X \cdot \diamond \sim X) \vee \sim \diamond X$ is a theorem of S 2 it follows that we can define negation by

$$\sim \mathfrak{A} =_{df} \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rangle.$$

Since the formulae $\sim \diamond (\sim \diamond \sim X \cdot \sim X)$, $\sim \diamond ((\sim X \cdot X) \vee (X \cdot \sim X))$, $\sim \diamond (\sim \diamond X \cdot X)$ are theorems of S 2 we can prove the formula $\sim \diamond [X, \sim X, X, X, X]$. In view of the duality theorem of (4) we can also prove the formula $\sim \diamond \sim [X, X, X, \sim X, X]$. Since any function $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ can be defined in terms of $[U, X, Z, Y, U]$, \mathfrak{i} and \mathfrak{n} , it can also be defined in terms of $[U, X, Z, Y, U]$ and negation, by replacing \mathfrak{i} and \mathfrak{n} in the above definition by $[X_1, \sim X_1, X_1, X_1, X_1]$, $[X_1, X_1, X_1, \sim X_1, X_1]$ respectively. But in our present system we can make the definition

$$[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}] =_{df} \sim \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D} \rangle.$$

Hence all functions of the LEWIS calculi can be defined in terms of the primitive. It follows from the duality theorem of (4) and the fact that negation is self-dual that our primitive is self-dual and that the dual of a formula can be obtained by writing it backwards. Thus the theorem is proved.

References.

- [1] CHURCH, ALONZO: *Portugal. Math.* 7, 87 (1948). — [2] LEWIS, C. I. a. C. H. LANGFORD: *Symbolic Logic*, New York and London (1932). — [3] ROSE, ALAN: *Math. Ann.* 123, 76 (1951). — [4] ROSE, ALAN: *Math. Ann.* 125, 284 (1952).

(Eingegangen am 22. April 1952.)

Über Polynomabbildungen.

Von

WALTER HABICHT in Heidelberg.

Einleitung.

Es gibt eine Reihe von Sätzen algebraischer Natur (z. B. Sätze über Nullstellen von Polynomsystemen), die sich zwar in rein algebraischer Form aussprechen lassen, ursprünglich jedoch nur auf topologischem Wege unter Zugrundelegung des Körpers der reellen oder komplexen Zahlen bewiesen worden sind. Als Beispiel sei folgender Satz erwähnt:

Ein System von n Polynomen f_1, \dots, f_n in n Unbestimmten x_1, \dots, x_n , zwischen denen die identische Beziehung

$$\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$$

besteht, hat für ungerades n immer „nichttriviale“ Nullstellen (es hat immer die „triviale“ Nullstelle $(0, \dots, 0)$).

Dieser Satz gilt sowohl über dem Körper R der reellen, als auch über dem Körper K der komplexen Zahlen. Im ersten Fall ist dieser Satz, topologisch interpretiert, im wesentlichen gleichbedeutend mit dem Satz von POINCARÉ-BROUWER¹⁾, der besagt, daß es auf einer Sphäre gerader Dimension kein stetiges Tangentialfeld geben kann, wenn man sich dabei auf solche Felder beschränkt, die ganz rational von den Ortskoordinaten abhängen (wir werden sie Polynomfelder nennen). Im Falle des komplexen Grundkörpers K wurde der Satz zuerst von ECKMANN bewiesen²⁾.

Für eine große Klasse solcher Aussagen, nämlich für alle solchen, die arithmetisch definierbar sind³⁾, hat A. TARSKI gezeigt, daß sie über einem beliebigen reell-abgeschlossenen bzw. algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 anstatt des reellen bzw. komplexen Zahlkörpers ihre Gültigkeit beibehalten⁴⁾. Zu diesen Sätzen gehören auch die oben zitierten.

Diese Aussagen stellen nun insofern rein algebraische Aussagen dar, als auch noch der Rest von Nichtalgebraischem, der im Körper der reellen Zahlen drin steckt, durch den Übergang zu einem beliebigen reell-abgeschlossenen Körper eliminiert ist; denn letztere lassen sich bekanntlich rein algebraisch definieren⁵⁾.

¹⁾ P. ALEXANDROFF, H. HOFF: Topologie (Grundlehren, Bd. XLV), Kap. XII, § 3, Satz IIIa.

²⁾ B. ECKMANN: Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen. Com. Math. Helv. 15, 1—26 (1942).

³⁾ Vgl. Fußnote ⁴⁾.

⁴⁾ On a decision method for elementary algebra and geometry. University of California press (1951), insb. supplementary notes 6, 7.

⁵⁾ Vgl. B. L. V. D. WAERDEN: Moderne Algebra I (3. Aufl. 1950), § 71.

Es drängt sich nun das Problem auf, für diese algebraischen Sätze auch rein algebraische Beweise anzugeben. Hier kann man nun in zwei verschiedenen Richtungen vorgehen: erstens nämlich kann man nach direkten Methoden (etwa der Eliminationstheorie oder der abzählenden algebraischen Geometrie) suchen, die eine Aussage über die Existenz von reellen Lösungen auf dem Umwege über das Komplexe erlauben (wenn z. B. die Anzahl der komplexen Lösungen eines reellen Gleichungssystems endlich und ungerade ist, so muß eine der Lösungen reell sein⁶⁾). Die komplexe Aussage wird bei dieser Methode auf formal-algebraischem Wege gewonnen und gilt über einem beliebigen algebraisch-abgeschlossenen Körper, also ohne die Voraussetzung der Charakteristik 0.

In der vorliegenden Arbeit wird nun aber ein anderer Weg eingeschlagen. Es wird nämlich das Programm in Angriff genommen, die topologischen Methoden selbst, die zum Beweis der in Frage stehenden Sätze im Falle des Körpers der reellen Zahlen führen, soweit zu algebraisieren, daß sie sich auf beliebige reell abgeschlossene Körper übertragen lassen. Dies wird in der vorliegenden Arbeit zunächst für die BROUWERSche Theorie des Abbildungsgrades durchgeführt, deren Zentrum der KRONECKERSche Abbildungssatz (§ 4, 3., Satz 9) bildet. Der Abbildungsgrad einer Polynomabbildung eines „formal-Euklidischen“ (vgl. § 1, I). Komplexes wird durch ihn auf die KRONECKERsche Charakteristik der Abbildung des Randes zurückgeführt; letztere wird rekursiv nach der Dimension der betrachteten Komplexe und Abbildungen definiert; dadurch wird der Prozeß der simplizialen Approximation einer Abbildung, der sich bei nichtarchimedisch angeordnetem Grundkörper nicht durchführen läßt, durch einen rein algebraischen Reduktionsprozeß ersetzt (§ 3, 1.).

§ 1. *n*-dimensionale formal-Euklidische Komplexe.

1. Sei A ein angeordneter Körper und R^N der N -dimensionale, affine Koordinatenraum über A . Sind a_1, \dots, a_{r+1} ($r \leq N$) irgendwelche Punkte des R^N in allgemeiner Lage, so verstehen wir unter dem *r*-dimensionalen Simplex (kurz *r*-Simplex) y^r mit den Eckpunkten a_1, \dots, a_{r+1} das Innere der konvexen Hülle der Punkte a_1, \dots, a_{r+1} . Ist $a_{j_1}, \dots, a_{j_{s+1}}$ irgendein Teilsystem von a_1, \dots, a_{r+1} , so heißt das *s*-Simplex y^s mit den Ecken $a_{j_1}, \dots, a_{j_{s+1}}$ eine *s*-dimensionale Seite von y^r . Die Vereinigungsmenge von y^r mit seinen Seiten ist die Hülle \bar{y}^r von y^r .

Sei n eine feste natürliche Zahl und $N \geq n$. Unter einem *n*-dimensionalen formal-Euklidischen Komplex K^n im R^N verstehen wir eine endliche Menge von untereinander punktfremden Simplices höchstens n ter Dimension im R^N , die zu einem Simplex auch seine sämtlichen Seiten enthält. Fassen wir K^n als Punktmenge des R^N auf, so schreiben wir \bar{K}^n . Eine Punktmenge Π^n des R^N heißt ein *Polyeder*, wenn es einen Komplex K^n gibt mit $\bar{K}^n = \Pi^n$; K^n heißt dann eine *Triangulation* von Π^n .

⁶⁾ Vgl. etwa: F. BEHREND: Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen. Comp. Math. 7, § 2 (1939).

Besteht K^n aus lauter n -Simplices und ihren Seiten, so heißt K^n *homogen* n -dimensional. Die $(n-1)$ -Simplices von K^n heißen dann die *Seiten* von K^n ; sie bilden das $(n-1)$ -dimensionale Gerüst von K^n .

Die nulldimensionalen Simplices sind die Punkte, die nulldimensionalen Komplexe die endlichen Punktmenge des R^N .

2. Ein Simplex y^r wird *orientiert*, indem man ihm diejenigen Reihenfolgen seiner Eckpunkte zuordnet, die aus einer festen Reihenfolge (a_1, \dots, a_{r+1}) durch eine gerade Permutation hervorgehen. Die beiden Orientierungen werden mit $+y^r$, $-y^r$ oder auch durch Angabe einer zugehörigen Eckpunktreihenfolge bezeichnet.

Mit den r -dimensionalen orientierten Simplices eines Komplexes K^n als Erzeugenden bilden wir einen ganzzahligen Modul \mathfrak{L}^r , indem wir festsetzen, daß für jedes y^r : $(+y^r) + (-y^r) = 0$ sein soll. Die Elemente C^r, \dots von \mathfrak{L}^r heißen die r -Ketten von K^n ; sie lassen sich eindeutig in der Gestalt

$$(1) \quad C^r = c_1 y_1^r + \dots + c_i y_i^r$$

darstellen, wo y_1^r, \dots, y_i^r die beliebig orientierten r -Simplices von K^r und c_1, \dots, c_i ganze Zahlen bedeuten. Unter dem von der Kette C^r gebildeten Polyeder \bar{C}^r verstehen wir die Vereinigungsmenge der Hüllen derjenigen r -Simplices, die in (1) mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten. Unter dem von der Kette C^r gebildeten Komplex $|C^r|$ verstehen wir den Komplex, bestehend aus den soeben erwähnten r -Simplices und ihren Seiten.

Die nulldimensionalen Ketten von K^n sind formale Summen der mit ganzzahligen Koeffizienten versehenen Eckpunkte von K^n .

3. Unter dem *Rand* $\partial(y^r)$ eines orientierten r -Simplexes $y^r = (a_1, \dots, a_{r+1})$ versteht man die $(r-1)$ -Kette

$$(2) \quad \partial(y^r) = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{r+1-k} (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{r+1});$$

der Rand einer durch (1) definierten Kette C^r wird durch

$$\partial(C^r) = c_1 \cdot \partial(y_1^r) + \dots + c_i \cdot \partial(y_i^r)$$

erklärt; die Randbildung ist also eine lineare Operation im Bereich der Ketten. Man bestätigt sofort, daß die doppelte Randbildung zur Nullkette (so nennen wir die Kette, deren Koeffizienten alle Null sind) führt.

Der Rand einer nulldimensionalen Kette wird definitionsgemäß gleich 0 gesetzt.

Eine Kette heißt ein *Zyklus*, falls ihr Rand die Nullkette ist. Jeder Rand ist ein Zyklus.

Eine lineare Abbildung des Moduls \mathfrak{L}^r der r -Ketten eines Komplexes K^n in den Modul \mathfrak{L}_s^s der s -Ketten eines Komplexes K_1^m heißt eine *Kettenabbildung*, wenn sie mit der Randbildung vertauschbar ist.

4. Ist y ein Simplex, \bar{y} seine Hülle, so bilden diejenigen Simplices einer Triangulation von \bar{y} , die in y liegen, eine *Unterteilung* y' von y . Sind alle Simplices eines Komplexes derart unterteilt, daß die neu entstehenden Simplices wieder einen Komplex K' bilden, so heißt K' eine *Unterteilung* von K .

Sei K' eine Unterteilung von K und etwa z'_1, \dots, z'_q die r -Simplexes, in welche hierbei ein r -Simplex y' zerfällt. y' sei nach geeigneter Numerierung der Eckpunkte orientiert durch $y' = (a_1, \dots, a_{r+1})$. Die Vektoren $\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_{r+1}}$ seien als Grundvektoren eines Koordinatensystems in dem von y' aufgespannten affinen Raum R' gewählt. Sind nun die Ecken $b_{j,1}, \dots, b_{j,r+1}$ ($j = 1, \dots, q$) von z'_j so numeriert, daß in diesem Koordinatensystem $\text{sgn det } (b_{j,1}, \dots, b_{j,r+1}) = +1$ ist, so wählen wir als Orientierung von z'_j : $z'_j = (b_{j,1}, \dots, b_{j,r+1})$ und setzen

$$d(y') = z'_1 + \dots + z'_q.$$

Hieraus erhält man durch lineare Fortsetzung eine Abbildung d des Moduls \mathfrak{L}' der r -Ketten von K in den Modul \mathfrak{L}'' der r -Ketten von K' . Man überlegt sich leicht, daß d eine Kettenabbildung ist: $d \partial = \partial d$. Daraus folgt insbesondere $\partial d(C) = \partial(C)$.

Ist p Punkt eines Simplexes y' von K , so heißt y' das *Trägersimplex* von p . Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ aus dem Grundkörper A kann der Komplex K immer derart unterteilt werden, daß das Trägersimplex y' von p in K' ebenfalls r -dimensional ist und einen Durchmesser $< \varepsilon$ besitzt⁷⁾.

Sind ferner K_1, K_2 Triangulationen zweier Polyeder Π_1, Π_2 , so gibt es Unterteilungen K'_1, K'_2 , die eine Triangulation des Durchschnittes $\Pi_1 \cap \Pi_2$ als gemeinsamen Teilkomplex enthalten: $\overline{K'_1 \cap K'_2} = \overline{K'_1 \cap K'_2}$. Im Falle $\Pi_1 = \Pi_2$ bedeutet dies, daß es zu zwei Triangulationen eines Polyeders eine gemeinsame Unterteilung gibt.

5. Π sei ein Polyeder, z_1 und z_2 seien Zyklen beliebiger Triangulationen K_1, K_2 von Π . \mathfrak{P} sei irgendeine Punktmenge auf Π . Es gebe eine gemeinsame Unterteilung $K' = d_1(K_1) = d_2(K_2)$ ⁸⁾, und eine Kette C von K' mit $\bar{C} \cap \mathfrak{P} = 0$, so daß $d_2(z_2) - d_1(z_1) = \partial(C)$ ist. Dann heißen z_1 und z_2 zueinander *homolog bezüglich* $\Pi - \mathfrak{P}$:

$$z_1 \sim z_2 \quad (\text{bez. } \Pi - \mathfrak{P}).$$

Aus dem in 3. und 4. Gesagten folgt sofort, daß die Homologie eine Äquivalenzrelation darstellt.

§ 2. Polynomfelder.

1. $C = C^n$ sei irgendeine n -Kette im R^N ($1 \leq n \leq N$) und $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ ein System von $n+1$ Polynomen in N Variablen mit Koeffizienten aus A . Wir können f_1, \dots, f_{n+1} als Komponenten eines $(n+1)$ -dimensionalen Vektorfeldes im R^N oder auch als Koordinaten in einem affinen Bildraum S^{n+1} über

⁷⁾ Es ist zu beachten, daß man (bei nichtarchimedischer Anordnung von A) durch Unterteilung i. A. nicht die Durchmesser sämtlicher Simplexes unter die Schranke ε drücken kann. Man kann aber p zwischen geeignete Hyperebenen einschließen und hat dann nur alle entstehenden Zellen von \bar{K} (das sind Durchschnitte endlich vieler Halbräume und Hyperebenen) in geeigneter Weise zu triangulieren. Wir gehen auf diese elementare Konstruktion nicht näher ein.

⁸⁾ Vgl. die unter ⁷⁾ angedeutete Konstruktion.

⁹⁾ Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Unterteilung eines Komplexes und die dadurch induzierte Kettenunterteilung in unmißverständlicher Weise mit demselben Buchstaben.

dem Grundkörper A auffassen und gebrauchen dementsprechend für f auch die Bezeichnungen „Feld“ bzw. „Abbildung“ (des R^N in den S^{n+1}). Wir setzen über das System f zweierlei voraus:

1. f_1, \dots, f_{n+1} haben auf \bar{C} keine gemeinsame Nullstelle. Ein solches System heiße auf \bar{C} *definit*.

2. Die ersten Polynome f_1, \dots, f_n haben auf \bar{C} nur endlich viele und auf $\partial(\bar{C})$ keine gemeinsamen Nullstellen. Das System f heiße in diesem Fall auf \bar{C} *regulär*.

Wir werden weiter unten sehen, daß im Fall, wo $C = z$ ein *Zyklus* ist, die zweiseitige Voraussetzung entbehrlich wird.

Eine nichtausgeartete affine Abbildung α des $R^N = R$ in einen R' über A induziert offenbar eine *simpliciale Kettenabbildung*, indem einem orientierten Simplex $y' = (a_1, \dots, a_{r+1})$ des R^N das orientierte Simplex $y'' = (\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_{r+1}))$ des R' zugeordnet und diese Zuordnung linear auf beliebige Ketten fortgesetzt wird. Diese Kettenabbildung können wir, ohne Mißverständnisse zu befürchten, wieder mit α bezeichnen.

Wir werden weiter folgende Bezeichnungen gebrauchen: die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen f und g ergibt wieder eine Abbildung, für die wir $g \circ f$ schreiben. Ist ferner $y = (a_1, \dots, a_{n+1})$ ein orientiertes n -Simplex und f ein Polynomfeld im R^N , so verstehen wir unter f_y die Beschränkung von f auf den von y aufgespannten linearen Teilraum R^n von R^N , und zwar ausgedrückt in dem von den Grundvektoren $\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_{n+1}}$ aufgespannten Koordinatensystem. Mit e_y bezeichnen wir die affine Abbildung des R^N auf einen S^n , die a_1 in den Ursprung und die Grundvektoren $\overrightarrow{a_1 a_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, n$) in die Grundvektoren des S^n (unter Beibehaltung der Reihenfolge) überführt; als Polynomsystem ausgeschrieben, hat also e_y die Gestalt $e_y = (x_1, \dots, x_n)^{10}$.

Wir setzen von nun an $A = \Omega$ reell abgeschlossen voraus.

2. Es soll nun der n -Kette C und dem System f von $n+1$ Polynomen eine ganze Zahl zugeordnet werden, welche wir den *Indikator* von f bezüglich C nennen. Ist $C = z$ ein *Zyklus*, so wird sich zeigen, daß diese Zahl durch 2 teilbar ist; ihre Hälfte werden wir als *KRONECKERSche Charakteristik* des Feldes bezüglich C bezeichnen. Wir wollen diese beiden ganzzahligen Funktionen durch Rekursion nach der Dimension n im festen R^N definieren.

Sei f^n ein festes n -dimensionales Feld im R^N . Der Indikator $\psi(f^n, C^{n-1}) = \psi(C^{n-1})$ von f^n bezüglich einer $(n-1)$ -Kette C^{n-1} im R^N sei definiert, falls f^n auf $\overline{C^{n-1}}$ definit und regulär ist; die Charakteristik $\chi(f^n, z^{n-1}) = \chi(z^{n-1})$ sei definiert, falls z^{n-1} ein *Zyklus* im R^N und f^n auf $\overline{z^{n-1}}$ definit ist.

Wir setzen für die Dimension n eine Reihe von Eigenschaften von ψ und χ als bewiesen voraus, nämlich

¹⁰⁾ Diese Bezeichnungen sind insofern ungenau, als durch Vorgabe des orientierten Simplexes y die Reihenfolge seiner Eckpunkte nur bis auf eine gerade Permutation festgelegt ist. Man müßte also, um genau zu sein, schreiben: $f_{a_1, \dots, a_{n+1}}$. Wir dürfen aber diese Willkür zulassen, da die folgenden Begriffe und Sätze durch sie nicht betroffen werden.

A₁. Linearität.

$$\psi(f, c_1 C_1 + c_2 C_2) = c_1 \cdot \psi(f, C_1) + c_2 \cdot \psi(f, C_2)$$

$$\chi(f, c_1 z_1 + c_2 z_2) = c_1 \cdot \chi(f, z_1) + c_2 \cdot \chi(f, z_2).$$

A₂. Invarianz bei Unterteilung.

$$\psi(f, C) = \psi(f, d(C))$$

$$\chi(f, z) = \chi(f, d(z)).$$

A₃. Unabhängigkeit vom Koordinatensystem im R^N .

$$\psi(f \circ \alpha, C) = \psi(f, \alpha(C))$$

$$\chi(f \circ \alpha, z) = \chi(f, \alpha(z)).$$

A₄. Transformationssatz. Läßt die lineare Abbildung α den Nullpunkt des S^n fest, so gilt

$$\chi(\alpha \circ f, z) = \chi(f, z) \operatorname{sgn} \det \alpha.$$

Dabei bedeutet $\det \alpha$ die Determinante der Matrix von α im Bildraum S^n , den wir uns ja immer mit einem festen Koordinatensystem versehen denken.

B. Normierungseigenschaft. Ist y ein orientiertes n -Simplex des R^N , $p \in y$ ein Punkt auf y und ist das konstante Feld, das p seine Koordinaten zuordnet, ebenfalls mit p bezeichnet, so gilt

$$\chi(e_y - p_y, \partial(y)) = 1.$$

C₁. Satz von ROUCHÉ. f sei auf \bar{z} definit. Für ein zweites Feld f^* gelte in jedem Punkt von \bar{z} :

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 > \sum_{i=1}^n (f_i - f_i^*)^2.$$

Dann ist auch f^* auf \bar{z} definit und

$$\chi(f, z) = \chi(f^*, z).$$

C₂. Eigenschaft (f, φ) . Ist $f = (f_1, \dots, f_n)$ auf \bar{z} definit und φ ein auf \bar{z} definites Polynom, das daselbst das Vorzeichen $\operatorname{sgn} \varphi$ besitzt, so ist auch $f^* = (f_1 \varphi, f_2 \varphi, \dots, f_n \varphi)$ auf \bar{z} definit und

$$\chi(f, z) = \operatorname{sgn} \varphi \cdot \chi(f^*, z).$$

C₃. Satz von BOLZANO-KRONECKER. Ist Π ein Polyeder im R^N , z_1 und z_2 zwei $(n-1)$ -Zyklen beliebiger Triangulationen von Π und \mathfrak{P} die Mannigfaltigkeit der auf Π liegenden Nullstellen des Feldes $f = (f_1, \dots, f_n)$, so gilt:

$$\text{Aus } z_1 \sim z_2 \text{ (bzw. } \Pi - \mathfrak{P}) \text{ folgt } \chi(z_1) = \chi(z_2).$$

3. Wir gehen jetzt zu einer n -Kette $C^n = C$ über. Sei $f^n = f$ ein n -dimensionales Feld, das auf \bar{C} nur endlich viele, auf $\partial(C)$ keine Nullstellen besitzt, und p ein Punkt von \bar{C} , der nicht auf $\partial(C)$ liegt. Wir definieren den *Index von f in p bezüglich $C, j(f, p, C)$* .

Seien p_1, \dots, p_t die von p verschiedenen Nullstellen von f auf \bar{C} . Es sei eine Unterteilung $d(C)$ von C und eine Teilkette Γ von $d(C)$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

a) In Γ treten alle Simplices y von $d(C)$ mit $p \in \bar{y}$ auf, und zwar mit denselben Koeffizienten wie in $d(C)$.

b) $\bar{\Gamma}$ enthält keinen der Punkte $p_\lambda (\lambda = 1, \dots, l)$; $\bar{\partial}(\Gamma)$ enthält außerdem p nicht. b) impliziert, daß f bezüglich $\partial(\Gamma)$ definit ist. — Dann setzen wir

$$(3) \quad j(f, p, C) = \chi(f, \partial(\Gamma)).$$

Es ist zweierlei zu zeigen: 1. Die Existenz von $d(C)$ und Γ mit den obigen Eigenschaften und 2. die Eindeutigkeit der Indexdefinition.

1. *Existenz.* Sei y^N ein N -Simplex des R^N mit $p \in \bar{y}^N$, $p \in \partial(\bar{y}^N)$, $p_\lambda \in \bar{y}^N$ ($\lambda = 1, \dots, l$). Weiter seien $|y^N|'$ und $|C|'$ solche Unterteilungen der Komplexe $|y^N|$ und $|C|$, die eine Triangulation des Durchschnitts $\bar{y}^N \cap \bar{C}$ bewirken; diese heiße $|\Gamma| = |y^N|' \cap |C|'$. Ist d die durch die Unterteilung $|C|'$ induzierte Kettenunterteilung, so sei Γ aus den n -Simplexes von $|\Gamma|$ mit denselben Koeffizienten gebildet, mit denen sie in $d(C)$ auftreten. a) und der erste Teil von b) sind dann für Γ offenbar erfüllt. p liegt nicht auf $\bar{\partial} d(C)$ und nicht auf $\bar{d}(C) - \bar{\Gamma}$, also auch nicht auf $\bar{\partial} d(C) - \bar{\partial}(\Gamma)$ und deshalb auch nicht auf $\bar{\partial}(\Gamma)$, womit b) nachgewiesen ist.

2. *Eindeutigkeit.* Seien Γ_1, Γ_2 Teilketten zweier Unterteilungen $|C|_1, |C|_2$ von $|C|$ mit den Eigenschaften a), b) und $|C|_{12}$ eine gemeinsame Unterteilung. Diese Unterteilung induziere auf $|C|_1$ die Kettenunterteilung d_1 , auf $|C|_2$ die Kettenunterteilung d_2 . Die Ketten $d_1(\Gamma_1)$ und $d_2(\Gamma_2)$ haben dann bezüglich $d(C)$ (d die durch $|C|_{12}$ induzierte Kettenunterteilung von $|C|$) wieder die Eigenschaften a), b). — Sind wieder y_1, \dots, y_s die Simplexes von $d(C)$, deren Hüllen p enthalten, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} d(C) &= \sum_{i=1}^s c_i y_i \\ d_1(\Gamma_1) &= \sum_{i=1}^s c_i y_i + \sum_{i=s+1}^{\infty} c'_i y_i \\ d_2(\Gamma_2) &= \sum_{i=1}^s c_i y_i + \sum_{i=s+1}^{\infty} c''_i y_i, \end{aligned}$$

wobei die c'_i, c''_i Null sind, falls \bar{y}_i einen der Punkte p_λ enthält. Also enthält $\overline{d_2(\Gamma_2) - d_1(\Gamma_1)}$ weder p noch die Punkte $p_\lambda (\lambda = 1, \dots, l)$. Wegen $d_2 \partial(\Gamma_2) - d_1 \partial(\Gamma_1) = \partial(d_2(\Gamma_2) - d_1(\Gamma_1))$ ist also

$$\partial(\Gamma_1) \sim \partial(\Gamma_2) \quad (\text{bzw. } \bar{C} - \mathfrak{P}),$$

wo \mathfrak{P} die Punktmenge (p, p_1, \dots, p_l) bedeutet. Nach dem Satz von BOLZANO-KRONECKER (2, C₃) folgt daraus $\chi(f, \partial(\Gamma_1)) = \chi(f, \partial(\Gamma_2))$, q. e. d.

Ist p selbst keine Nullstelle von f , so folgt aus C₃ und A₁:

$$j(f, p, C) = \chi(f, \partial(\Gamma_1)) = \chi(f, 0) = 0.$$

4. Der Index eines n -dimensionalen Feldes besitzt folgende Eigenschaften:

A₁'. *Linearität.* $j(f, p, c_1 C_1 + c_2 C_2) = c_1 j(f, p, C_1) + c_2 j(f, p, C_2)$ (falls alle drei vorkommenden Indices definiert sind).

A₂'. *Invarianz bei Unterteilung.*

$$j(f, p, d(C)) = j(f, p, C).$$

A'_3 . Unabhängigkeit vom Koordinatensystem im R^N .

$$j(f \circ \alpha, p, C) = j(f, \alpha(p), \alpha(C)).$$

A'_4 . Transformationseigenschaft.

$$j(\alpha \circ f, p, C) = j(f, p, C) \operatorname{sgn} \det \alpha.$$

A'_i ergibt sich sofort aus A_i und der Indexdefinition, da $d(C)$ und $\alpha(C)$ Kettenabbildungen sind. — Es ist zweckmäßig, den Index auch noch für $p \in \bar{C}$ zu definieren. Wir setzen dann einfach $j(f, p, C) = 0$, und die Regeln A'_i behalten ihre Gültigkeit.

B' . Normierungseigenschaft. Mit denselben Bezeichnungen wie in 2. gilt: ist $p \in \bar{y}$, $p \in \overline{\partial(y)}$, so ist

$$(4) \quad j(e_y - p_y, p, y) = 1.$$

Zum Beweis braucht man nur in der Indexdefinition $\Gamma = y$ zu wählen.

Schließlich beweisen wir zwei Eigenschaften des Indexes, die wir als Sätze formulieren. Die Induktionsvoraussetzung C_3 , zusammen mit der Indexdefinition, führt auf den

Satz 1.

Besitzt f auf \bar{C} nur endlich viele Nullstellen p_1, \dots, p_l , wovon keine auf $\overline{\partial(C)}$ liegt, so ist

$$\sum_{\lambda=1}^l j(f, p_\lambda, C) = \chi(f, \partial(C)).$$

Beweis. Wie in 3. konstruiert man eine Unterteilung $d(C)$ von C und zu jedem p_λ eine Teilkette Γ_λ von $d(C)$, so daß $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ paarweise elementarfremd sind. Dann ist

$$\chi(f, \partial(C)) = \chi(f, \sum_{\lambda=1}^l \partial(\Gamma_\lambda)) + \chi(f, \partial(d(C) - \sum_{\lambda=1}^l \Gamma_\lambda));$$

das zweite Glied rechts ist Null, weil die eingeklammerte Kette keine Nullstelle des Feldes enthält; das erste Glied ist nach A_1 und (3) gleich $\sum_{\lambda=1}^l j(f, p_\lambda, C)$.

Satz 2.

Ist y ein orientiertes n -Simplex und $p \in \bar{y}$, $p \in \overline{\partial(y)}$ eine einfache Nullstelle des Systems f_y , so gilt

$$(5) \quad j(f, p, y) = \operatorname{sgn} \Delta(f_y)(p),$$

wo $\Delta(f_y)(p)$ die Funktionaldeterminante des Systems f_y im Punkte p bedeutet.

Beweis. Entwickelt man f_y im Punkte p und behält dann nur die linearen Glieder bei, so erhält man die durch f_y im Punkte p induzierte infinitesimale lineare Abbildung α ; es ist dann $\Delta(f_y)(p) = \det \alpha$. Ist α^{-1} die inverse Abbildung zu α , so bilden wir zu f das neue Feld $\alpha^{-1} \circ f = f^*$; nach A'_4 genügt es, zu zeigen, daß

$$j(f^*, p, y) = 1$$

ist. Hierzu wählen wir, wenn $y = (a_1, \dots, a_{n+1})$ ist, im R^N ein Koordinatensystem, dessen erste n Grundvektoren die $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, n$) sind, und ent-

wickeln f^* im Punkte $p = (p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0)$ nach aufsteigenden Potenzen von $x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n, x_{n+1}, \dots, x_N$; nach Konstruktion von f^* lautet diese Entwicklung folgendermaßen:

$$f_i^* = x_i - p_i + \sum_{k=n+1}^N a_{ik} x_k + r_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

wo die Restpolynome r_i nur quadratische und höhere Glieder enthalten. Man wähle nun ein in y liegendes, p als Mittelpunkt enthaltendes, reguläres n -Simplex $y_\varepsilon^{11)}$ von so kleinem Durchmesser ε , daß auf ganz $\overline{\partial(y_\varepsilon)}$

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 < \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2$$

gilt¹²⁾. Da $\overline{\partial(y_\varepsilon)}$ in \bar{y} liegt, verschwinden auf $\overline{\partial(y_\varepsilon)}$ alle Summen $\sum_{k=n+1}^N a_{ik} x_k$, und nach C_1 (Satz von ROUCHÉ) folgt

$$\chi(f^*, \partial(y_\varepsilon)) = \chi(e_y - p_y, \partial(y_\varepsilon)).$$

Nimmt man nun in der Indexdefinition $\Gamma = y_\varepsilon$, so ergibt sich wegen der Normierungseigenschaft B' :

$$j(f^*, p, y) = j(e_y - p_y, p, y) = 1, \quad \text{q. e. d.}$$

5. Wir gehen jetzt über zur Untersuchung $(n+1)$ -dimensionaler Felder auf n -dimensionalen Ketten, welche die in 1. gemachten Voraussetzungen erfüllen.

$f = f^{n+1} = (f_1, \dots, f_{n+1})$ sei ein $(n+1)$ -dimensionales Feld. Unter seiner Projektion \bar{f} verstehen wir das n -dimensionale Feld $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$. C sei eine n -Kette. Dann definieren wir:

Definition 1.

Unter dem Indikator $\psi(f, C)$ des auf \bar{C} definiten, regulären Feldes f verstehen wir die ganze Zahl

$$(6) \quad \psi(f, C) = - \sum_{\lambda=1}^l j(\bar{f}, p_\lambda, C) \operatorname{sgn} f_{n+1}(p_\lambda),$$

wo p_1, \dots, p_l die Nullstellen von \bar{f} auf \bar{C} bedeuten.

Aus 4. folgt sofort, daß ψ die Eigenschaften A_1, A_2, A_3 von 2. besitzt, falls dies für die Dimension n schon der Fall war.

Nun sei $C = z$ ein n -Zyklus und f ein auf \bar{z} definites Feld, das wir vorläufig außerdem regulär bezüglich \bar{z} voraussetzen. Seien p_1, \dots, p_k diejenigen Nullstellen der Projektion \bar{f} auf \bar{z} , in denen f_{n+1} positiv, p_{k+1}, \dots, p_l diejenigen, in denen f_{n+1} negativ ist. Es ist dann

$$\psi(f, z) = - \sum_{\lambda=1}^k j(\bar{f}, p_\lambda, z) + \sum_{\lambda=k+1}^l j(\bar{f}, p_\lambda, z)$$

¹¹⁾ Wir legen im Koordinatenraum R^N die Euklidische Metrik zugrunde.

¹²⁾ Eine leichte Abschätzung zeigt, daß auf $\overline{\partial(y_\varepsilon)}$ die rechteastehende Summe $> \beta \varepsilon^2$, die linksstehende $< \gamma \varepsilon^4$ ist, wo β, γ von der Wahl von ε unabhängige positive Konstanten aus Ω sind. Daraus folgt sofort, daß $\varepsilon > 0$ aus Ω tatsächlich in der gewünschten Weise gewählt werden kann.

und andererseits nach Satz 1 wegen $\partial(z) = 0$:

$$0 = \sum_{\lambda=1}^k j(\bar{f}, p_{\lambda}, z) + \sum_{\lambda=k+1}^l j(\bar{f}, p_{\lambda}, z),$$

also

$$(7) \quad \psi(f, z) = 2 \cdot \sum_{\lambda=k+1}^l j(\bar{f}, p_{\lambda}, z).$$

Definition 2.

Unter der Charakteristik $\chi(f, z)$ des auf \bar{z} definiten, regulären Feldes f verstehen wir die Indexsumme der Projektion \bar{f} , erstreckt über diejenigen ihrer Nullstellen auf \bar{z} , in welchen f_{n+1} negativ ist.

Nach (7) ist die Charakteristik gleich der Hälfte des Indikators, besitzt also ebenfalls die Eigenschaften A_1, A_2, A_3 .

6. Nachdem wir so auf dem Umweg über den Index die Begriffe Indikator und Index rekursiv definiert haben, müssen wir diese Definition noch verankern. Dazu genügt es, die Charakteristik eines eindimensionalen Feldes, d. h. eines einzelnen Polynoms f , bezüglich eines nulldimensionalen Zyklus, d. h. einer algebraischen Summe von Punkten des R^N zu definieren. Sei

$$z = \sum_{k=1}^q c_k p_k;$$

daß f auf \bar{z} definit ist, bedeutet, daß f in keinem der Punkte p_k verschwindet (die Voraussetzung der Regularität (I.) ist hier trivialerweise immer erfüllt). Dann definieren wir

$$\chi(f, z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^q c_k \cdot \operatorname{sgn} f(p_k).$$

Man erkennt sofort, daß die Eigenschaften A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) erfüllt sind. Die Normierungseigenschaft B besagt: Ist p eine Zahl aus Ω zwischen 0 und 1 und y die orientierte Strecke $0 < x_1 < 1$, so gilt für das Feld $e_y - p_y = (x_1 - p)$:

$$\chi(e_y - p_y, \partial(y)) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(x_1 - p)|_{x_1=1} - \operatorname{sgn}(x_1 - p)|_{x_1=0}) = 1.$$

C_1 und C_2 ergeben sich sofort aus den Anordnungseigenschaften von Ω . Schließlich ist C_3 gleichbedeutend mit dem klassischen Nullstellensatz von BOLZANO-WEIERSTRASS, welcher bekanntlich für Polynome über einem reell-abgeschlossenen Körper richtig ist¹³⁾.

7. Wir stehen nun vor der Aufgabe, für die rekursiv definierten Begriffe des Indikators und der Charakteristik die Eigenschaften A_4, B, C_1, C_2, C_3 zu beweisen (unter der Voraussetzung, daß sie für die Dimension n schon als richtig erkannt sind). Wir beginnen mit der Normierungseigenschaft B. Sei also $y = (a_1, \dots, a_{n+2})$ ein orientiertes $(n+1)$ -Simplex im R^N , und das Koordinatensystem im R^N sei wie in 4. an dieses Simplex adaptiert. $p = (p_1, \dots, p_{n+1}, 0, \dots, 0)$ sei ein innerer Punkt von \bar{y} . Die Projektion des Feldes $e_y - p_y = (x_1 - p_1, \dots, x_{n+1} - p_{n+1})$ lautet $e_y - p_y = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$. Sie besitzt

¹³⁾ Vgl. etwa: B. L. V. D. WAERDEN: Moderne Algebra, I. Kap. IX, § 71, Satz 5.

zwei Nullstellen auf $\partial(\bar{y})$, nämlich

$\bar{p} = (p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0)$ und $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n, 1 - p_1 - \dots - p_n, 0, \dots, 0)$.
In \bar{p} ist $(x_{n+1} - p_{n+1})$ negativ, in \bar{p} positiv, so daß also

$$\chi(e_y - p_y, \partial(y)) = j(\bar{e}_y - \bar{p}_y, \bar{p}, \partial(y))$$

ist. Nun liegt \bar{p} in dem n -Simplex $\bar{y} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ und es ist

$$\bar{e}_y - \bar{p}_y = e_{\bar{y}} - \bar{p}_{\bar{y}},$$

und weiter tritt \bar{y} in $\partial(y)$ nach der Randdefinition [§ 1, 3., (2)] mit dem Koeffizienten 1 auf, also folgt aus A'_1 und B' (cf. 4.):

$$\chi(e_y - p_y, \partial(y)) = j(e_{\bar{y}} - \bar{p}_{\bar{y}}, \bar{p}, \bar{y}) = 1, \quad \text{q. e. d.}$$

8. In 5. wurde $\chi(f, z)$ nur für auf \bar{z} definite und reguläre Felder definiert. Wir werden uns jetzt von der zweiten Voraussetzung befreien und zugleich den Transformationssatz A_4 beweisen.

$z^n = z$ wird im folgenden festgehalten; wir schreiben demgemäß $\chi(f, z) = \chi(f)$. Wir betrachten neben f folgende Felder, die durch lineare Operationen auseinander hervorgehen:

$$\begin{aligned} f &= (f_1, \dots, f_{n+1}) \\ f^0 &= (f_{n+1}, f_2, \dots, f_n, f_1) \\ f^* &= (f_1 f_{n+1}, f_2, \dots, f_n, 1). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke „definit“ und „regulär“ beziehen sich im folgenden immer auf \bar{z} .

Hilfssatz 1. Ist f definit und regulär, p eine Nullstelle von \bar{f} , so ist

$$j(\bar{f}^*, p) = j(\bar{f}, p) \operatorname{sgn} f_{n+1}(p).$$

Beweis. Sei $f_{n+1}(p) = c \neq 0$. Der Durchmesser der Kette Γ in der Indexdefinition läßt sich so klein wählen, daß auf $\bar{\Gamma}$:

$$|f_{n+1} - c| \leq \frac{|c|}{2}$$

bleibt. f_{n+1} ist also auf $\partial(\bar{\Gamma})$ definit und besitzt daselbst überall das Vorzeichen $\operatorname{sgn} f_{n+1}(p)$. Also folgt die Behauptung aus der Eigenschaft (f, φ) (2., C_n).

Hilfssatz 2. Sind f und f^0 beide regulär, so gilt

$$\chi(f) = -\chi(f^0).$$

Beweis. Sind f und f^0 beide regulär, so auch f^* . Da die letzte Komponente von f^* gleich 1 ist, folgt aus Satz 1, angewandt auf f^* : $\psi(f^*) = 0$. Andererseits ist nach Hilfssatz 1 und Definition 1:

$$\psi(f^*) = \psi(f) + \psi(f^0);$$

Division durch 2 liefert die Behauptung.

Wir betrachten jetzt ein Feld der Gestalt

$$\tilde{f} = (f_1 + c_1 f_{n+1}, \dots, f_n + c_n f_{n+1}, f_{n+1}) \quad (c_i \in \Omega, i = 1, \dots, n)$$

und beweisen den

Hilfssatz 3.

Sind die Felder $f, \tilde{f}, (\tilde{f})^0$ regulär, so ist

$$\chi(f) = \chi(\tilde{f}).$$

Beweis. \tilde{f}^0 und $(\tilde{f})^0$ haben genau dieselben Nullstellen. Da $(\tilde{f})^0$ regulär ist, so auch \tilde{f}^0 . Nach Hilfssatz 2 ist $\chi(f) = -\chi(f^0)$ und $\chi(\tilde{f}) = -\chi((\tilde{f})^0)$. Es bleibt zu zeigen $\chi(f^0) = \chi((\tilde{f})^0)$. — Sei p eine der Nullstellen von f^0 , also auch von $(\tilde{f})^0$. In p stimmen einerseits die letzten Komponenten f_1 und $\tilde{f}_1 + c_1 \tilde{f}_{n+1}$ der beiden Felder überein, andererseits ist wegen A'_4 (cf. 4.): $j(f^0, p) = j((\tilde{f})^0, p)$. Nun folgt die Behauptung nach Definition 1 und Division durch 2.

Die Hilfssätze 1 und 2 dienen nur zur Herleitung von Hilfssatz 3.

Wir kommen jetzt zum Beweis von A_4 .

Satz 3 (Transformationssatz).

$\chi(f, z)$ läßt sich für ein auf \bar{z} definites Feld eindeutig definieren. Ist dabei $f' = \alpha \circ f$ das Feld, das aus $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ durch die nichtsinguläre affine Transformation

$$f'_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} f_k \quad (a_{ik} \in \Omega, i = 1, \dots, n+1)$$

hervorgeht, so gilt $\chi(f', z) = \operatorname{sgn} \|a_{ik}\| \cdot \chi(f, z)$.

Beweis. Damit $\alpha \circ f$ oder $(\alpha \circ f)^0$ nicht regulär sind, müssen die a_{ik} gewisse algebraische Bedingungsgleichungen erfüllen¹⁴), woraus insbesondere folgt, daß man die a_{ik} aus Ω so wählen kann, daß $\alpha \circ f$ und $(\alpha \circ f)^0$ beide regulär sind und außerdem $a_{n+1, n+1} \neq 0$ ist. Wir führen nun ein vorgegebenes reguläres Feld f durch eine derartige lineare Transformation α in das Feld $f' = \alpha \circ f$ über, und zwar in drei Schritten:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i = f_i \\ g_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1, k} f_k \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} h_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} g_k \\ h_{n+1} = g_{n+1} \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_i = h_i + c_i h_{n+1} \quad (i = 1, \dots, n) \\ f'_{n+1} = h_{n+1} \end{array} \right\}$$

Dabei ist gesetzt

$$c_i = \frac{a_{i, n+1}}{a_{n+1, n+1}}; \quad b_{ik} = a_{ik} - a_{n+1, k} \frac{a_{i, n+1}}{a_{n+1, n+1}} \quad (i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n).$$

Wegen $\|a_{ik}\| = a_{n+1, n+1} \cdot \|b_{ik}\|$ ist $\|b_{ik}\| \neq 0$, also ist auch das Feld (h_1, \dots, h_{n+1}) auf \bar{z} regulär. Weiter gilt für die Felder f, g, h, f' :

$$\chi(g) = \operatorname{sgn} a_{n+1, n+1} \cdot \chi(f),$$

da an jeder Nullstelle von

$$\bar{f} = \bar{g}: g_{n+1} = a_{n+1, n+1} \cdot f_{n+1} \text{ ist.}$$

$$\chi(h) = \operatorname{sgn} \|b_{ik}\| \cdot \chi(g)$$

nach A'_4

$$\chi(f') = \chi(h)$$

nach Hilfssatz 3.

Zusammen ergeben diese Formeln $\chi(f') = \operatorname{sgn} \|a_{ik}\| \cdot \chi(f)$.

¹⁴) Dies habe ich (in geometrischer Einkleidung) unter etwas allgemeineren Voraussetzungen in einer früheren Arbeit gezeigt: W. HABICHT: Topologische Eigenschaften reeller algebraischer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 122, 181–204 (1950), § 3, Satz 5a (S. 192).

Nun seien f und f' irgend zwei reguläre Felder, die auseinander durch eine nichtsinguläre affine Transformation α hervorgehen:

$$f' = \alpha \circ f.$$

Weiter sei

$$f'' = \beta \circ f' = \gamma \circ f$$

so gewählt, daß f'' , $(f'')^0$ beide regulär und die letzten Koeffizienten der zugehörigen Matrizen $b_{n+1, n+1} \neq 0$, $c_{n+1, n+1} \neq 0$ sind. Dann gilt für die Determinanten der Transformationsmatrizen $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ki}\| = \|c_{ii}\|$, andererseits ist $\chi(f'') = \operatorname{sgn} \|b_{ki}\| \cdot \chi(f') = \operatorname{sgn} \|c_{ii}\| \cdot \chi(f)$, also ist $\chi(f') = \operatorname{sgn} \|a_{ik}\| \cdot \chi(f)$.

Schließlich sei f' irgendein auf z definites, aber nicht notwendigerweise reguläres Feld und f ein reguläres Feld mit $f' = \alpha \circ f$. Dann definieren wir

$$\chi(f') = \operatorname{sgn} \|a_{ik}\| \cdot \chi(f).$$

Daß diese Definition von der Wahl von f unabhängig ist und für reguläre Felder mit der alten Definition übereinstimmt, folgt aus dem Vorigen. Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 3. Approximationssätze über Polynomfelder.

1. Unser Ziel ist, die 3 Eigenschaften C_1, C_2, C_3 für $(n+1)$ -dimensionale Felder auf n -dimensionalen Zyklen zu beweisen. Sie lassen sich alle zurückführen auf folgenden *Deformationssatz* über *Feldscharen* $f(t)$ im R^N (d. h. Felder, die vom Parameter t ganz rational abhängen): Sind auf der Parameterstrecke $0 \leq \tau \leq 1$ des reell-abgeschlossenen Körpers Ω alle $f(\tau)$ bezüglich \bar{z}^n definit, so ist $\chi(f(0), z) = \chi(f(1), z)$ (vgl. § 4, 2.). Einen ersten Schritt zum Beweis tun wir in 3. (1. Approximationssatz); dort wird der Deformationssatz „im Kleinen“ bewiesen. Damit ist man im Falle eines *archimedisch* angeordneten Körpers Ω schon fertig. Die Schwierigkeit liegt aber gerade darin, daß Ω im allgemeinen *nichtarchimedisch* angeordnet ist. Wir gehen hier folgendermaßen vor. Zu dem „allgemeinen Feld“ (vgl. 2.) F^{n+1} und dem festen Zyklus z^n gibt es eine Reihe von Feldern F_λ^n und festen Zyklen z_λ^{n-1} , so daß bei „fast allen“ Spezialisierungen $F^{n+1} \rightarrow f^{n+1}$, $F^n \rightarrow f^n$: $\chi(f^{n+1}, z^n) = \frac{1}{2} \cdot \sum_\lambda \chi(f_\lambda^n, z_\lambda^{n+1})$ gilt (§ 4, 1., Reduktionssatz). Insbesondere läßt sich jede auf \bar{z}^n definite Feldschar durch eine ebensolche approximieren, die für die Parameterwerte 0,1 mit der ersten charakteristikkgleich ist und auf $[0,1]$ nur endlich viele Ausnahmewerte besitzt, wo das Reduktionsverfahren versagt. Wendet man auf diese Werte den Deformationssatz „im Kleinen“ und auf die übrigen Intervalle Induktion nach n an, so folgt der Deformationssatz. — Wir haben also im folgenden mit Stetigkeits- und Approximationseigenschaften von Feldern und Feldscharen zu tun. In 2. werden die Stetigkeitssätze zusammengestellt, die wir nachher brauchen. In ihnen ist von Komplexen im R^N noch nicht die Rede; vom zugrundeliegenden Körper Ω brauchen wir erst die Anordnungseigenschaften, noch nicht die reelle Abgeschlossenheit.

2. Seien F_1, \dots, F_r r allgemeine Polynome vorgegebener Gradzahlen l_1, \dots, l_r in N Variablen; die Koeffizienten seien also Unbestimmte, die wir mit v_1, \dots, v_L ($L = \sum_{i=1}^r \binom{l_i + N}{N}$) durchnummerieren wollen. $F = (F_1, \dots, F_r)$

heiße ein *allgemeines* r -dimensionales Feld der vorgeschriebenen Gradzahlen. Spezialisiert man die v_j ($j = 1, \dots, L$) zu Elementen a_j des Grundkörpers Ω , so geht F über in ein spezielles Feld f . Wir fassen im folgenden f auf als Punkt $f = (a_1, \dots, a_L)$ eines affinen Koordinatenraums R^L über Ω , den wir auch als *Feldraum* (oder *Abbildungsraum*) bezeichnen. Demgemäß besteht eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(f_0)$ des Feldes $f_0 = (a_{0,1}, \dots, a_{0,L})$ aus den Feldern $f = (a_1, \dots, a_L)$ mit $\sum_j (a_j - a_{0,j})^2 < \varepsilon^2$.

Offenbar definiert das System $F = (F_1, \dots, F_r)$ eine *Polynomabbildung* des topologischen Produktes $R^L \times R^N$ in einen R^r , indem dem Punkt $f \times p$ der Punkt $(f_1(p), \dots, f_r(p))$ zugeordnet wird. Also gilt

Hilfssatz 1. Die Abbildung F von $R^L \times R^N$ in R^r ist auf jeder beschränkten Punktmenge \mathfrak{P} von $R^L \times R^N$ gleichmäßig stetig und beschränkt.

Spezialisiert man die Koeffizienten des allgemeinen Feldes F zu Polynomen des Parameters t über Ω , so entsteht eine *Feldschar* $f(t)$, welche eine rationale Kurve im R^L durchläuft. Für $t = \tau \in \Omega$ geht die Schar in ein Feld $f(\tau)$ aus R^L über. Andererseits läßt sich jede Schar $f(t)$ als Feld in $N+1$ Variablen x_1, \dots, x_N, t , also als Punkt eines affinen Koordinatenraums R^A über Ω auffassen. In diesem Sinn verstehen wir unter der ε -Umgebung $U_\varepsilon(f_0(t))$ einer Feldschar $f_0(t)$ die ε -Umgebung des Punktes $f_0(t)$ im R^A .

Hilfssatz 2. Ist $\tau \in \Omega$ beliebig, so ist die durch $f(t) \rightarrow f(\tau)$ definierte Abbildung des R^A in den R^L im R^A stetig.

Denn die Abbildung ist sogar linear.

Schließlich beweisen wir noch

Hilfssatz 3. $\Psi(F)$ sei ein Polynom in den L Variablen v_j mit Koeffizienten aus Ω . $\Psi(f) = 0$ sei hinreichend dafür, daß f eine gewisse Eigenschaft \mathfrak{E} besitzt. Dann gibt es in jeder $U_\varepsilon(f_0)$ ein Feld f , das die Eigenschaft \mathfrak{E} besitzt.

Ist nämlich g irgendein Feld mit $\Psi(g) \neq 0$, so verbinde man f_0 und g im R^L durch eine Gerade mit dem Parameter t . Auf ihr wird Ψ ein nicht identisch verschwindendes Polynom in t über Ω , das nur endlich viele Nullstellen besitzt, woraus die Behauptung folgt.

3. Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Gruppe der Approximationssätze. Sie beruhen wesentlich auf dem folgenden *Satz von der unteren Schranke*¹⁵⁾:

¹⁵⁾ W. HABICHT: Ein Existenzsatz über reelle definierte Polynome. *Comm. Math. Helv.* 18, 331–348 (1945). Der Satz wurde dort ausgesprochen für n -dimensionale Quader q^n im R^n . Er überträgt sich aber offenbar sofort auf beliebige Polyeder Π im R^N .

Seither hat A. TARSKI (A decision method for elementary algebra and geometry, University of California Press 1951, insbes. supplementary note *) einen Satz bewiesen, aus dem sich der zitierte Satz als Spezialfall ergibt. Sei nämlich eine Punktmenge des R^N , die durch endlich viele Gleichungen und Ungleichungen mit Koeffizienten aus Ω definiert ist, als algebraische Punktmenge (a. P.) bezeichnet, so gilt: die Projektion einer a. P. des R^N in einen linearen Unterraum R^M ($M \leq N$) ist wieder eine a. P. Davon ausgehend kann man leicht zeigen, daß die Projektion einer beschränkten, abgeschlossenen a. P. wieder beschränkt und abgeschlossen ist. Setzt man insbesondere $M = 1$, so folgt bei geeigneter Wahl der a. P., daß ein Polynom auf einem Polyeder des R^{N-1} sein Maximum annimmt (WEIERSTRASSscher Satz vom Maximum). Daraus folgt natürlich der oben zitierte Satz von der unteren Schranke.

Ist das Polynom φ in n Variablen über dem reell-abgeschlossenen Körper Ω auf einem Polyeder Π des R^n über Ω positiv definit, so besitzt es daselbst eine positive untere Schranke d aus Ω .

Daraus folgt sofort das

Lemma. Die Menge der bezüglich eines Polyeders Π definiten Felder ist im Feldraum offen.

Beweis. $f = (f_1, \dots, f_r)$ sei bezüglich Π definit. Dann gilt dasselbe für das Polynom $\varphi = \sum_{i=1}^r f_i^2$. Sei nun d eine positive untere Schranke für φ auf Π .

Weiter sei S eine gemeinsame obere Schranke für $|f_i(p) + f'_i(p)|$, $f'_i \in U_1(f_i)$, $p \in \Pi$ (I., Hilfssatz 1, mit $r=1$ und $\mathfrak{P} = U_1(f_i) \times \Pi$), $i=1, \dots, r$. Nach demselben Hilfssatz gibt es dann weiter eine $U_\delta(f)$ ($\delta < 1$), so daß für $f' \in U_\delta(f)$, $p \in \Pi$:

$$|f'_i(p) - f_i(p)| \leq \frac{d}{2rS} \quad (i=1, \dots, r)$$

gilt. Dann ist für $\varphi' = \sum_{i=1}^r f_i'^2$, $p \in \Pi$:

$$|\varphi'(p) - \varphi(p)| = \left| \sum_{i=1}^r (f'_i + f_i)(f'_i - f_i) \right| \leq S \cdot \sum_{i=1}^r |f'_i - f_i| \leq \frac{d}{2},$$

also $\varphi'(p) \geq \frac{d}{2}$, d. h. f' ist auf Π immer noch definit.

Eine Feldschar $f(t)$ heiße definit auf $\Pi \times [0, 1]$, wenn für alle τ mit $0 \leq \tau \leq 1$ aus Ω die Felder $f(\tau)$ auf Π definit sind. Anwendung des Lemmas auf $\Pi \times [0, 1]$ liefert dann ohne weiteres den

Zusatz. Die Menge der auf $\Pi \times [0, 1]$ definiten Feldscharen ist im Raum R^A der Feldscharen offen.

Eine Umgebung eines Feldes f (bzw. einer Feldschar $f(t)$), in der alle Felder f' (bzw. $f'(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$) definit sind, heiße eine *Definitheitsumgebung* des Feldes (bzw. der Feldschar).

4. Nun sei f ein $(n+1)$ -dimensionales Feld, z ein n -Zyklus. Dann gilt

Satz 4 (1. Approximationssatz).

Ist f auf \bar{z} definit, so besitzt f eine Definitheitsumgebung, innerhalb welcher die Charakteristik $\chi(f, z)$ sich nicht ändert.

Beweis. Im Fall $n=0$ besteht z aus einer algebraischen Summe von Punkten, $z = \sum_{\lambda=1}^l c_\lambda p_\lambda$, und es ist $\chi(f, z) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^l c_\lambda \operatorname{sgn} f(p_\lambda)$. Die Behauptung folgt dann direkt aus Hilfssatz 1 (2.).

Der Satz sei schon bewiesen für die Dimension $n-1$. Wir setzen zunächst voraus, daß f auf \bar{z} regulär sei. Seien p_1, \dots, p_l die Nullstellen der Projektion \bar{f} auf \bar{z} . Zu diesen seien die zueinander punktfremden Ketten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ einer Unterteilung $d(z)$ von z wie beim Beweis von Hilfssatz 1 in § 2, 8. so konstruiert, daß f_{n+1} auf $\bar{\Gamma}_\lambda$ definit und $\operatorname{sgn} f_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda) = \operatorname{sgn} f_{n+1}(p_\lambda)$ ist ($\lambda=1, \dots, l$). Dann gilt

$$(8) \quad \chi(f, z) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^l \chi(\bar{f}, \partial(\Gamma_\lambda)) \operatorname{sgn} f_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda).$$

Ist D die Kette $d(z) = \Gamma_1 - \dots - \Gamma_l$, so ist \bar{f} auf \bar{D} definit; nach dem Lemma gibt es also ein $\delta_1 > 0$ aus Ω , so daß alle Felder aus $U_{\delta_1}(\bar{f})$ auf \bar{D} definit sind. Weiter besitzt \bar{f} nach Induktionsvoraussetzung eine solche Definitheitsumgebung $U_{\delta_1}(\bar{f})$ bezüglich $\bar{\partial}(\Gamma_1) + \bar{\partial}(\Gamma_2) + \dots + \bar{\partial}(\Gamma_l)$, innerhalb welcher sämtliche Zahlen $\chi(\bar{f}, \bar{\partial}(\Gamma_\lambda))$ ($\lambda = 1, \dots, l$) konstant sind. Schließlich ist f_{n+1} auf $\bar{\Gamma}_\lambda$ ($\lambda = 1, \dots, l$) definit, also gibt es wieder nach dem Lemma ein $\delta_3 \in \Omega$, so daß alle Polynome f'_{n+1} aus $U_{\delta_3}(f_{n+1})$ auf den $\bar{\Gamma}_\lambda$ definit bleiben und die Gleichungen $\text{sgn } f'_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda) = \text{sgn } f_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda)$ ($\lambda = 1, \dots, l$) erfüllen.

Jetzt setzen wir $\delta = \frac{1}{2} \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ und betrachten ein Feld f' aus $U_\delta(f)$. f' ist auf \bar{z} definit, $\chi(f', z)$ also definiert. Ist f' auf \bar{z} nicht regulär, so läßt es sich durch eine von der Identität genügend wenig abweichende lineare Transformation¹⁶⁾ in ein auf \bar{z} reguläres Feld f'' überführen, das immer noch in $U_{2\delta}(f)$ liegt und nach dem Transformationssatz (§ 2, 8.) dieselbe Charakteristik wie f' besitzt: $\chi(f'', z) = \chi(f', z)$. Wegen der Konstruktion von δ ist f'' auf \bar{D} immer noch definit, ferner f'_{n+1} auf allen $\bar{\Gamma}_\lambda$ definit, und es gelten die Gleichungen

$$(9) \quad \text{sgn } f'_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda) = \text{sgn } f_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda), \quad (\lambda = 1, \dots, l).$$

$$(10) \quad \chi(f'', \bar{\partial}(\Gamma_\lambda)) = \chi(\bar{f}, \bar{\partial}(\Gamma_\lambda))$$

Sämtliche Nullstellen p'_μ von f'' auf \bar{z} müssen sich auf die $\bar{\Gamma}_\lambda$ verteilen, und die Anwendung von Satz 1 (§ 2, 4.) auf die $\bar{\Gamma}_\lambda$ liefert:

$$(11) \quad \begin{aligned} \chi(f'', z) &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{\mu=1}^m j(\bar{f}'', p'_\mu, z) \text{sgn } f'_{n+1}(p'_\mu) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=1}^l \chi(\bar{f}'', \bar{\partial}(\Gamma_\lambda)) \text{sgn } f'_{n+1}(\bar{\Gamma}_\lambda). \end{aligned}$$

Die Formeln (8) bis (11) ergeben zusammen $\chi(f'', z) = \chi(f, z)$; also ist auch $\chi(f', z) = \chi(f, z)$, q. e. d.

Ist schließlich das Ausgangsfeld f definit, aber nicht regulär auf \bar{z} , so transformieren wir es affin in ein reguläres Feld $\alpha \circ f$ und wenden alle obigen Überlegungen auf $\alpha \circ f$ an. Wir haben dann nur noch zu bemerken, daß α sich als lineare, also stetige Transformation im Feldraum R^L auffassen läßt. Da α Definitheit und Charakteristik erhält, so folgt Satz 4 für f , da er für $\alpha \circ f$ schon bewiesen ist.

Eine Umgebung der in Satz 4 beschriebenen Art heiße eine χ -Umgebung von f , ein Feld aus einer χ -Umgebung eine χ -Approximation von f . Aus Hilfssatz 2 (2.), dem Zusatz zum Lemma (3.) und Satz 4 folgt noch

Satz 5. Ist $f(t)$ eine auf $\bar{z} \times [0, 1]$ definite Feldschar, so gibt es eine Definitheitsumgebung $U(f(t))$, so daß für $f'(t) \in U(f(t))$ die Felder $f'(0)$ bzw. $f'(1)$ sogar χ -Approximationen von $f(0)$ bzw. $f(1)$ sind.

$U(f(t))$ heiße wieder eine χ -Umgebung von $f(t)$.

¹⁶⁾ Siehe a. a. O. ¹⁴⁾, § 3, Satz 5a (S. 192) sowie § 5, 5. (S. 199).

5. Wie in 1. bemerkt, werden wir im folgenden eine beliebige $(n+1)$ -dimensionale, bezüglich eines festen Zyklus z^n definite Feldschar durch eine ebensolche approximieren, für welche sich die Charakteristik bei allen Parameterwerten mit endlich vielen Ausnahmen durch Charakteristiken gewisser n -dimensionaler Felder bezüglich einer Reihe $(n-1)$ -dimensionaler Zyklen (der Ränder der Simplices von z^n) ausdrücken läßt. Eine Feldschar der letztgenannten Art werden wir als Normalschar bezeichnen.

Das angedeutete Reduktionsverfahren beruht auf den Resultaten zweier früherer Arbeiten, welche wir im folgenden in etwas modifizierter Gestalt als „Satz S_n “ ($n \geq 2$) bzw. „Satz S_1 “ zitieren¹⁷⁾.

Sei Ω ein angeordneter Körper und zunächst $n \geq 2$, F ein Feld von $n+1$ allgemeinen Polynomen in n Variablen mit unbestimmten Koeffizienten v , (vgl. 2. mit $N = n$), $\Gamma[v]$ der Ring der Polynome in den v über dem rationalen Zahlenkörper Γ .

Satz S_n .

Zu F gibt es ein n -dimensionales Feld \tilde{F} in den n Variablen mit Koeffizienten aus $\Gamma[v]$ und ein Polynom $\Phi(v)$ aus $\Gamma[v]$ mit folgenden Eigenschaften:

Ist bei einer Spezialisierung der v_i in Ω : $\Phi(v) \neq 0$, so haben die spezialisierten Felder \tilde{f} , \tilde{f} im R^n nur einfache Nullstellen, und zwar genau die gleichen; in jeder solchen Nullstelle p gilt

$$(11_n) \quad \operatorname{sgn} \Delta(\tilde{f}) \operatorname{sgn} f_{n+1} = \operatorname{sgn} \Delta(\tilde{f}).$$

Der Fall $n = 1$ spielt eine Ausnahmepolle. Er konnte in der zitierten Arbeit insofern allgemeiner behandelt werden als der Fall $n \geq 2$, als dort der Indexbegriff ohne Voraussetzung der Einfachheit der betrachteten Nullstelle eingeführt werden konnte. Es gilt dann mit denselben Bezeichnungen wie in Satz S_n :

Satz S_1 .

Zu $F = (\bar{F}, F_2)$ gibt es eine endliche Kette von Polynomen \tilde{F}_i ($i = 1, \dots, s$) mit Koeffizienten aus $\Gamma[v]$ und ein Polynom $\Phi(v)$ mit folgenden Eigenschaften:

Ist bei einer Spezialisierung der v_i in Ω : $\Phi(v) \neq 0$, so gilt in jedem Punkt des R^1 für das spezialisierte Feld $f = (\tilde{f}, f_2)$ (y bedeutet irgendeine orientierte Trägerstrecke des Punktes):

$$(11_1) \quad -j(\tilde{f}, p, y) \operatorname{sgn} f_2 = w(p_2) - w(p_1);$$

dabei ist $p_2 - p_1 = \partial(\Gamma_s)$ der Rand einer mit y gleichorientierten Teilstrecke von y , die p , aber keine andere Nullstelle eines Kettenpolynoms enthält, und w

¹⁷⁾ Satz S_1 : W. HABICHT: Eine Verallgemeinerung des STURMSchen Wurzelzählverfahrens. Comm. Math. Helv. 21, 99—116, § 3 (1948).

Satz S_n ($n \geq 2$): W. HABICHT: Zur inhomogenen Eliminationstheorie. Comm. Math. Helv. 21, 79—98, § 3 (1948). Der Buchstabe n deute an, daß es sich bei Satz S_n um das n -dimensionale Analogon zum verallgemeinerten STURMSchen Satz S_1 handelt.

die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Kette (wobei Nullen bei der Zählung wegzulassen sind)¹⁹⁾.

Für $\Phi(v)$ kann man dabei setzen $\Phi(v) = v_1 v_2 R(v)$, wobei v_1 und v_2 die höchsten Koeffizienten der beiden Komponenten von F , $R(v)$ deren SYLVESTERsche Resultante bedeuten.

Geht f aus F durch Spezialisierung der v hervor und verschwindet Φ bei dieser Spezialisierung nicht, so heiße f *reduzibel*. Geht eine Schar $f(t)$ aus F durch Spezialisierung der v in $\Omega[t]$ mit $\Phi(t) \neq 0$ hervor, so heiße sie ebenfalls *reduzibel*. Zu einer reduziblen Schar gehört nach Satz S_n bzw. S_1 eine Schar $\tilde{f}(t)$ von n -dimensionalen Feldern bzw. eine Kette von Polynomscharen $\tilde{f}_i(t)$ ($i = 1, \dots, s$), die für alle Parameterwerte τ aus Ω mit höchstens endlich vielen Ausnahmen in der durch Satz S_n bzw. S_1 beschriebenen Weise mit $f(\tau)$ zusammenhängt.

6. Sei nun $f(t)$ eine $(n+1)$ -dimensionale Feldschar in N Variablen über Ω , $\tilde{f}(t)$ ihre Projektion, C eine n -Kette im R^N , y_λ ($\lambda = 1, \dots, l$) die n -Simplexes von $|C|$ und $y_{\lambda\mu}$ ($\lambda = 1, \dots, l$; $\mu = 1, \dots, n+1$) ihre $(n-1)$ -dimensionalen Randsimplices. Wir setzen $(f(t))_{y_\lambda} = \tilde{f}_{(\lambda)}(t)$ resp. $(\tilde{f}(t))_{y_{\lambda\mu}} = \tilde{f}_{(\lambda\mu)}(t)$ und definieren:

Definition 3. $f(t)$ heiße eine *Normalschar* bezüglich C , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle Scharen $\tilde{f}_{(\lambda)}(t)$ sind *reduzibel*.
2. Für alle Parameterwerte mit endlich vielen Ausnahmen ist $\tilde{f}_{(\lambda\mu)}(\tau)$ auf $y_{\lambda\mu}$ *definit* ($\lambda = 1, \dots, l$; $\mu = 1, \dots, n+1$).

Wir gehen nun in den Scharraum R^A und beweisen:

Satz 6 (2. Approximationssatz).

In jeder Umgebung einer $(n+1)$ -dimensionalen Schar gibt es eine *Normalschar* bezüglich C .

Beweis. Nach Hilfssatz 3 von 2. genügt es, zu einer allgemeinen Schar $F(t)$ mit unbestimmten Koeffizienten u ein Polynom $\mathcal{P}(u)$ über Ω zu konstruieren, dessen Nichtverschwinden bei Spezialisierung der u hinreichend ist für die Normalität der spezialisierten Schar.

Dazu gehen wir aus von einem allgemeinen Feld F in N Variablen mit unbestimmten Koeffizienten v ; aus ihm gehe $F(t)$ dadurch hervor, daß man die v zu allgemeinen Polynomen in t mit unbestimmten Koeffizienten u spezialisiert. — Wir bilden nun erstens die Beschränkungen F_{y_λ} und $(F(t))_{y_\lambda}$ für jedes λ . F_{y_λ} ist offenbar wieder ein *allgemeines* Feld in n Variablen, dessen

¹⁹⁾ Diese Formulierung von 11, gilt zwar nur für reell-abgeschlossene Körper (bei der Definition der rechten Seite wurde, genau wie bei der Indexdefinition der Satz von BOLZANO-KRONECKER, der BOLZANO-WEIERSTRASS'sche Nullstellensatz stillschweigend benutzt); sie hat aber den Vorteil, daß sie sich dann auch gleich über eine ganze Strecke „integrieren“ läßt, wie dies ja beim klassischen STURM'schen Satz auch geschieht.

Man könnte natürlich für (11) auch eine Formulierung geben, die die reelle Abgeschlossenheit nicht benutzt, da sich sowohl $j(\tilde{f}, p, y)$ als auch die rechte Seite durch die Vorzeichen der Ableitungen der Kettenpolynome in p ausdrücken lassen.

Koeffizienten $w_{(\lambda)}$ ganz rational von den v mit Koeffizienten aus Ω abhängen; zu F_{y_λ} können wir deshalb nach Satz S_n bzw. S_1 das nicht identisch verschwindende Polynom $\Phi(w_{(\lambda)}) = \Phi_\lambda(v)$ mit Koeffizienten aus Ω bilden. Bei der Spezialisierung von F zu $F(t)$ gehen die $\Phi_\lambda(v)$ über in Polynome $\Phi_\lambda(u, t)$ in t mit Koeffizienten aus $\Omega[u]$, deren Absolutglieder nicht verschwinden, da $F(0)$ wieder ein allgemeines Feld ist. — Zweitens bilden wir die Beschränkungen $\bar{F}_{y_{\lambda\mu}}$ und $(\bar{F}(t))_{y_{\lambda\mu}}$ für jedes Paar (λ, μ) . Da $\bar{F}_{y_{\lambda\mu}}$ ein System von n allgemeinen Polynomen in $n-1$ Variablen ist, verschwindet seine SYLVESTERsche Resultante $R(w_{(\lambda\mu)}) = R_{\lambda\mu}(v)$ nicht identisch. Bei der Spezialisierung von F zu $F(t)$ gehen die $R_{\lambda\mu}(v)$ ebenfalls in Polynome $R_{\lambda\mu}(u, t)$ in t mit Koeffizienten aus $\Omega[u]$ und nichtverschwindenden Absolutgliedern über. Wir setzen nun

$$\Psi(u) = \prod_{\lambda} \Phi_{\lambda}(u, 0) \prod_{\lambda, \mu} R_{\lambda\mu}(u, 0).$$

Verschwindet Ψ bei einer Spezialisierung der u in Ω nicht, so verschwindet keiner der rechtsstehenden Faktoren, also auch keines der spezialisierten Polynome $\Phi_{\lambda}(t)$, $R_{\lambda\mu}(t)$. Das ist aber hinreichend für die Normalität der spezialisierten Schar $f(t)$.

§ 4. Der Deformationssatz.

1. Satz 7 (Reduktionssatz).

$C = \sum_{\lambda=1}^l c_{\lambda} y_{\lambda}$ sei eine n -Kette, $f(t)$ eine $(n+1)$ -dimensionale Normalschar bezüglich C im R^N über dem reell-abgeschlossenen Körper Ω . Dann gibt es l n -dimensionale Scharen $\bar{f}_{(\lambda)}(t)$ bzw. für $n=1$: Scharketten $K_{(\lambda)}(t)$, so daß für alle Parameterwerte mit höchstens endlich vielen Ausnahmen:

$$\psi(f(\tau), C) = - \sum_{\lambda=1}^l c_{\lambda} \cdot \chi(\bar{f}_{(\lambda)}(\tau), \partial(y_{\lambda}))$$

$$\text{bzw. für } n=1 \quad \psi(f(\tau), C) = + \sum_{\lambda=1}^l c_{\lambda} w(K_{(\lambda)}(\tau), \partial(y_{\lambda})) \text{ gilt.}$$

Beweis: Für alle Parameterwerte mit endlich vielen Ausnahmen sind die Felder $f_{(\lambda)}(\tau)$ reduzibel und die $\bar{f}_{(\lambda)}(\tau)$ auf $\partial(y_{\lambda})$ definit. Dann folgt aber aus Satz S_n ($n \geq 2$) bzw. Satz S_1 in Verbindung mit den Sätzen 2 und 1 (§ 2, 4.):

$$\begin{aligned} \psi(f(\tau), C) &= \sum_{\lambda} c_{\lambda} \cdot \psi(f(\tau), y_{\lambda}) = - \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left(\sum_{\mu} j(\bar{f}(\tau), p_{\lambda\mu}, y_{\lambda}) \operatorname{sgn} f_{n+1}(p_{\lambda\mu}) \right) \\ &= - \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left(\sum_{\mu} \operatorname{sgn} \Delta \bar{f}_{(\lambda)}(\tau, p_{\lambda\mu}) \cdot \operatorname{sgn} f_{(\lambda), n+1}(\tau, p_{\lambda\mu}) \right) \\ &= - \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left(\sum_{\mu} \operatorname{sgn} \Delta \dot{f}_{(\lambda)}(\tau, p_{\lambda\mu}) \right) = - \sum_{\lambda} c_{\lambda} \cdot \chi(\dot{f}_{(\lambda)}, \partial(y)) \end{aligned}$$

resp. für $n=1$:

$$\begin{aligned} \psi(f(\tau), C) &= - \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left(\sum_{\mu} j(\bar{f}(\tau), p_{\lambda\mu}, y_{\lambda}) \operatorname{sgn} f_2(\tau, p_{\lambda\mu}) \right) \\ &= + \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left(\sum_{\mu} (w(K_{(\lambda)}, p_{\lambda\mu, 2}) - w(K_{(\lambda)}, p_{\lambda\mu, 1})) \right) \\ &= + \sum_{\lambda} c_{\lambda} \cdot w(K_{(\lambda)}, \partial(y_{\lambda})). \end{aligned}$$

Dabei durchläuft $p_{\lambda\mu}$ jeweils die auf \bar{y}_λ gelegenen Nullstellen von $\bar{f}_{(\lambda)}(\tau)$.

2. z sei ein fester n -Zyklus, f und f^* zwei auf \bar{z} definite Felder im R^N .

Definition 4. f und f^* heißen bezüglich z homotop¹⁹⁾, wenn sie sich so in eine Feldschar $f(t)$ einbetten lassen: $f = f(0)$, $f^* = f(1)$, daß $f(\tau)$ für $0 \leq \tau \leq 1$ auf \bar{z} definit ist.

Deformationssatz.

Sind zwei Felder f und f^* auf \bar{z} homotop, so haben sie bezüglich z dieselbe Charakteristik.

Beweis. Der Satz ist richtig für die Dimension $n = 0$, denn dann besteht ein Zyklus aus einer algebraischen Summe von Punkten des R^N ; in jedem von diesen wird $f(t)$ ein Polynom in t , das für $0 \leq \tau \leq 1$ nicht verschwindet, also nach dem Nullstellensatz von BOLZANO-WEIERSTRASS sein Vorzeichen beibehält.

Der Satz sei schon bewiesen für die Dimension $n - 1$. Wir betrachten zuerst den Fall $n \geq 2$. $f(t)$ sei eine Schar, so daß $f(0) = f$, $f(1) = f^*$ und $f(\tau)$ für $0 \leq \tau \leq 1$ auf \bar{z} definit ist. Nach Satz 5 (§ 3, 4.) und dem 2. Approximationssatz (§ 3, 6.) gibt es eine Normalschar $f'(\tau)$, welche für $\tau = 0$ und $\tau = 1$ mit der ursprünglichen Schar charakteristigleich und für $0 \leq \tau \leq 1$ auf \bar{z} ebenfalls definit ist. Es genügt deshalb, zu beweisen: Ist $f(t)$ eine Normalschar bzw. z und $f(\tau)$ für $0 \leq \tau \leq 1$ auf \bar{z} definit, so ist $\chi(f(0)) = \chi(f(1))$. Dies ergibt sich folgendermaßen. Seien τ_j ($j = 1, \dots, q$) die endlich vielen Punkte des Intervalls $0 \leq \tau \leq 1$, für welche $f(\tau_j)$ nicht normal bezüglich z ist. Für jedes j ist $f(\tau_j)$ auf \bar{z} definit, besitzt also nach dem 1. Approximationssatz (§ 3, 4.) eine χ -Umgebung $U(f(\tau_j))$. Da $f(t)$ als variabler Punkt im Feldraum stetig von t abhängt, gibt es ein $\delta > 0$ aus Ω , so daß für $|\tau - \tau_j| < \delta$: $f(\tau) \subset U(f(\tau_j))$ ($j = 1, \dots, q$). Wir nehmen aus dem Parameterintervall $0 \leq \tau \leq 1$ die Teilintervalle $|\tau - \tau_j| \leq \delta$, in welchem $\chi(f(\tau), z)$ konstant bleibt, heraus.

Sei $T_1 < \tau < T_2$ irgendeines der übrigbleibenden Intervalle. Nach dem Reduktionssatz bilden wir zu $f(t)$ die n -dimensionalen Scharen $\dot{f}_{(\lambda)}(t)$. Für $T_1 \leq \tau \leq T_2$ ist $f(\tau)$ Normalfeld, also $\dot{f}_{(\lambda)}(\tau)$ auf $\bar{\partial}(y_\lambda)$ definit; folglich sind $\dot{f}_{(\lambda)}(T_1)$ und $\dot{f}_{(\lambda)}(T_2)$ bezüglich $\partial(y_\lambda)$ homotop. Aus der Induktionsvoraussetzung und dem Reduktionssatz folgt also nach Division durch 2: $\chi(f(T_1), z) = \chi(f(T_2), z)$. Zusammensetzung aller Teilintervalle ergibt die Behauptung.

Im Fall $n = 1$ gehen wir zunächst wieder zu einer für $0 \leq \tau \leq 1$ definierten Normalschar $f(t)$ über und bilden zu ihr nach dem Reduktionssatz die Scharketten $K_{(\lambda)}(t)$. Ist p einer der beiden Punkte, aus denen $\partial(y_\lambda)$ besteht, so geht $K_{(\lambda)}(t)$ in p über in eine Polynomkette in der Variablen t über Ω . Die Vorzeichenfunktion $w(K_{(\lambda)}(t), p)$ kann sich nur an denjenigen Parameterstellen $t = \theta_i$ ändern, wo eines der nicht identisch verschwindenden Polynome dieser Kette das Vorzeichen wechselt. Man wiederhole diese Überlegung für alle Ketten $K_{(\lambda)}(t)$ auf $\partial(y_\lambda)$ und nummeriere alle so erhaltenen singulären Parameterstellen durchlaufend: $\theta_1, \dots, \theta_p$. Jetzt bestimme man wie oben

¹⁹⁾ Genauer: Die Abbildungen f und f^* von z sind homotop in $S^{n+1} - 0$ (S^{n+1} der Bildraum, 0 sein Ursprung).

die Parameterwerte τ_1, \dots, τ_q , in denen $f(\tau)$ nicht normal bezüglich z ist, und füge zu ihnen noch die Werte $\Theta_1, \dots, \Theta_p$ hinzu²⁰). Von hier an geht der Beweis wie oben, indem man auf die übrigbleibenden Intervalle den Reduktionssatz anwendet.

3. Im folgenden bedienen wir uns der vektoriellen Schreibweise. Da sich ein Feld als variabler Vektor auffassen läßt, ist klar, was man unter der linearen Verbindung und dem inneren Produkt zweier Felder zu verstehen hat. f und f^* bedeuten immer $(n+1)$ -dimensionale Felder, z einen n -Zyklus.

Aus dem Deformationssatz ergeben sich ohne weiteres in bekannter Weise die grundlegenden Sätze der Abbildungstheorie für Polynomabbildungen²¹).

Satz 8 (Satz von POINCARÉ-BOHL).

f und f^* seien auf \bar{z} definit und in keinem Punkt von z entgegengesetzt gerichtet. Dann ist $\chi(f, z) = \chi(f^*, z)$.

Beweis. Wir bilden die Schar $f(t) = (1-t)f + tf^*$. Es ist $f(0) = f$, $f(1) = f^*$. Für jedes τ mit $0 \leq \tau \leq 1$ ist $f(\tau)$ auf \bar{z} definit, denn nach Voraussetzung kann in keinem Punkt von \bar{z} : $\tau \cdot f^* = -(1-\tau)f$ sein. Also sind f und f^* bezüglich z homotop, und die Behauptung folgt aus dem Deformationssatz.

Als Anwendungen von Satz 8 beweisen wir nun die Eigenschaften C_1 und C_2 für die Dimension $n+1$ (cf. § 2, 2.).

Beweis von C_1 . Wäre in einem Punkt von \bar{z} $f^* = 0$ oder f und f^* entgegengesetzt gerichtet, d. h. $f^* = -\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \Omega$, $\lambda \geq 0$), so wäre in diesem Punkt das innere Produkt $(f^* - f, f^* - f) = (1+\lambda)^2 \cdot (f, f) \geq (f, f)$, entgegen der Voraussetzung. — Nun wende man Satz 8 an.

Beweis von C_2 . Die Felder $f' = (\text{sgn } \varphi \cdot f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ und $f^* = (\varphi \cdot f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ sind auf \bar{z} definit und in keinem Punkt von \bar{z} entgegengesetzt gerichtet. Nach dem Transformationssatz (§ 2, 8., Satz 3), angewandt auf die sehr spezielle Transformation $f \rightarrow f'$ und Satz 8 folgt also

$$\chi(f, z) = \text{sgn } \varphi \cdot \chi(f', z) = \text{sgn } \varphi \cdot \chi(f^*, z), \text{ q. e. d.}$$

4. Es bleibt noch C_3 nachzuweisen. C_3 ist, wie wir unten sehen werden, äquivalent mit

Satz 9 (Kroneckerscher Abbildungssatz).

Ist C eine $(n+1)$ -Kette im R^N , f ein $(n+1)$ -dimensionales, auf \bar{C} definites Feld, so ist $\chi(f, \partial(C)) = 0$.

Beweis. Sei $C = \sum_{\lambda=1}^l c_\lambda y_\lambda$, also $\partial(C) = \sum_{\lambda=1}^l c_\lambda \cdot \partial(y_\lambda)$ ($c_\lambda \neq 0$, $\lambda = 1, \dots, l$).

Dann ist wegen A_1 (§ 2, 5.): $\chi(f, \partial(C)) = \sum_{\lambda=1}^l c_\lambda \cdot \chi(f, \partial(y_\lambda))$. Es genügt deshalb, Satz 9 für Simplices $C = y$ zu beweisen.

²⁰) Man überlegt sich übrigens leicht, daß die τ_i schon unter den Θ_k vorkommen.

²¹) Vgl. im folgenden: P. ALEXANDROFF-H. HOFF: Topologie (Grundlehren XLV, 1935), Kap. XII (459—493).

f sei also auf \bar{y} definit und p sei ein beliebiger Punkt im Innern von \bar{y} . y_δ entstehe aus y durch Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum p und dem Ähnlichkeitsverhältnis δ .

Ist $f_0 \neq 0$ das konstante Feld, das im Punkte p mit f zusammenfällt, so ist für einen beliebigen n -Zyklus z : $\chi(f_0, z) = 0$. Wählt man nun $\delta > 0$ aus Ω so klein, daß in \bar{y}_δ : $(f - f_0, f - f_0) < (f_0, f_0)$ bleibt, so folgt aus C_1 : $\chi(f, \partial(y_\delta)) = \chi(f_0, \partial(y_\delta)) = 0$.

Wir betrachten jetzt folgende Schar von Ähnlichkeitsabbildungen im R^N :

$$\alpha(t): x'_i = x_i + (1 - \delta)t \cdot (p_i - x_i) \quad (i = 1, \dots, N).$$

$\alpha(0)$ ist die Identität, $\alpha(1)$ führt y in y_δ , $\partial(y)$ in $\partial(y_\delta)$ über. Das Feld f ist für $0 \leq \tau \leq 1$ auf $\alpha(\tau)(\partial(y)) \subset \bar{y}$ definit, also ist die Feldschar $g(t) = f \circ \alpha(t)$ für $0 \leq \tau \leq 1$ auf $\partial(y)$ definit. Also gilt nach A_3 (§ 2, 2.) und dem Deformationsatz:

$$\begin{aligned} \chi(f, \partial(y)) &= \chi(f, \alpha(0)(\partial(y))) = \chi(f \circ \alpha(0), \partial(y)) \\ &= \chi(f \circ \alpha(1), \partial(y)) = \chi(f, \alpha(1)(\partial(y))) = \chi(f, \partial(y_\delta)) = 0, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Beweis von C_3 . Die Voraussetzung $z_1 \sim z_2$ (bzw. $\Pi - \mathfrak{P}$) bedeutet nach § 1, 5. die Existenz einer $(n+1)$ -Kette C' einer gemeinsamen Triangulation K' von Π , \bar{z}_1 und \bar{z}_2 , so daß f auf \bar{C}' definit ist und für die durch K' bewirkten Unterteilungen z'_1, z'_2 von z_1 und z_2 : $z'_1 - z'_2 = \partial(C')$ gilt. Aus A_1, A_2 (§ 2, 2.) folgt dann nach Satz 9:

$$\begin{aligned} \chi(f, z_2) - \chi(f, z_1) &= \chi(f, z'_2) - \chi(f, z'_1) \\ &= \chi(f, z'_2 - z'_1) = \chi(f, \partial(C')) = 0, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Damit haben wir alle Eigenschaften von Indikator und Charakteristik für die Dimension $n+1$ nachgewiesen, so daß sich nun tatsächlich alle eingeführten Begriffe und deren Eigenschaften rekursiv definieren und beweisen lassen.

§ 5. Einige Anwendungen.

1. Der Abbildungsgrad.

Wir lassen im folgenden die Deutung eines Systems $f = (f_1, \dots, f_n)$ von n Polynomen in N Variablen mit Koeffizienten aus dem reell-abgeschlossenen Körper als *Abbildung* des R^N in einen S^n in den Vordergrund treten. Ist $C = \sum_A c_A y_A$ eine Kette im R^N , so verstehen wir unter ihrem *Bild* $f(C)$ die singuläre Kette²³⁾ $\sum_A c_A f(y_A)$ im S^n .

Besitzt f auf der n -Kette $\bar{C} = \sum_A \overline{c_A y_A}$ nur *einfache* Nullstellen, von denen keine auf einem der Ränder $\partial(y_A)$ liegt, so heiße die Summe

$$\sum_{\lambda, \mu} c_\lambda \operatorname{sgn} \Delta f_{\lambda_\mu}(p_{\lambda_\mu}),$$

erstreckt über die Nullstellen von f auf \bar{C} , die *algebraische Anzahl der Nullstellen von f bezüglich C* . Aus den Sätzen 2 und 1 (§ 2, 4.) folgt, daß diese Zahl gleich der Charakteristik $\chi(f, \partial(C))$ von f bezüglich des Randes $\partial(C)$ ist.

²³⁾ SEIFERT-THRELFALL: Lehrbuch der Topologie (1934), § 25, 26.

Ist F ein allgemeines n -dimensionales Feld, so läßt sich leicht ein nicht-verschwindendes Polynom $\Psi(v)$ in den unbestimmten Koeffizienten v des Feldes angeben, dessen Nichtverschwinden bei Spezialisierung der v hinreichend ist dafür, daß das spezialisierte Feld auf \bar{C} die beiden obigen Forderungen erfüllt²³⁾. Nach § 3, 2., Hilfssatz 3 gibt es deshalb in jeder Umgebung eines vorgelegten Feldes f ein Feld, das diese Forderungen erfüllt.

Ist nun f ein beliebiges, auf $\partial(C)$ definites Feld und $U_\delta(f)$ eine χ -Umgebung von f bezüglich $\partial(C)$ (§ 3, 4., Satz 4, eine Dimension tiefer angewandt), so definieren wir:

Definition 5.

Unter dem lokalen Grad von $f(C)$ im Nullpunkt verstehen wir die algebraische Anzahl der Nullstellen einer solchen χ -Approximation f' von f , die auf \bar{C} nur einfache Nullstellen besitzt, von denen keine auf einem der Simplices $\partial(y_\lambda)$ des $(n-1)$ -dimensionalen Gerüsts von $|C|$ liegt.

Dadurch ist der lokale Grad für alle singulären Simplices $f(C)$, für die $f(\partial(C))$ den Nullpunkt nicht enthält, eindeutig definiert, und es gilt

Satz 10. *Der lokale Grad von $f(C)$ im Nullpunkt ist gleich der Charakteristik $\chi(f, \partial(C))$ von f bezüglich des Randes $\partial(C)$.*

2. Mit Hilfe der in § 4 entwickelten Sätze lassen sich in bekannter Weise lokale topologische Eigenschaften von Polynomabbildungen entwickeln. Wir wollen als Beispiel die Gebietsinvarianz bei Polynomabbildungen beweisen. Als Operationsgebiet wählen wir ein orientiertes Simplex y^n . Da dieses bei den folgenden Betrachtungen nicht verlassen wird, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Dimension des einbettenden Raums R^N ebenfalls gleich n wählen. f bedeute also von nun an ein n -dimensionales Polynomfeld in n Variablen mit Koeffizienten aus Ω ; es definiert eine Abbildung des R^n in einen R^n .

Lemma. *Ist $j(f, p, y)$ definiert und $\neq 0$, so gibt es zu jeder ε -Umgebung $y_\varepsilon(p)$ ²⁴⁾ eine δ -Umgebung $y_\delta(f(p))$, welche in $f(y_\varepsilon(p))$ enthalten ist.*

Das Lemma besagt, daß unter der gemachten Voraussetzung f in p umgebungstreu ist.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen $f(p) = 0$. ε sei zum vornherein so klein, daß f in y_ε außer p keine weitere Nullstelle besitzt. Es ist dann $\chi(f, \partial(y_\varepsilon)) = j(f, p, y) \neq 0$. Sei d eine positive untere Schranke für (f, f) auf $\partial(y_\varepsilon)$ (vgl. Anm. 13)) und $\delta \in \Omega$ mit $0 < \delta < d$. Ist nun $f_0 \in y_\delta(0)$, so gilt auf $\partial(y_\varepsilon)$: $(f_0, f_0) < (f, f)$. Nach dem Satz von ROUCHÉ ist also

$$\chi(f - f_0, \partial(y_\varepsilon)) = \chi(f, \partial(y_\varepsilon)) \neq 0.$$

Das Feld $f - f_0$ besitzt also nach dem Satz von KRONECKER in \bar{y}_ε eine Nullstelle q , d. h. es gilt $f(q) = f_0(q) = f_0$, q. e. d.

²³⁾ Man wähle für $\psi(p)$ das Produkt der Diskriminanten der Felder F_{y_λ} und der Resultanten der Felder $F_{y_{\lambda\mu}}$.

²⁴⁾ Unter $y_\varepsilon(p)$ verstehen wir im folgenden ein orientiertes reguläres Simplex mit dem Mittelpunkt p und dem Umkugelradius ε , während $U_\varepsilon(p)$ die Vollkugel um p vom Radius ε bedeutet.

Satz 11. Ist f in der Umgebung $U_\varepsilon(p)$ eines Punktes p des R^n umkehrbar eindeutig, so enthält $f(U_\varepsilon(p))$ eine Umgebung $U_\delta(f(p))$ des Bildpunktes.

Wir führen den Beweis in 2 Schritten. r bezeichne den Rang der Funktionalmatrix des Polynomsystems f .

a) **Hilfssatz 1.** Ist $r < n$, so ist die Abbildung f in keiner Umgebung $U_\varepsilon(p)$ eines beliebigen Punktes p des R^n umkehrbar eindeutig.

Beweis. Man kann die Indices so permutieren, daß $f_1(x), \dots, f_r(x)$ algebraisch unabhängig über Ω sind. $f_s(x)$ hängt dann für $s > r$ algebraisch von ihnen ab, es gibt also ein normiertes irreduzibles Polynom $F_s(z) = z^{m_s} + c_{s1}(f_1(x), \dots, f_r(x))z^{m_s-1} + \dots + c_{sm_s}(f_1(x), \dots, f_r(x))$ mit Koeffizienten aus $\Omega(f_1(x), \dots, f_r(x))$ und $F_s(f_s(x)) = 0$. Da es in jeder Umgebung von p nach § 3, 2., Hilfssatz 3 einen Punkt p' gibt, in dem die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}$ nicht verschwindet und in dem keine der rationalen Funktionen $c_{sk}(f_1(x), \dots, f_r(x))$ ($s = r+1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m_s$) sinnlos wird, kann man annehmen, daß dies schon im Punkt p der Fall ist; weiter kann man $f(p) = 0$ als Nullpunkt im R^n annehmen. Wir halten nun s fest, etwa $s = r+1$, und operieren in den Teilräumen R^{r+1} und R^r des R^n , die durch die Gleichungen

$$R^{r+1} : \eta_{r+2} = \dots = \eta_n = 0$$

$$R^r : \eta_{r+1} = \dots = \eta_n = 0$$

definiert sind. Ist $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{r+1}) \in R^{r+1}$, so setzen wir $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r) \in R^r$.

Sei nun H die durch die Gleichung ($m_{r+1} = m$)

$$\eta_{r+1}^m + c_{r+1,1}(\eta_1, \dots, \eta_r) \eta_{r+1}^{m-1} + \dots + c_{r+1,m}(\eta_1, \dots, \eta_r) = 0$$

definierte Hyperfläche in R^{r+1} und $0, q_1, \dots, q_p$ ihre (endlich vielen) Schnittpunkte mit der Geraden $\eta_1 = \dots = \eta_r = 0$. Dann gibt es, wie leicht zu sehen, zu jedem δ_1 ein $\delta_2 > 0$ aus Ω , so daß aus $\eta \in H$ und $\bar{\eta} \in U_{\delta_1}(0)$ folgt

$$\eta \in U_{\delta_1}(q_j).$$

Zu δ_2 gibt es weiter ein $\delta_3 > 0$, so daß aus $\xi \in U_{\delta_2}(p)$ folgt $\bar{f}(\xi) = (f_1(\xi), \dots, f_r(\xi)) \in U_{\delta_1}(0)$. Da dann aber die ganze Strecke $p\xi$ in $U_{\delta_1}(p)$ liegt, muß ihr Bild bei der Abbildung $f' = (f_1, \dots, f_{r+1})$ ganz in $U_{\delta_1}(0)$ verlaufen, falls nur δ_1 so klein gewählt wird, daß die $U_{\delta_1}(q_j)$ disjunkt sind. Also ist dann auch $f'(\xi) \in U_{\delta_1}(0)$. Ist nun $\bar{f}(\xi) = 0$, so muß $f_{r+1}(\xi) = 0$ sein, da q_1, \dots, q_p alle außerhalb $U_{\delta_1}(0)$ liegen.

Macht man dies für alle s , so folgt schließlich: es gibt eine $U_\delta(p)$, so daß aus $\xi \in U_\delta(p)$ und $\bar{f}(\xi) = \bar{f}(p)$ folgt $f(\xi) = f(p)$.

Wir betrachten nun das r -dimensionale Feld \bar{f} in der Umgebung des Punktes $p = (p_1, \dots, p_n)$. Durch eine geeignete nichtausgeartete lineare Transformation im Bildraum erreicht man, daß die Entwicklung von $\bar{f} = \alpha \circ \bar{f}$ nach Potenzen von $x_i - p_i$ die Gestalt

$$\tilde{f}_i = (x_i - p_i) + \sum_{j=r+1}^n c_{ij}(x_j - p_j) + r_{ij} \quad (i = 1, \dots, r)$$

annimmt, wo die r_{ij} nur mindestens quadratische Glieder in den $x_j - p_j$ enthalten (cf. § 2, 4., Beweis von Satz 2).

Sei nun C^r die Grundkette²⁵⁾ einer Triangulation des Quaders \bar{C}^r des R^n , der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_i - \delta &\leq \xi_i \leq p_i + \delta & (i = 1, \dots, r) \\ \xi_i &= p_i + \delta^2 & (i = r+1, \dots, n) \end{aligned}$$

definiert ist, wo δ wie oben, aber außerdem so klein gewählt ist, daß $\bar{C}^r \subset U_\delta(p)$ (d. h. $\delta \leq 1$) und daß auf $\partial(C^r)$:

$$\sum_{i=1}^r (\tilde{f}_i - (x_i - p_i))^2 < \delta^2 \leq \sum_{i=1}^r (x_i - p_i)^2$$

gilt. Dann ist nach dem Satz von ROUCHÉ und der Normierungseigenschaft

$$\chi(\tilde{f}, \partial(C)) = \chi(e_C - p_C, \partial(C)) = 1,$$

also besitzt \tilde{f} auf \bar{C} nach dem KRONECKERSCHEN Abbildungssatz eine Nullstelle ξ_0 . Wegen $r < n$ ist aber $p \notin \bar{C}$, also $\xi_0 \neq p$. ξ_0 ist auch Nullstelle von \tilde{f} und liegt in $U_\delta(p)$, also ist auch $f(\xi_0) = f(p) = 0$. Da δ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung von Hilfssatz 1.

b) Hilfssatz 2. Ist $r = n$ und $f(p) = 0$, aber der Index $j(f, p, y)$ nicht definiert oder $\neq \pm 1$, so ist die Abbildung f in keiner Umgebung von p umkehrbar eindeutig.

Beweis. Ist $j(f, p, y)$ nicht definiert, so gibt es in jeder Umgebung von p eine von p verschiedene Nullstelle des Feldes f , womit dieser Fall erledigt ist. — Nun sei $j(f, p, y)$ definiert, aber $\neq \pm 1$; $y_\varepsilon(p)$ sei so klein, daß f auf $\bar{y}_\varepsilon - p$ definit ist. d sei eine positive untere Schranke für (f, f) auf $\partial(y_\varepsilon)$. Ist nun $q \in \overline{y_\varepsilon(p)}$ beliebig mit $(f(q), f(q)) < d$ und $\Delta f_\nu(q) \neq 0$ (§ 3, 2., Hilfssatz 3; wegen $r = n$ verschwindet Δf_ν nicht identisch), und ist $f(q) = f_0$ gesetzt, so ist

$\chi(f - f_0, \partial(y_\varepsilon)) = \chi(f, \partial(y_\varepsilon)) = j(f, p, y) \neq \pm 1$, aber $j(f - f_0, q, y_\varepsilon) = \text{sgn } \Delta f_\nu(q) = \pm 1$, also kann q nicht die einzige in \bar{y}_ε liegende Nullstelle des Feldes $f - f_0$ sein. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung von Hilfssatz 2.

Aus den beiden Hilfssätzen folgt: Ist f in der Umgebung $U_\varepsilon(p)$ einer Nullstelle p umkehrbar eindeutig, so ist $j(f, p, y)$ definiert und gleich ± 1 .

Damit ist Satz 11 auf das vorangehende Lemma zurückgeführt.

Satz 11 enthält den Satz von der Gebietsinvarianz für Polynomabbildungen f : Ist f auf einem Gebiet G umkehrbar eindeutig, so ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Denn aus $p \in G$ folgt für genügend kleines ε : $y_\varepsilon(p) \subset G$; nach Satz 11 gibt es ein δ , so daß $y_\delta(f(p)) \subset f(y_\varepsilon(p)) \subset f(G)$. Daß der Zusammenhang von G bei f nicht zerstört wird, ist unmittelbar einzusehen.

²⁵⁾ Dies ist die Kette, gebildet aus den „kohärent orientierten“ Simplexes der Triangulation, jedes mit dem Koeffizienten 1. $\partial(\bar{C}^r)$ ist dann der mengentheoretische Rand von C^r .

3. Zum Schluß wollen wir als Beispiel einer globalen Anwendung den in der Einleitung erwähnten Satz von POINCARÉ-BROUWER über Tangentialfelder auf Sphären beweisen.

Im R^{n+1} sei eine n -Sphäre gegeben durch die Gleichung

$$(12) \quad (x, x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0;$$

weiter sei f ein Polynomfeld im R^{n+1} , das in allen Punkten der Sphäre an diese tangential ist, d. h. daselbst die Bedingung

$$(13) \quad (f, x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i x_i = 0$$

erfüllt. Sei nun σ die stereographische Projektion der Sphäre in die Äquatorhyperebene R^n , die durch die Gleichung $x_{n+1} = 0$ gegeben ist:

$$(14) \quad u_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}} \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$x_i = \frac{2u_i}{\sum_{i=1}^n u_i^2 + 1} \quad (i = 1, \dots, n); \quad x_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^n u_i^2 + 1}.$$

Wir betrachten nun im R^n das n -dimensionale Feld g , dessen Komponenten gegeben sind durch

$$(15) \quad g_i(u) = f_i(\sigma^{-1}(u) + u_i f_{n+1}(\sigma^{-1}(u)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Es ist klar, daß jede Nullstelle $\xi \neq (0, \dots, 0, 1)$ des Feldes f auf der Sphäre vermöge σ in eine Nullstelle ω des Feldes g im R^n übergeht. Aber auch die Umkehrung ist richtig: jeder Nullstelle von g im R^n entspricht vermöge σ^{-1} eine Nullstelle von f auf der Sphäre. Denn aus $g(\omega) = 0$ folgt für $\xi = \sigma^{-1}(\omega)$:

$$(1 - \xi_{n+1}) f_i(\xi) + \xi_i f_{n+1}(\xi) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Multipliziert man die i -te dieser Gleichungen mit ξ_i und addiert, so erhält man wegen (12) und (13):

$$(\xi_{n+1}^2 - \xi_{n+1}) f_{n+1} + (1 - \xi_{n+1}^2) f_{n+1} = (1 - \xi_{n+1}) f_{n+1} = 0,$$

woraus wegen $1 - \xi_{n+1} > 0$: $f_{n+1} = 0$ und daraus weiter $f_i = 0$ für alle i .

Das Feld $g(u)$ ist kein Polynomfeld; man kann es aber durch Multiplikation mit einem in den u definiten Faktor c^m , wo

$$(16) \quad c = \sum_{i=1}^n u_i^2 + 1$$

und m eine genügend große natürliche Zahl ist, in ein solches verwandeln. Wir setzen also

$$(17) \quad h_i(u) = c^m g_i(u) \quad (i = 1, \dots, n);$$

dann hat das Polynomfeld $h(u)$ im R^n genau die gleichen Nullstellen wie das Feld $g(u)$.

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir nun

Satz 12 (Satz von POINCARÉ-BROUWER).

Ist f ein Tangentialfeld an die n -Sphäre (12) und n gerade, so besitzt f auf der Sphäre eine Nullstelle ξ .

Beweis. Wir können voraussetzen, daß der „Nordpol“ $(0, \dots, 0, 1)$ der Sphäre nicht Nullstelle von f ist. f_{n+1} verschwindet im Nordpol; nach Ausübung einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation auf die f_1, \dots, f_n und der kontragredienten Transformation auf x_1, \dots, x_n unter Festhaltung von f_{n+1} und x_{n+1} , die wir uns zum vornherein ausgeführt denken, kann man weiterhin voraussetzen, daß das Feld im Nordpol die Gestalt

$$f_1 = 1, f_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

annimmt. Wir bilden nun zu f wie oben das Feld $h(u)$ im R^n ; nach dem oben Gesagten genügt es zu beweisen, daß $h(u)$ für gerades n eine Nullstelle besitzt.

Dazu entwickeln wir f im Nordpol nach Potenzen von $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - 1$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 & (\text{mod. } (x_1, \dots, x_n, (x_{n+1} - 1))) \\ f_i(x) &= 0 & (\text{mod. } (x_1, \dots, x_n, (x_{n+1} - 1))) \\ & & (i = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

$$f_{n+1}(x) \equiv -x_1 \pmod{(x_1, \dots, x_n, (x_{n+1} - 1))^2}.$$

Hieraus ergibt sich unter Benützung von (14), (15), (16) und (17)

$$\begin{aligned} h(u) &= h^0(u) + r(u), \\ r(u) &= c^{m \cdot c} \cdot s\left(\frac{u_1}{c}, \dots, \frac{u_n}{c}, \frac{1}{c}\right), \\ h^0(u) &= c^{m-1} \cdot (-u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2), \\ h_i^0(u) &= -c^{m-1} \cdot (2u_i u_1) \quad (i = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet r ein Polynomfeld in den u , s ein solches in der angegebenen Variablenreihe, und zwar mit $\lim_{c \rightarrow \infty} c \cdot s = 0$. Nun ist

$$(h^0(u), h^0(u)) = c^{2(m-1)} (c-1)^2$$

und deshalb in allen Punkten des Randes $\bar{\partial}(y)$ eines genügend großen n -Simplexes y im R^n

$$(r, r) < (h^0, h^0);$$

nach dem Satz von ROUCHÉ ist also

$$\chi(h, \partial(y)) = \chi(h^0, \partial(y)).$$

Die letztgenannte Charakteristik ist bis aufs Vorzeichen gleich derjenigen des quadratischen Feldes k^0 , dessen Komponenten durch

$$\begin{aligned} k_1^0 &= -u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2, \\ k_i^0 &= 2u_i u_1 \quad (i = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

gegeben sind.

$\chi(k^0, \partial(y))$ ist nun aber sehr leicht zu bestimmen. Üben wir zunächst im R^n die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} u_n + u_1 &= v_1 \\ u_n - u_1 &= v_2 \\ u_i &= v_{i+1} \quad (i = 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

aus, so drückt sich k^0 in den neuen Koordinaten folgendermaßen aus:

$$(18) \quad \begin{aligned} k_1^0 &= v_1 v_2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 \\ k_i^0 &= (v_1 - v_2) v_{i+1} \quad (i = 2, \dots, n-1) \\ k_n^0 &= \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2). \end{aligned}$$

Ist weiter $y^{n-1} = (a_1, \dots, a_n)$ das orientierte $(n-1)$ -Simplex, dessen Kantenvektoren $\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_n}$ die letzten $n-1$ Grundvektoren und dessen Ecke a_1 der Nullpunkt des Koordinatensystems ist, so nehmen wir in seinem Innern irgendeinen Punkt p , verschieben y^{n-1} zuerst in seiner Hyperebene so, daß p in den Nullpunkt rückt, und verschieben es dann noch parallel zur v_1 -Axe um den Betrag 1 einmal in der einen, das andere Mal in der entgegengesetzten Richtung. Bezeichnen wir die beiden so erhaltenen orientierten Simplexes mit y_1^{n-1} bzw. y_{-1}^{n-1} , so schneidet die v_1 -Axe diese in je einem Punkt p_1 bzw. p_{-1} , und aus der Normierungseigenschaft B (§ 2, 2.) folgt für das Feld $\bar{v} = (v_2, \dots, v_n)$ sofort

$$(19) \quad \chi(\bar{v}, p_1, y_1^{n-1}) = \chi(\bar{v}, p_{-1}, y_{-1}^{n-1}) = 1.$$

Man konstruiere nun im R^n ein Prisma Π mit der „Grundfläche“ y_{-1}^{n-1} und der „Deckfläche“ y_1^{n-1} . Man kann dann leicht eine Triangulation $|C|$ von Π mit der Grundkette C angeben, so daß y_1^{n-1} , y_{-1}^{n-1} in $\partial(C)$ mit den Koeffizienten 1 und -1 auftreten.

Nun ist aber 0 die einzige Nullstelle von k^0 und $\partial(y) \sim \partial(C)$ (bzw. $R^n - 0$), also nach C_2 (Satz von BOLZANO-KRONECKER):

$$\chi(k^0, \partial(y)) = \chi(k^0, \partial(C)) = j(\bar{k}^0, p_{-1}, y_{-1}^{n-1}) - j(\bar{k}^0, p_1, y_1^{n-1});$$

denn die einzigen Nullstellen von \bar{k}^0 auf $\partial(C)$, an denen k_n^0 positiv ist, sind p_{-1} und p_1 ; die Charakteristik ist aber die negative Summe der Indices von \bar{k}^0 an den Nullstellen, an denen k_n^0 positiv ist. Nun lautet aber die Entwicklung von \bar{k}^0 im Punkte $p_1 = (1, 0, \dots, 0)$:

$$\bar{k}^0 \equiv \bar{v} \quad (\text{mod. } (v_2, \dots, v_n)^2)$$

und im Punkte $p_{-1} = (-1, 0, \dots, 0)$:

$$\bar{k}^0 \equiv -\bar{v} \quad (\text{mod. } (v_2, \dots, v_n)^2),$$

woraus nach dem Satz von ROUCHÉ, dem Transformationssatz A_3 und (19) folgt

$$\begin{aligned} j(\bar{k}^0, p_{-1}, y_{-1}^{n-1}) - j(\bar{k}^0, p_1, y_1^{n-1}) &= j(-v, p_{-1}, y_{-1}^{n-1}) - j(v, p_1, y_1^{n-1}) \\ &= (-1)^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Ist nun n gerade, so folgt also

$$\chi(h, \partial(y)) = \chi(h^0, \partial(y)) = -\chi(k^0, \partial(y)) = 2;$$

nach dem KRONECKERSchen Abbildungssatz hat also h im R^n mindestens eine Nullstelle, womit der Beweis fertig ist.

(Eingegangen am 15. Januar 1953.)

Über den Zusammenhang der EISENSTEINSchen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen.

Von
BRUNO SCHOENEBOEG in Hamburg.

Die von E. HECKE begründete Theorie der EISENSTEINSchen Reihen höherer Stufe¹⁾ und seine Neubegründung und Erweiterung der Theorie der binären Thetareihen²⁾, die sich für die Weiterentwicklung der elliptischen Modulfunktionen als unentbehrlich erwiesen haben, sollen im folgenden auf einige spezielle Fragen angewandt werden. Ich werde zeigen, wie man mit Hilfe der EISENSTEINSchen Reihen die Hauptfunktionen zu Kongruenzgruppen des Geschlechts $p = 0$, wenn die Anzahl der Spitzen des Fundamentalbereichs mindestens drei ist, konstruieren und wie man durch sie die Funktionen $\Delta_\lambda(\tau) = \sqrt[\lambda]{\Delta(\tau)}$, $\lambda \mid 12$, ausdrücken kann (§ 1). Außerdem werde ich einen Zusammenhang zwischen den EISENSTEINSchen Reihen beliebiger fester Stufe, aber verschiedener Dimensionen aufzeigen. In § 2 gebe ich eine Darstellung der Funktionen $\Delta_\lambda(\tau)$ durch die verallgemeinerten binären Thetareihen, die zwar im wesentlichen bekannt ist, hier aber in einer invarianten Form erscheint, aus der man für $\lambda > 2$ das Eulerprodukt der zugeordneten Dirichlet-Reihen und eine Abschätzung ihrer Koeffizienten abliest. In § 3 zeige ich einen Zusammenhang der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von $2k$ Quadraten mit den EISENSTEINSchen Reihen und den Funktionen $\Delta_\lambda(\tau)$.

§ 1. Die Darstellung der Hauptfunktionen und der Funktionen $\Delta_\lambda(\tau)$ durch die EISENSTEINSchen Reihen.

Ich stelle zunächst die für das Folgende wichtigsten Eigenschaften der EISENSTEINSchen Reihen der Stufe N und der Dimension $-k \leq -1$ zusammen.

Sie sind für $k \geq 3$ ganze Modulformen der Dimension $-k$ zur Kongruenzgruppe $\Gamma(N)$.

Die durch sie erzeugte homogene lineare Schar hat bei $N \geq 3$ den Rang $\sigma(N)$, wo $\sigma(N)$ die Anzahl der Spitzen des Fundamentalbereichs von $\Gamma(N)$ bedeutet, und enthält genau ein Element, das in einer beliebig vorgegebenen Spitze einen vorgegebenen, von Null verschiedenen Wert annimmt und in den übrigen Spitzen Null ist.

¹⁾ E. HECKE, Theorie der EISENSTEINSchen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927).

²⁾ E. HECKE, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Ann. 97 (1926).

Bei $N = 2$ gilt der entsprechende Satz nur, wenn $k \equiv 0 \pmod{2}$ ist.

Bei $k = 2$ gilt der Satz auch. Nur sind dann die EISENSTEINSchen Reihen keine analytischen Funktionen. Ihre lineare Schar enthält aber eine Teilschar analytischer Funktionen vom Range $\sigma(N) - 1$. Diese ist identisch mit der Schar der β -Teilwerte der Stufe N .

Für $k = 1$ sind die EISENSTEINSchen Reihen wieder analytische Funktionen. Der Rang ihrer Schar ist bei $N > 2$ gleich $1/2 \sigma(N)$.

Ist $\Gamma_1(N)$ eine beliebige Kongruenzgruppe der Stufe N und $k \equiv 0 \pmod{2}$, so hat die Teilschar derjenigen Funktionen aus der Schar der EISENSTEINSchen Reihen dieser Stufe, die bei den Substitutionen aus $\Gamma_1(N)$ invariant sind, den Rang $\sigma_1(N)$, wo $\sigma_1(N)$ die Anzahl der Spitzen des Fundamentalbereichs von $\Gamma_1(N)$ ist. Der Rang der analytischen Funktionen ist für $k = 2$ gleich $\sigma_1(N) - 1$.

Wir bezeichnen die analytischen Elemente der durch die EISENSTEINSchen Reihen der Stufe N und der Dimension $-k$ erzeugten linearen Schar, soweit sie schon zur Kongruenzgruppe $\Gamma_1(N)$ der Stufe N gehören, mit $G(\tau; \Gamma_1(N) - k)$ und die Spitzen des Fundamentalbereichs von $\Gamma_1(N)$ mit $S_1, \dots, S_{\sigma_1(N)}$. Untere Indizes an $G(\tau; \Gamma_1(N) - k)$ sollen bedeuten, daß die Funktion in den Spitzen mit diesen Indizes von Null verschieden, in den übrigen Spitzen gleich Null ist, und obere Indizes, daß die Funktion in den zugehörigen Spitzen gleich Null ist.

Ich zeige zunächst: Zu jeder Kongruenzgruppe $\Gamma_1(N)$ mit einem Fundamentalbereich des Geschlechts $p = 0$ und der Spitzenanzahl $\sigma_1(N) \geq 3$ läßt sich die Hauptfunktion als Quotient von Linearkombinationen der β -Teilwerte der Stufe N ausdrücken.

Die Anzahl der Nullstellen einer ganzen Modulform der Dimension -2 zu $\Gamma_1(N)$ ist nämlich nach bekannten Sätzen gleich $\sigma_1(N) - 2 + 1/2 e_1 + 2/3 e_3$, wo e_1 die Anzahl der nach $\Gamma(1)$ mit i äquivalenten Ecken $\{i\}$ des Fundamentalbereichs und e_3 die Anzahl der nach $\Gamma(1)$ mit ρ äquivalenten Ecken $\{\rho\}$ bedeuten. Alle ganzen Modulformen der Dimension -2 haben in den Ecken $\{i\}$ eine feste Nullstelle der Ordnung $1/2$ und in den Ecken $\{\rho\}$ eine solche der Ordnung $2/3$. Nun gibt es eine Linearkombination von β -Teilwerten, $G_{12}(\tau; \Gamma_1(N), -2)$, die in den beiden beliebig vorgegebenen Spitzen S_1, S_2 von Null verschieden, in den übrigen Spitzen gleich Null ist. In den Ecken $\{i\}$ verschwindet sie in der Ordnung $1/2$, in den Ecken $\{\rho\}$ in der Ordnung $2/3$. In den übrigen Punkten des Fundamentalbereichs ist sie nach dem zitierten Satz über die Anzahl der Nullstellen von Null verschieden. Bilden wir entsprechend $G_{12}(\tau; \Gamma_1(N), -2)$, so ist

$$(1) \quad F(\tau) = \frac{G_{12}(\tau; \Gamma_1(N), -2)}{G_{12}(\tau; \Gamma_1(N), -2)}$$

eine im Fundamentalbereich einwertige Funktion, die in S_2 einen Pol und in S_1 eine Nullstelle hat.

Dieses Verfahren zur Konstruktion von Funktionen mit gewissen Eigenschaften ist auch für die Untersuchung der elliptischen Funktionenkörper,

die zu Kongruenzgruppen des Geschlechts $p = 1$ gehören, brauchbar, wenn man noch das Differential 1. Gattung heranzieht.

HECKE hat für die Hauptfunktion zu einer Kongruenzgruppe $\Gamma_1(N)$ mit $p = 0$ eine Hauptfunktion mit Hilfe der \wp -Teilwerte angegeben, die für $\sigma_1(N) \geq 2$ gilt, aber tiefer liegende Eigenschaften der \wp -Teilwerte benutzt³⁾.

Die Darstellung der Funktionen $\Delta_\lambda(\tau)$ durch die EISENSTEINSchen Reihen wird gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Delta_2(\tau) &= G_{12}(\tau; \Gamma(2), -2) G_{23}(\tau; \Gamma(2), -2) G_{31}(\tau; \Gamma(2), -2) \\ &= G_1(\tau; \Gamma(2), -4) G_{23}(\tau; \Gamma(2), -2), \\ (2) \quad \Delta_3(\tau) &= G_{12}(\tau; \Gamma(3), -2) G_{34}(\tau; \Gamma(3), -2) = G_1(\tau; \Gamma(3), -3) G^1(\tau; \Gamma(3), -1), \\ \Delta_4(\tau) &= G^{12}(\tau; \Gamma(4), -1) G^{34}(\tau; \Gamma(4), -1) G^{56}(\tau; \Gamma(4), -1). \end{aligned}$$

Die Produkte der Funktionen auf der rechten Seite sind nach ihrer Konstruktion Spitzenformen der Stufe λ . Ihre λ -ten Potenzen verschwinden, gemessen in $\Gamma(\lambda)$, in der Ordnung λ , sind aber, da es jeweils nur eine solche Modulform gibt, bei Normierung durch einen passenden Faktor gleich $\Delta(\tau)$. Zur Herleitung von (2) wurde nicht benutzt, daß $\Delta_\lambda(\tau)$ für $\lambda > 1$ bei den Substitutionen aus $\Gamma(\lambda)$ invariant ist.

Die angegebenen Konstruktionen von $\Delta_\lambda(\tau)$ sind ebenso wie die Konstruktion der Hauptfunktion bei $p = 0$ auf mehrere Weisen möglich und führen dadurch auf Relationen höheren Grades zwischen EISENSTEINSchen Reihen.

Es sei noch auf einen allgemeinen Zusammenhang zwischen EISENSTEINSchen Reihen verschiedener Dimensionen bei beliebiger Stufe N hingewiesen. Er folgt aus der Differentialgleichung der \wp -Funktion:

$$\wp'(z; \omega_1, \omega_2)^3 = 4 \wp(z; \omega_1, \omega_2)^3 - g_2(\omega_1, \omega_2) \wp(z; \omega_1, \omega_2) - g_3(\omega_1, \omega_2)$$

durch wiederholtes Differenzieren nach z :

$$\begin{aligned} 2 \wp' \wp'' &= 12 \wp^3 \wp' - g_2 \wp', \\ (3) \quad \wp'' &= 6 \wp^2 - 1/2 g_2, \quad \wp''' = 12 \wp \wp', \\ \wp^{IV} &= 12 (\wp'^2 + \wp \wp'') = 12 \wp'^2 + 72 \wp^3 - 6 g_2 \wp, \dots \end{aligned}$$

Setzt man für z einen N -ten Teilwert ein und beachtet

$$(4) \quad g_\kappa(\omega_1, \omega_2) = c_\kappa \sum_{(a_1, a_2)} \wp \left(\frac{a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2}{N}; \omega_1, \omega_2 \right)^\kappa, \quad \kappa = 2, 3,$$

wo über ein vollständiges System primitiver Teilwerte zu summieren ist, so folgt, da die EISENSTEINSchen Reihen der Dimension $-k$ bis auf einen konstanten Faktor mit den $(k-2)$ -ten Ableitungen der \wp -Funktion übereinstimmen: Die EISENSTEINSchen Reihen $G_k(\tau; a_1, a_2, N)$ ($k \geq 3, N \geq 2$) sind als Polynome in den Teilwerten von \wp und \wp' mit konstanten Koeffizienten darstellbar. Der Vergleich der konstanten Glieder in den Potenzreihenentwicklungen nach $e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}$ zeigt, daß man die Berechnung von $\sum_{m \equiv a \pmod{N}} \frac{1}{m^k}$ für

³⁾ Vergl. auch B. SCHOENBERG, Multiplikative Gruppen algebraischer Funktionen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 16 (1949).

beliebiges ganzes $k \geq 2$ auf die Berechnung dieser Reihen mit $k = 2, 3$ zurückführen kann.

§ 2. Die Darstellung der Funktionen $\Delta_1(\tau)$ durch die verallgemeinerten binären Thetareihen.

Ist $R(\sqrt{D})$ ein quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $D < 0$ über dem Körper der rationalen Zahlen, \mathfrak{a} ein ganzes Ideal aus $R(\sqrt{D})$, A seine Norm, und sind k und Q natürliche Zahlen, so sind die Funktionen

$$(5) \quad \vartheta_k(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \sum_{\mu = \varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D}), \varrho \in \mathfrak{a}} \mu^{k-1} e^{\frac{2\pi i \tau}{4Q|D|} \mu \mu'},$$

wo μ alle ganzen Zahlen aus $R(\sqrt{D})$ mit der angegebenen Restklassenbedingung bei festem ϱ aus \mathfrak{a} durchläuft und μ' die Konjugierte zu μ ist, ganze Modulformen der Dimension $-k$ und der Stufe $Q|D|$. Für $k > 1$ sind sie Spitzenformen. Das ist von HECKE für $k = 1$ und $k = 2$ ausführlich dargestellt worden. Für $k > 2$ beweist man diese Tatsache am einfachsten, indem man den Differentiationsprozeß, der von ϑ_1 zu ϑ_2 führt, wiederholt⁴⁾. Man kann auch, wie HECKE es tut, dazu die Zetafunktionen mit Größencharakteren heranziehen.

Die durch die ϑ_k mit festen $k, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ erzeugte lineare Schar ist äquivalent mit der Schar der

$$(6) \quad \Theta_k(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}, \chi) = \frac{1}{e} \sum_{\alpha \alpha' = 1(Q|D|)} \chi(\alpha) \vartheta_k(\tau; \varrho \alpha, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}),$$

wo über ein vollständiges Restsystem $\alpha \bmod Q\sqrt{D}$ mit $\alpha \alpha' = 1 \pmod{Q|D|}$ summiert wird und χ alle Charaktere der Gruppe dieser $\alpha \bmod Q\sqrt{D}$ durchläuft. e ist die Anzahl der Einheiten in $R(\sqrt{D})$. Die Θ_k mit festem χ bilden ein bei Modulsstitutionen invariantes System und sind für $k > 1$ stets, für $k = 1$ dann und nur dann Spitzenformen, wenn der Charakter χ die Gleichung

$$(7) \quad \sum_{\substack{\alpha \alpha' = 1 \pmod{Q|D|} \\ \alpha \bmod Q\sqrt{D}}} \chi(\alpha) = 0$$

erfüllt. Diese Bedingung ist wegen des Auftretens der Restklasse $\varrho = 0 \pmod{Q\sqrt{D}}$ erforderlich. Notwendig dafür, daß die Θ_k nicht identisch verschwinden, ist $\chi(\varepsilon) = \varepsilon^{-(k-1)}$ für die Einheiten ε aus $R(\sqrt{D})$.

Unter den Funktionen Θ_k befinden sich auch die Funktionen $\Delta_\lambda(\tau)$ für $\lambda = 3, 4, 6, 12$. Um das zu zeigen, braucht man nur nicht identisch verschwindende Spitzenformen Θ_k der Stufe λ und der Dimension $-12/\lambda$ aufzustellen. Da diese dann Stufe und Dimension mit $\Delta_\lambda(\tau)$ gemein haben und es nur eine Spitzenform dieser Art gibt, stimmen sie wegen des Faktors $1/e$ mit $\Delta_\lambda(\tau)$ überein. Wir behandeln zunächst die Fälle $\lambda = 3, 4, 6$ und beachten, daß dann die zum auftretenden Modul teilerfremden Restklassen durch Einheiten repräsentiert werden können.

⁴⁾ B. SCHOENBERG, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsstitutionen, Math. Ann. 116 (1939).

Zu $A_4(\tau)$ gelangt man, wenn man $D = -4$, $a = (1)$, $Q = 1$, $k = 3$ und $\chi(\mu) = 1$ bei $\mu \equiv 1 \pmod{\sqrt{-4}}$, $\chi(\mu) = -1$ bei $\mu \not\equiv 1 \pmod{\sqrt{-4}}$ setzt:

$$(8) \quad A_4(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{\mu \in R(\sqrt{-4})} \chi(\mu) \mu^3 e^{\frac{2\pi i \tau}{4} \mu \mu'}$$

Der Koeffizient von $e^{\frac{2\pi i \tau}{4} p}$ für primzahliges $p > 0$ ist

$$(9) \quad \tau_4(p) = \begin{cases} \pi_1^2 + \pi_1'^2, & \text{wenn } p = \pi_1 \pi_1' \text{ und } \pi_1 \text{ so gewählt ist, daß } \chi(\pi_1) = 1. \\ 0, & \text{wenn } p \not\equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Für die zugeordnete Dirichlet-Reihe gilt

$$(10) \quad D_4(s) = \sum_{(\mu) \in R(\sqrt{-4})} \frac{\chi(\mu) \mu^3}{(\mu \mu')^s} = \prod_{p \neq 2} \left(1 - \tau_4(p) p^{-s} + \left(\frac{-1}{p} \right) p^{2-2s} \right)^{-1}.$$

Die Summe erstreckt sich über ein System von nicht assoziierten Zahlen.

Für $A_3(\tau)$ setzt man $D = -3$, $a = (1)$, $Q = 1$, $k = 4$ und $\chi(\mu) = 1$ bei $\mu \equiv 1 \pmod{\sqrt{-3}}$, $\chi(\mu) = -1$ bei $\mu \not\equiv 1 \pmod{\sqrt{-3}}$.

$$(11) \quad A_3(\tau) = \frac{1}{6} \sum_{\mu \in R(\sqrt{-3})} \chi(\mu) \mu^3 e^{\frac{2\pi i \tau}{3} \mu \mu'},$$

$$\tau_3(p) = \begin{cases} \pi_1^2 + \pi_1'^2, & \text{wenn } p = \pi_1 \pi_1', \chi(\pi_1) = 1 \\ 0, & \text{wenn } p \not\equiv 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

$$D_3(s) = \sum_{(\mu) \in R(\sqrt{-3})} \frac{\chi(\mu) \mu^3}{(\mu \mu')^s} = \prod_{p \neq 2, 3} (1 - \tau_3(p) p^{-s} + p^{3-2s})^{-1}.$$

$A_6(\tau)$ erhält man mit $D = -3$, $a = (1)$, $Q = 2$, $k = 2$. Als Charakter hat man den einen der beiden Restcharaktere mod $2\sqrt{-3}$ von der Ordnung 6

zu wählen, und zwar den mit $\chi\left(e^{\frac{2\pi i}{6}}\right) = e^{-\frac{2\pi i}{6}}$. Dann ist

$$A_6(\tau) = \frac{1}{6} \sum_{\mu \in R(\sqrt{-3})} \chi(\mu) \mu e^{\frac{2\pi i \tau}{6} \mu \mu'},$$

$$(12) \quad \tau_6(p) = \begin{cases} \pi_1 + \pi_1', & \text{wenn } p = \pi_1 \pi_1', \chi(\pi_1) = 1 \\ 0, & \text{wenn } p \not\equiv 1 \pmod{6}, \end{cases}$$

$$D_6(s) = \sum_{(\mu) \in R(\sqrt{-3})} \frac{\chi(\mu) \mu}{(\mu \mu')^s} = \prod_{p \neq 2, 3} (1 - \tau_6(p) p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}.$$

Für $|\tau_\lambda(p)|$, $\lambda = 3, 4, 6$ gelten, wie man sofort sieht, die Ungleichungen

$$(13) \quad |\tau_3(p)| < 2 p^{\frac{3}{2}}, |\tau_4(p)| < 2 p, |\tau_6(p)| < 2 p^{\frac{1}{2}}.$$

Das ist eine Aussage von der Form, wie sie RAMANUJAN für die Koeffizienten von $\Delta(\tau)$ vermutet hat. Überdies gilt

$$(14) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\tau_\lambda(p)}{\left| \frac{12/\lambda - 1}{2} \right|} = 1.$$

Setzt man nämlich $\mu = x \omega_1 + y \omega_2$, wo (ω_1, ω_2) eine Basis für die ganzen Zahlen aus $R(\sqrt{D})$ ist, so gibt es in dem Winkelraum $x > 0$, $y > 0$, $y/x < \delta$

für jedes $\delta > 0$ unendlich viele π_1 , so daß $\pi_1 \pi'_1$ eine rationale Primzahl ist. Das gilt auch für die Basis $(\varepsilon \omega_1, \varepsilon \omega_2)$, wenn ε eine Einheit aus $R(\sqrt{D})$ ist, so daß bei geeigneter Basis in dem angegebenen Winkelraum auch unendlich viele π_1 mit $\chi(\pi_1) = 1$ liegen. Daraus folgt die Behauptung. Entsprechend beweist man

$$(15) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left| \frac{\tau_2(p)}{\frac{12/\lambda - 1}{2}} \right| = -1.$$

Um $\Delta_{12}(\tau)$ zu gewinnen, setzen wir $D = -4$, $\alpha = (1)$, $Q = 3$, $k = 1$. Die Restklassen, die nach dem Modul $3\sqrt{-4}$ einer Einheit kongruent sind, bilden eine Untergruppe \mathfrak{E} vom Index 2 innerhalb der Gruppe der α mit $\alpha \alpha' = 1 \pmod{12}$ und diese wiederum eine Untergruppe vom Index 2 innerhalb der Gruppe \mathfrak{H} aller zu $3\sqrt{-4}$ teilerfremden Restklassen. Die Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{E}$ ist zyklisch von der Ordnung 4. Mit dem durch einen Charakter von $\mathfrak{H}/\mathfrak{E}$ des Grades 4 bestimmten Restcharakter mod $3\sqrt{-4}$ bilden wir die Funktionen $\mathcal{O}_1(\tau; \varrho, (1), 3\sqrt{-4}, \chi)$. Diese verschwinden nicht identisch für $\varrho \varrho' = 1 \pmod{12}$, sind also dann gleich $\Delta_{12}(\tau)$. Dagegen verschwinden sie identisch für $\varrho \varrho' \not\equiv 1 \pmod{12}$, weil sie Spitzenformen sind und in der Spitze ∞ in höherer als erster Ordnung verschwinden. Arithmetisch hat das identische Verschwinden seinen Grund darin, daß die beiden durch \mathfrak{E} bestimmten Komplexe mit $\alpha \alpha' \not\equiv 1 \pmod{12}$ zu einander konjugiert sind. Mit dem eben definierten Charakter ist also auch

$$(16) \quad \begin{aligned} \Delta_{12}(\tau) &= \frac{1}{4} \sum_{\mu \in R(\sqrt{-4})} \chi(\mu) e^{\frac{2\pi i \tau}{12} \mu \mu'}, \\ \tau_{12}(p) &= \begin{cases} \chi(\pi_1) + \chi(\pi'_1), & \text{wenn } p = \pi_1 \pi'_1 \\ 0, & \text{wenn } p \neq \pi_1 \pi'_1, \end{cases} \\ D_{12}(s) &= \sum_{(\mu) \in R(\sqrt{-4})} \frac{\chi(\mu)}{(\mu \mu')^s} = \prod_{p \neq 2, 3} \left(1 - \tau_{12}(p) p^{-s} + \left(\frac{-1}{p} \right) p^{-2s} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Zu $\Delta_{12}(\tau)$ gelangt man auch mit $D = -3$, $\alpha = (1)$, $Q = 4$, $k = 1$. Die Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{E}$, entsprechend der vorigen gebildet, ist wieder von der Ordnung 4, aber nicht zyklisch. Der Charakter mod $4\sqrt{-3}$ muß jetzt für solche α mit $\alpha \alpha' = 1 \pmod{12}$, die mod $4\sqrt{-3}$ nicht einer Einheit kongruent sind, den Wert -1 annehmen. Dann ist

$$(17) \quad \Delta_{12}(\tau) = \frac{1}{6} \sum_{\mu \in R(\sqrt{-3})} \chi(\mu) e^{\frac{2\pi i \tau}{12} \mu \mu'}$$

mit den weiteren, (16) entsprechenden Formeln. Diese Reihenentwicklung für $\Delta_{12}(\tau)$ ist bisher anscheinend übersehen worden. Ihre Identität mit der Reihenentwicklung (16), die funktionentheoretisch so einfach einzusehen ist, läßt sich auch arithmetisch beweisen. Man muß dazu so ähnlich vorgehen, wie es HECKE bei seinem arithmetischen Beweis für die Identität der Reihe aus $R(\sqrt{-4})$ und der von ihm gefundenen Reihe aus $R(\sqrt{3})$ getan hat⁵⁾.

⁵⁾ E. HECKE, Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1925

§ 3. Über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von $2k$ Quadraten.

Die Funktionen

$$(18) \quad \vartheta_{2k,l}(\tau) = \sum_{\substack{x_i = 1 \pmod{2}, 1 \leq i \leq l \\ x_i = 0 \pmod{2}, l < i \leq 2k}} e^{\frac{2\pi i \tau}{4} (x_1^2 + \dots + x_{2k}^2)}, \quad l = 0, 1, \dots, 2k,$$

sind bekanntlich ganze Modulformen der Stufe 4 und der Dimension $-k^2$. Sie sind, wie man leicht sieht, linear unabhängig und bilden ein maximales System linear unabhängiger ganzer Modulformen dieser Dimension und Stufe.

Daraus folgt für $k=1$, wo es 3 linear unabhängige EISENSTEINSche Reihen $G(\tau; \Gamma(4), -1)$ gibt, daß sich die Funktionen $\vartheta_{2,l}(\tau)$ durch die $G(\tau; \Gamma(4), -1)$ linear darstellen lassen. Für $k=2$ gibt es 5 linear unabhängige $G(\tau; \Gamma(4), -2)$, und die $\vartheta_{4,l}(\tau)$ lassen sich linear durch diese ausdrücken.

Die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von 2 oder 4 Quadraten ist aber eine elementare Funktion von n auch dann, wenn man für die Komponenten Restklassenbedingungen mod 2 vorschreibt. $\vartheta_{2k,0}(\tau)$ führt zu der Anzahl der Darstellungen von n als Summe von $2k$ Quadraten ohne Restklassenbedingungen. Daraus folgt aber schon bei $k=1, 2$ die Anzahl bei Restklassenbedingungen, weil dann durch die Restklasse von n mod 4 die Anzahl der x_i mit $x_i = 1 \pmod{2}$ bestimmt ist.

Bei $k=3$ gibt es 6 linear unabhängige $G(\tau; \Gamma(4), -3)$. Diese lassen sich so wählen, daß ihr Verhalten bei der Substitution $U = \tau + 1$ durch $G(\tau; \Gamma(4), -3) | U = i^r G(\tau; \Gamma(4), -3)$ gegeben ist. Dabei sind die Multiplizitäten des Auftretens von r mod 4 gleich 2 bei $r=0, 2$ und gleich 1 bei $r=1, 3$. Die $G(\tau; \Gamma(4), -3)$ bilden noch kein maximales System für die Dimension -3 . Hinzu kommt noch $\Delta_4(\tau)$. Alle diese Funktionen lassen sich linear durch die $\vartheta_{6,l}(\tau)$ ausdrücken. Für diese gilt $\vartheta_{6,l}(\tau) | U = i^l \vartheta_{6,l}(\tau)$. Hier tritt der Multiplikator i^0 für $l=0, 4$, der Multiplikator i^1 für $l=1, 5$, der Multiplikator i^2 für $l=2, 6$ und i^3 für $l=3$ auf. Der Vergleich mit den $G(\tau; \Gamma(4), -3)$ ergibt: Die Koeffizienten von $\vartheta_{6,l}(\tau)$ sind außer für $l=1, 5$ elementare Funktionen des Exponenten. Bei den Koeffizienten von $\vartheta_{6,l}(\tau)$ und $\vartheta_{6,5}(\tau)$ treten noch die Koeffizienten von $\Delta_4(\tau)$ hinzu. Wegen $\Delta_4(\tau) | U = i \Delta_4(\tau)$ ist $\Delta_4(\tau) = c_1 \vartheta_{6,1}(\tau) + c_2 \vartheta_{6,5}(\tau)$. Man findet

$$(19) \quad \Delta_4(\tau) = \frac{1}{2} (\vartheta_{6,1}(\tau) - \vartheta_{6,5}(\tau)).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_2(\tau) &= \frac{1}{4} (\vartheta_{12,2} - 2 \vartheta_{12,6} + \vartheta_{12,10}), \\ \Delta(\tau) &= \frac{1}{16} (\vartheta_{24,4} - 4 \vartheta_{24,8} + 6 \vartheta_{24,12} - 4 \vartheta_{24,16} + \vartheta_{24,20}). \end{aligned}$$

Für $k=4$ hat man ein maximales System ganzer Modulformen der Stufe 4 in 6 EISENSTEINSchen Reihen $G(\tau; \Gamma(4), -4)$ und 3 Funktionen $\Delta_4(\tau) G(\tau; \Gamma(4), -1)$. In der ersten Schar gibt es 3 Funktionen, in der letzten keine,

¹⁾ S. etwa die in Fußnote ⁴⁾ genannte Abhandlung.

die bei U invariant ist. Also sind die Koeffizienten von $\vartheta_{8,l}(\tau)$ für $l = 0, 4, 8$ elementare Funktionen.

Für $k > 4$ gilt, wie man leicht sieht, folgender Satz: Bezeichnet $a_{2k,l}(n)$ die Anzahl der Lösungen von $n = x_1^2 + \dots + x_{2k}^2$ mit $x_i \equiv 1 \pmod{2}$ für $1 \leq i \leq l$ und $x_i \equiv 0 \pmod{2}$ für $l < i \leq 2k$, so gibt es 6 unabhängige Linearformen $\sum_{l=0}^{2k} c_l^{(i)} a_{2k,l}(n)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, mit von n unabhängigen Koeffizienten $c_l^{(i)}$, die elementare Funktionen von n sind.

(Eingegangen am 23. Dezember 1952).

Über beschränkte Systeme von Funktionen.

Von

ERNST PESCHL und FRIEDHELM ERWE in Bonn.

Einleitung.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit (geordneten) Systemen von Funktionen, die regulär im Einheitskreis sind, und untersucht vor allem die beschränkten Systeme, d. h. solche, welche den Einheitskreis auf analytische (zweidimensionale) Flächenstücke im \mathbb{R}^{2n} abbilden, die im Inneren einer Hyperkugel liegen. Als besonders bemerkenswert stellt sich heraus, daß der aus der Theorie der beschränkten Funktionen bekannte Schursche Algorithmus voll übertragbar ist und eine vollständige Lösung des Koeffizientenproblems der Familie der beschränkten Systeme gestattet. Dadurch wird auch der Weg zu gewissen „scharfen“ Verzerrungssätzen und weiteren Abschätzungen freigelegt. Die volle Klärung der Fragen des Julia-Carathéodoryschen Problemkreises schließt sich an.

Es wird Wert darauf gelegt, einen brauchbaren, übersichtlichen Kalkül zu entwickeln; zu diesem Zweck werden vor allem die Automorphismen der Hyperkugel in eine zweckmäßige Form gebracht, die die Analogie mit dem klassischen Fall $n = 1$ in diesen und vielen anderen Entwicklungen leicht erkennen läßt. Nur so wird es möglich, auch noch kompliziertere Abschätzungen und Schrankenfunktionensysteme in übersichtlicher Form zu erhalten und zu studieren. Durch diese Untersuchungen sollen vor allem auch Mittel bereitgestellt werden, um in gewisse weitere geometrische Fragen einzudringen, die bei der Behandlung regulärer Abbildungen in mehreren komplexen Veränderlichen auftauchen.

Um den Matrizenkalkül weitgehend auszunutzen, normieren wir die Schreibweise des geordneten Funktionensystems als Spalte. Die Automorphismen der Hyperkugel, mit denen sich — soweit als notwendig — § 1 beschäftigt, dienen zur Untersuchung der Familie der beschränkten Funktionenspalten. In § 2 werden das Prinzip vom Maximum und daraus das SCHWARZsche Lemma mit dessen Verallgemeinerungen, z. B. die JENSENSche Ungleichung, hergeleitet. — § 3 ist dem Koeffizientenproblem der Familie der beschränkten Funktionenspalten gewidmet. — Im § 4 folgen Verzerrungssätze. Insbesondere werden in die Schranken der Verzerrungssätze die ersten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen beschränkter Funktionenspalten mit aufgenommen. — Bei Festhaltung dieser Koeffizienten lassen sich Schlichtheits- und Sternigkeitschranken der Familie angeben, denen die §§ 5 und 6 gewidmet sind, wobei in Analogie zum klassischen

Fälle die Verzerrungssätze wesentliche Dienste leisten und eine geeignete Definition von Schlichtheit und Sternigkeit bei Funktionenspalten zugrundegelegt wird. In § 7 schließlich wird der Satz von JULIA-CARATHÉODORY übertragen und der genaue Wertevorrat der Winkelderivierten, soweit sie existiert, angegeben.

Vorbemerkungen: Definitionen und Grundformeln.

(0,1) Ein geordnetes System von n komplexen Zahlen („Komponenten“) a_1, \dots, a_n werde als Spalte $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ zusammengefaßt geschrieben¹⁾. Unter dem Quadrat des Absolutbetrags $|a|^2$ von a werde verstanden:

$$|a|^2 = \bar{a} a = \sum_{k=1}^n a_k \bar{a}_k.$$

Wir erinnern kurz an einige Gesetze:

- (0,2) (a) $|a|^2 = |\Re a|^2 + |\Im a|^2$,
 (b) $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$,
 (c) $|ca| = |c| \cdot |a|$ für jede komplexe Zahl c ,
 (d) $|a+b| \leq |a| + |b|$, (Dreiecksungleichung), wo das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $a = 0$ oder für $a \neq 0: b = ca$ (c reell und ≥ 0).

Für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ gilt: $a = \sum_{j=1}^n a_j e_j$ und $|a| \leq \sum_{j=1}^n |a_j|$.

(0,3) $|\bar{a} b| \leq |a| |b|$, (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung); Gleichheitszeichen für $n > 1$ genau dann, wenn $a = 0$ oder für $a \neq 0: b = ca$ (c beliebig komplex).

(0,4) Wenn $f(z)$ eine Spalte differenzierbarer Funktionen ist, so ist unter $f'(z)$ oder $\frac{d}{dz} f(z)$ oder $f_z(z)$ die Spalte der Ableitungen zu verstehen (analoges gilt für die partiellen Ableitungen von Spalten von Funktionen mehrerer Veränderlichen). In ähnlicher Weise ist auch das Differential df einer Spalte

¹⁾ Die kleinen Buchstaben des deutschen Alphabets sind in der vorliegenden Arbeit ausschließlich den Spalten komplexer Zahlen (a, b, c, \dots) — 0 sei stets die Nullspalte — und den Zeichen für Funktionenspalten (f, g, h, \dots), die großen des griechischen Alphabets (A, B, Γ, \dots) den quadratischen Matrizen vorbehalten. Der Buchstabe n hat immer die Bedeutung der Gliederzahl der vorkommenden Spalten.

Das Transponieren einer Matrix (oder Spalte) wird durch „ \sim “ angedeutet, der Übergang zur Matrix (Spalte) der konjugiert komplexen Elemente durch Überqueren. $\Re a$ bzw. $\Im a$ bedeutet die Spalte der Real- bzw. Imaginärteile der Glieder von a (natürlich in unveränderter Reihenfolge der Glieder).

Im übrigen verwenden wir weitgehend die Matrizenmultiplikation.

Die Spalte $e_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$ mit $\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ 1 & \text{für } k = j \end{cases}$ heiße „ j -te“ Einheitspalte, und

unter $A = (a_1, \dots, a_k)$ werde die Matrix verstanden mit den Spalten a_1, \dots, a_k . Die Einheitsmatrix (e_1, \dots, e_n) bezeichnen wir mit E .

Der Einheitskreis $|z| < 1$ wird mit EK, die Einheitshyperkugel $|\xi| < 1$ für ein festes n im allgemeinen nicht näher bestimmtes n mit EH abgekürzt.

von Funktionen zu verstehen. Sind die Komponenten einer Spalte $f(z)$ in z_0 reguläre Funktionen von z , so heiße die Spalte „regulär“ in z_0 .

(a) Wenn h eine Funktion und f, g Funktionenspalten sind, so gilt:

$$d(hf) = h df + f dh$$

(b)

$$d(\tilde{f}g) = \tilde{f}dg + (d\tilde{f})g.$$

(0,5) Eine Funktionenspalte $f(z)$ soll *beschränkt* heißen, wenn sie in $|z| < 1$ regulär ist und wenn dort gilt: $|f(z)| \leq 1$.

§ 1. Automorphismen der EH.

Eine analoge Rolle, wie sie die Automorphismen des EK in der Theorie der beschränkten Funktionen spielen, spielen die Automorphismen der EH des \mathbb{R}^{2n} in der Theorie der beschränkten Funktionenspalten von n (komplexen) Komponenten, also derjenigen in $|z| < 1$ regulären Funktionenspalten $f(z)$, für die gemäß (0,5)

$$|f(z)| \leq 1 \text{ im EK}$$

gilt. Die durch eine Spalte von n Funktionen $w = w_z(z_1, \dots, z_n)$ von n komplexen Variablen z_1, \dots, z_n vermittelte Abbildung einer Punktmenge des \mathbb{R}^{2n} , kurz

$$w = w(\delta) \quad \left(w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right)$$

geschrieben, heiße ein Automorphismus der EH, wenn sie eine reguläre und topologische Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ ist (vgl. etwa BEHNKE-THULLEN [1]).

Diese Automorphismen sind seit langem bekannt²⁾. Für unsere Zwecke ist es wichtig, eine besonders handliche Form dieser Automorphismen zur Verfügung zu haben. Aus diesem Grunde erscheint es uns zweckmäßig, den folgenden, übrigens besonders bequemen Weg zu einer expliziten Darstellung eines beliebigen Automorphismus der EH anzugeben.

Wir behandeln zuerst solche Automorphismen der EH, die die Kreisscheibe $|z_1| < 1, z_2 = \dots = z_n = 0$, in sich überführen.

Es zeigt sich, daß bereits der besonders einfache Ansatz: $w_1 = \varphi(z_1)$, $w_0 = \psi(z_1)\delta_0$, wobei mit δ_0 die verkürzte Spalte der Komponenten z_2, \dots, z_n bezeichnet sei und w_0 analoge Bedeutung im (w) -Raume habe, solche Automorphismen liefert. Dabei muß natürlich $\varphi(z_1)$ ein Automorphismus des EK sein, also (1,1) $\varphi(z_1) = \varepsilon \frac{z_1 - a_1}{1 - \bar{a}_1 z_1}$ mit $|a_1| < 1$ und $|\varepsilon| = 1$. Wir erhalten:

$$(1,2) \quad 1 - |w|^2 = \left(\frac{1 - a_1 \bar{a}_1}{|1 - \bar{a}_1 z_1|^2} - \psi \bar{\psi} \right) (1 - z_1 \bar{z}_1) + \psi \bar{\psi} \cdot (1 - |z|^2).$$

²⁾ Vgl. dazu etwa: FR. SOMMER [5]; auf S. 127 ist dort allerdings ein Rechenfehler unterlaufen, der sich auch noch auf die explizite Darstellung der Automorphismen auf S. 128 auswirkt. Es muß in (9.8) heißen: $\delta_0 = w_0 \cdot \frac{1 + |w_0|^2}{2|w_0|^2}$, und in der Matrix \mathcal{R} von (9.9) ist in der letzten Spalte und entsprechend in der letzten Zeile (Feld rechts oben und links unten) im Zähler der Faktor $|w_0|$ zu streichen.

Wir wählen die Funktion $\varphi(z_1)$ so, daß der erste Summand hierin verschwindet, d. h. wir setzen (1,3) $\varphi(z_1) = \frac{\sqrt{1-a_1\bar{a}_1}}{1-\bar{a}_1z_1}$. Dann geht die vorige Gleichung über in (1,4) $1 - |w|^2 = \frac{1-a_1\bar{a}_1}{|1-\bar{a}_1z_1|^2} (1 - |\delta|^2)$. Man bestätigt leicht, daß diese Wahl von φ und ψ tatsächlich Automorphismen der speziellen Art liefert.

Zu jeder n -gliedrigen Spalte a mit $|a| < 1$ läßt sich die Matrix

$$(1.5) \quad \Gamma(a) = \frac{1}{1+v(a)} a \tilde{a} + v(a) E$$

bilden, wo E die n -reihige Einheitsmatrix ist und zur Abkürzung

$$(1.6) \quad v(a) = \sqrt{1-|a|^2}$$

gesetzt wurde. Die in (1.5) und (1.6) verwendeten Bezeichnungen $\Gamma(a)$ und $v(a)$ werden im folgenden oft wiederkehren und stets die gleiche Bedeutung haben.

Einige wichtige und leicht zu verifizierende Rechenregeln für die Matrix $\Gamma(a)$ seien hier jetzt zusammengestellt.

$$\widetilde{\Gamma(a)} = \Gamma(a); \quad \Gamma(a) a = a, \quad \tilde{a} \Gamma(a) = \tilde{a};$$

$$(1.7) \quad \Gamma(A a) = A \Gamma(a) \tilde{A} \quad (A \text{ unitär});$$

$$(1.8) \quad \Gamma^2(a) = a \tilde{a} + v^2(a) E;$$

$\Gamma(a)$ ist umkehrbar; es gilt sogar für beliebige ganze Zahlen k :

$$\Gamma^k(a) = \frac{1-v^k}{1-v^2} a \tilde{a} + v^k E$$

(für $v = v(a) \neq 1$, d. h. $a \neq 0$; trivialerweise ist aber $\Gamma(0) = E$).

Es ist

$$(1.9) \quad v(a) |b| \leq |\Gamma(a) b| \leq |b|,$$

und das Gleichheitszeichen gilt linksseitig genau dann, wenn $\tilde{a} \tilde{b} = 0$, und rechtsseitig genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = c a$ (c beliebig komplex). Ferner ist

$$(1.10) \quad |\tilde{a} \tilde{b}| \leq |a| |\Gamma(a) b|,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = c a$ (c beliebig komplex).

Wie leicht nachzurechnen ist, läßt sich die oben gefundene Funktionenspalte nun so schreiben:

$$(1.11) \quad w(\delta) = \Gamma(a_1) \frac{\delta - a_1}{1 - \tilde{a}_1 \delta},$$

worin $a_1 = a_1 e_1$ und e_1 die erste Spalte der Einheitsmatrix ist.

Da trivialerweise jede unitäre Drehung des \mathbb{R}^{2n} , d. h. jede durch $u = A v$ ($\tilde{A} A = E$) vermittelte Abbildung des v -Raumes auf den u -Raum, ein Automorphismus ist, ist auch

$$(1.12) \quad A_2 w = \Gamma(a_1) \frac{A_1 \delta - a_1}{1 - \tilde{a}_1 A_1 \delta}$$

ein Automorphismus, wenn A_1, A_2 zwei unitäre Matrizen sind, die also gemäß

(1.12) unitäre Drehungen im β - und w -Raum vermitteln, ehe die Abbildung (1.11) zur Durchführung kommt. Wegen (1.7) läßt sich mit den Abkürzungen

$$(1.13) \quad \tilde{A}_1 a_1 = a \text{ (also } |a_1| = |a|),$$

$$(1.14) \quad \tilde{A}_2 A_1 = A$$

(1.12) auch so schreiben:

$$(1.15) \quad w = A \Gamma(a) \frac{\beta - a}{1 - \tilde{a} \beta}.$$

Hier ist A unitär und $|a| < 1$. Daß jede unitäre Matrix A in Frage kommt, ist unmittelbar ersichtlich, denn bei gegebenen unitären Matrizen A, A_1 läßt sich A_2 als unitäre Matrix aus (1.14) berechnen. Daß aber auch jede Spalte a mit $|a| < 1$ in Frage kommt, folgt aus der Tatsache, daß zu gegebenen Spalten a, a_1 mit gleichen Absolutbeträgen stets eine unitäre Matrix A_1 existiert, so daß (1.13) erfüllt ist. Eine solche Matrix läßt sich sogar explizit angeben, nämlich:

$$(1.16) \quad A_1 = \varepsilon \left(2 \frac{(a_1 + \varepsilon a)(\tilde{a}_1 + \varepsilon \tilde{a})}{|a_1 + \varepsilon a|^2} - E \right),$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\tilde{a} a_1}{|\tilde{a} a_1|} & \text{für } \tilde{a} a_1 \neq 0, \\ 1 & \text{für } \tilde{a} a_1 = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung von (1.15) nach β ist nach dem in Anschluß an (1.4) Gesagten möglich und auch leicht auszuführen. Es ergibt sich:

$$\beta = \Gamma(a) \frac{\tilde{A} w + a}{1 + \tilde{a} \tilde{A} w},$$

wie man auch — und das demonstriert die Fruchtbarkeit der Anwendung des Matrizenkalküls — durch direkte Behandlung von (1.15) etwa folgendermaßen zeigen kann (es werde zur Vereinfachung — und das ist keine wesentliche Einschränkung — $A = E$ gesetzt):

$$(1.17) \quad w = \Gamma(a) \frac{\beta - a}{1 - \tilde{a} \beta},$$

$$1 + \tilde{a} w = \frac{1 - \tilde{a} a}{1 - \tilde{a} \beta},$$

$$\text{also} \quad \Gamma(a) w (1 - \tilde{a} \beta) = a \tilde{a} \beta + v^2(a) \beta - a = v^2(a) \beta - a (1 - \tilde{a} \beta),$$

$$\Gamma(a) (w + a) (1 - \tilde{a} \beta) = v^2(a) \beta,$$

$$(1.18) \quad \beta = \Gamma(a) \frac{w + a}{1 + \tilde{a} w}.$$

Die Gl. (1.4) lautet für die allgemeineren Automorphismen (1.15) in vereinfachter Schreibweise:

$$(1.19) \quad v(w) = \frac{v(a) v(\beta)}{1 - \tilde{a} \beta}.$$

Gemäß Dreiecksungleichung und CAUCHY-SCHWARZscher Ungleichung [siehe (0.2 d), (0.3)] gilt:

$$(1.20) \quad \frac{v(a) v(\delta)}{1 + |\tilde{a} \delta|} \leq v(w) \leq \frac{v(a) v(\delta)}{1 - |\tilde{a} \delta|}$$

$$(1.21) \quad \frac{v(a) v(\delta)}{1 + |a| |\delta|} \leq v(w) \leq \frac{v(a) v(\delta)}{1 - |a| |\delta|},$$

$$1 - \frac{v^2(a) v^2(\delta)}{(1 - |a| |\delta|)^2} \leq |w|^2 \leq 1 - \frac{v^2(a) v^2(\delta)}{(1 + |a| |\delta|)^2},$$

$$(1.22) \quad \frac{||a| - |\delta||}{1 - |a| |\delta|} \leq |w| \leq \frac{|a| + |\delta|}{1 + |a| |\delta|}.$$

Wegen der Übergänge von (1.19) zu (1.20) und von (1.20) zu (1.21) steht das Gleichheitszeichen in (1.22) genau dann, wenn $a = 0$ oder $\delta = \pm \frac{|\delta|}{|a|} a$ ($a \neq 0$), und zwar \pm für die Abschätzung von $|w|$ nach $\begin{cases} \text{unten} \\ \text{oben} \end{cases}$. Wenn $|\delta| \leq \alpha$, so folgt hieraus, da die Funktionen $\frac{x + |a|}{1 + |a| x}$ bzw. $\frac{|a| - x}{1 - |a| x}$ monoton steigend bzw. fallend in der reellen Veränderlichen x sind ($|a| < 1$):

$$\frac{|a| - \alpha}{1 - |a| \alpha} \leq |w| \leq \frac{|a| + \alpha}{1 + |a| \alpha},$$

und das Gleichheitszeichen steht dann genau (linksseitig natürlich $\alpha \leq |a|$ vorausgesetzt), wenn

$$a = 0 \text{ und } |\delta| = \alpha$$

oder

$$\delta = \pm \frac{\alpha}{|a|} a \quad (a \neq 0) \quad \left(\text{Abschätzung nach } \begin{cases} \text{unten} \\ \text{oben} \end{cases} \right).$$

Sei nun $w = T(\delta)$ ein Automorphismus der EH, der $\delta = a$ in $w = 0$ wirft. Dann ist

$$(1.23) \quad w = T \left(\Gamma(a) \frac{v + a}{1 + \tilde{a} v} \right) = S(v)$$

ein Automorphismus, der den Nullpunkt festläßt, also nach wohlbekannten Sätzen der Abbildungstheorie (vgl. BEHNKE-THULLEN [1]) eine unitäre Drehung:

$$(1.24) \quad w = \Lambda v, \quad \Lambda \text{ unitäre Matrix.}$$

(1.23) und (1.24) liefern

$$(1.25) \quad T(\delta) = \Lambda \Gamma(a) \frac{\delta - a}{1 - \tilde{a} \delta},$$

so daß sich der folgende Satz formulieren läßt:

Satz 1: Die Gruppe der Automorphismen der EH ist gegeben durch

$$w = A \Gamma(a) \frac{\delta - a}{1 - \bar{a}\delta},$$

wo $|a| < 1$, A unitär²⁾.

Nun läßt sich leicht ein weiterer Satz beweisen:

Satz 2: Der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(\delta_1, \delta_2) = \left| \Gamma(\delta_1) \frac{\delta_2 - \delta_1}{1 - \bar{\delta}_1 \delta_2} \right| \quad (|\delta_1| < 1, |\delta_2| < 1)$$

ist invariant gegenüber Automorphismen der EH, d. h. für jeden Automorphismus der EH $w = w(\delta)$ gilt:

$$\mathfrak{E}(w(\delta_1), w(\delta_2)) = \mathfrak{E}(\delta_1, \delta_2).$$

Ferner gilt, daß $\mathfrak{E}(\delta_1, \delta_2)$ symmetrisch in δ_1 und δ_2 ist, d. h.

$$\mathfrak{E}(\delta_2, \delta_1) = \mathfrak{E}(\delta_1, \delta_2).$$

— $\mathfrak{E}(\delta_1, \delta_2)$ wird als der invariante Abstand von δ_1 und δ_2 bezeichnet. —

Beweis: Mit den Automorphismen

$$(1.27) \quad u = u(\delta) = \Gamma(\delta_1) \frac{\delta - \delta_1}{1 - \bar{\delta}_1 \delta}, \quad \delta = \delta(u) = \Gamma(\delta_1) \frac{u + \delta_1}{1 + \bar{\delta}_1 u}$$

und

$$v = v(w) = \Gamma(w_1) \frac{w - w_1}{1 - \bar{w}_1 w}$$

ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$t = t(u) = v(w(\delta(u)))$$

ein Automorphismus der EH. Dieser läßt aber den Nullpunkt fest, falls $w_1 = w(\delta_1)$, ist also eine unitäre Drehung, so daß demnach gilt:

$$(1.28) \quad |t(u)| = |u|.$$

Für $u = u(\delta_2)$ heißt das $(w(\delta_2) = w_2): |v(w_2)| = |u(\delta_2)|$, w. z. b. w. Ganz ähnlich läßt sich auch die zweite Aussage des Satzes zeigen. Neben (1.27) mögen

$$v = v(\delta) = \Gamma(\delta_2) \frac{\delta - \delta_2}{1 - \bar{\delta}_2 \delta}$$

und

$$w = w(v) = \Gamma(v_1) \frac{v - v_1}{1 - \bar{v}_1 v}$$

Automorphismen sein. Dann ist

$$t = t(u) = w(v(\delta(u)))$$

²⁾ Im übrigen sind die Größen A, a charakteristisch für den Automorphismus, d. h. falls für alle δ der EH gilt:

$$(1.26) \quad A \Gamma(a) \frac{\delta - a}{1 - \bar{a}\delta} = B \Gamma(b) \frac{\delta - b}{1 - \bar{b}\delta}$$

(A, B unitär, $|a| < 1, |b| < 1$), so sind $A = B, a = b$ („Eindeutigkeit“ der Darstellung (1.15)). Es ergibt sich nämlich aus (1.26), speziell $\delta = a$ setzend: $a - b = 0$, und nun lautet (1.26): $A w = B w$ für alle w in $|w| < 1$ ($w = \Gamma(a) \frac{\delta - a}{1 - \bar{a}\delta}$), woraus $A = B$ folgt.

ein solcher, der aber nun den Nullpunkt festläßt, falls $v_1 = v(\delta_1)$. Es gilt also wieder (1.28), d. h. für $u = u(\delta_2)$: $|v(\delta_1)| = |u(\delta_2)|$, w. z. b. w.

Der Gruppe der Automorphismen der EH ist (bis auf einen positiven Zahlenfaktor) eindeutig eine gewisse HERMITESCHE Geometrie (von $2n$ reellen Dimensionen) zugeordnet. Das Linienelement ds einer solchen Geometrie muß im Nullpunkt bis auf einen positiven Faktor mit dem Euklidischen übereinstimmen, denn nur dann ist, wie leicht einzusehen ist, die speziell zu fordernde Invarianz gegenüber unitären Drehungen gewährleistet. Sei nun ds das Linienelement in irgend einem Punkte δ_0 der EH. Vermöge

$$w = \Gamma(\delta_0) \frac{\delta - \delta_0}{1 - \bar{\delta}_0 \delta}$$

wird δ_0 in den Nullpunkt geworfen, und dabei soll das Linienelement erhalten bleiben, und zwar etwa gleich dem ϱ -fachen ($\varrho > 0$) des Euklidischen sein. Da

$$dw = \Gamma(\delta_0) \frac{d\delta (1 - \bar{\delta}_0 \delta) + (\delta - \delta_0) \bar{\delta}_0 d\bar{\delta}}{(1 - \bar{\delta}_0 \delta)^2},$$

$$(dw)_{\delta = \delta_0} = \frac{1}{v^2(\delta_0)} \Gamma(\delta_0) d\delta,$$

ergibt sich also:

$$ds = \varrho |(dw)_{\delta = \delta_0}| = \frac{\varrho}{v^2(\delta_0)} |\Gamma(\delta_0) d\delta|.$$

Daß dies Linienelement, ohne den Index 0 nun einfach in der Form

$$(1.29) \quad ds = \frac{\varrho}{v^2(\delta)} |\Gamma(\delta) d\delta|$$

geschrieben, im vollen Umfang die Invarianzeigenschaft besitzt, d. h. daß es invariant bleibt bei Verpflanzung aus einem Punkt δ_0 in einen Punkt δ_1 vermöge eines Automorphismus der EH, folgt leicht durch Dazwischenschalten je eines Automorphismus, der δ_0 bzw. δ_1 in den Nullpunkt wirft und die Linienelemente nicht ändert. Im Nullpunkt aber sind die Linienelemente ja trivialerweise gleich.

§ 2. Satz vom Maximum. SCHWARZSESches Lemma. JENSENSche Ungleichung.

Der Satz vom Maximum hat in der Theorie der Funktionenspalten folgende Verallgemeinerung:

Satz 3. Sei $\mathfrak{f}(z)$ eine in einem Gebiete \mathfrak{G} der z -Ebene reguläre Funktionenspalte. Gilt dann für ein $z_0 \in \mathfrak{G}$:

$$(2.1) \quad \overline{\lim}_{z \in \mathfrak{G}} |\mathfrak{f}(z)| = |\mathfrak{f}(z_0)|,$$

so ist $\mathfrak{f}(z)$ eine Spalte konstanter Zahlen.

Beweis: Sei

$$(2.2) \quad \mathfrak{f}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} (z - z_0)^{\mu}$$

die Potenzreihenentwicklung von $\mathfrak{f}(z)$ in z_0 , deren Konvergenzradius größer

als $r > 0$ sein mag. Jede Komponente von (2.2) ist in $|z - z_0| \leq r$ absolut konvergent, und folglich ist nach (0,2) auch $\sum_{\mu=0}^{\infty} |a_{\mu}| r^{\mu}$ konvergent. Nun ist aber

$$|\tilde{f}(z)|^2 = \tilde{f}(z) \overline{\tilde{f}(z)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{a}_{\mu} \overline{a_{\nu}} (z - z_0)^{\mu} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\nu}$$

eine Doppelreihe, die in $|z - z_0| \leq r$ absolut und gleichmäßig konvergiert, da in $\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu}| |a_{\nu}| r^{\mu+\nu}$ eine konvergente Majorante gefunden wurde. Also gilt bei reeller Integrationsvariablen t :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(z_0 + r e^{it})|^2 dt &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{a}_{\mu} \overline{a_{\nu}} r^{\mu+\nu} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)t} dt \\ (2.3) \quad &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{a}_{\mu} \overline{a_{\mu}} r^{2\mu}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt unter Verwendung der Voraussetzung (2.1):

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(z_0 + r e^{it})|^2 dt \leq \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\tilde{f}(z_0 + r e^{it})|^2$$

$$(2.5) \quad \leq |\tilde{f}(z_0)|^2 = |a_0|^2.$$

Aus (2.3) und (2.5) folgt aber:

$$a_1 = a_2 = \dots = 0,$$

womit alles bewiesen ist.

Dagegen gilt für $n > 1$ nicht mehr der Satz vom Minimum in der Form, die Satz 3 annimmt, wenn die Voraussetzung (2.1) durch

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |f(z_0)| > 0$$

ersetzt wird, wie das Beispiel $f(z) = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ (\mathbb{G} sei die ganze Ebene und $z_0 = 0$) lehrt.

Nach (0,5) soll eine Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$ beschränkt heißen, wenn sie im EK regulär ist und wenn dort gilt: $|\tilde{f}(z)| \leq 1$. Nach dem Satz vom Maximum kann hier sogar nie das Gleichheitszeichen eintreten, wenn von denjenigen Spalten konstanter Zahlen abgesehen wird, die einen Absolutbetrag 1 besitzen.

Zunächst kann aus dem Satz vom Maximum in üblicher Weise das Analogon zum SCHWARZschen Lemma hergeleitet werden (vgl. auch BOCHNER-MARTIN [2]):

Satz 4: Wenn $\tilde{f}(z)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, die im Nullpunkt den Wert 0 besitzt, so gilt im EK:

$$|\tilde{f}(z)| \leq |z|.$$

Gilt hier für ein z_0 , $0 < |z_0| < 1$, das Gleichheitszeichen, so ist $\tilde{f}(z) = e z$ mit einer konstanten Spalte e vom Betrag 1.

Beweis: Mit $\tilde{f}(z)$ ist auch $g(z) = \frac{1}{z} \tilde{f}(z)$ im EK regulär, und daher gilt nach Satz 3:

$$|g(z)| = \left| \frac{\tilde{f}(z)}{z} \right| \leq \frac{M(r)}{r} \leq \frac{1}{r} \quad \text{für alle } |z| \leq r, \quad 0 < r < 1,$$

wenn wir $M(r) = \max_{|z|=r} |\tilde{f}(z)|$ setzen. Für $r \rightarrow 1$ folgt: $|g(z)| \leq 1$. Gilt hierin für ein z , $|z| < 1$, das Gleichheitszeichen, so folgt nach Satz 3: $g(z) = e$ ($= \text{const.}$) mit $|e| = 1$, womit Satz 4 bewiesen ist.

Zu einer ersten Verallgemeinerung des „SCHWARZschen Lemmas“ führt die Überlegung, daß mit $\tilde{f}(z)$ auch $w(\tilde{f}(z(w))) = \tilde{f}^*(w)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, wenn

$$w = w_0 = \Gamma(w_0) \frac{\delta - w_0}{1 - \overline{w_0} \delta}$$

ein Automorphismus der EH und

$$z = z(w) = \frac{w + z_0}{1 + \overline{z_0} w}$$

ein Automorphismus des EK ist. Falls $\tilde{f}(z_0) = w_0$, besitzt $\tilde{f}^*(w)$ in $w = 0$ eine 0-Stelle, so daß Satz 4 die Ungleichung

$$\left| \Gamma(w_0) \frac{\tilde{f}(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} \tilde{f}(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

liefert, wo für $z \neq z_0$ das Gleichheitszeichen für genau diejenigen Funktionenspalten $\tilde{f}(z)$ steht, für die

$$\Gamma(w_0) \frac{\tilde{f}(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} \tilde{f}(z)} = e \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \quad (|e| = 1)$$

gilt, d. h. (vgl. den Schritt von (1.17) zu (1.18) für:

$$(2.6) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma(w_0) \frac{e \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} + w_0}{1 + \overline{w_0} e \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}}.$$

Die Gruppeneigenschaft der Automorphismen gestattet es, (2.6) in der Form

$$(2.7) \quad \tilde{f}(z) = A \Gamma(a) \frac{e z - a}{1 - \overline{a} e z}$$

zu schreiben, wo $|a| < 1$ und A unitär. $\tilde{f}(z)$ entsteht nämlich durch Einsetzen von

$$w = \Gamma(e z_0) \frac{e z - e z_0}{1 - (\overline{e z_0}) e z} = e \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

in

$$\Gamma(w_0) \frac{w + w_0}{1 + \overline{w_0} w}.$$

Wenn $A e = e_1$, $A a = a_1$ gesetzt wird, so lautet (2.7) [es ist (1.7) zu beachten]:

$$(2.8) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma(a_1) \frac{e_1 z - a_1}{1 - \overline{a_1} e_1 z},$$

und hier sind $|a_1| = |a| < 1$ und $|e_1| = |e| = 1$. Um a_1 und e_1 mit w_0 , e und z_0 in Beziehung zu setzen, genügt es, in (2.6) und (2.8) die speziellen Werte $z = 0$ und $z = z_0$ zu setzen:

$$(2.9) \quad a_1 = \Gamma(w_0) \frac{e z_0 - w_0}{1 - \overline{w_0} e z_0},$$

$$(2.10) \quad \Gamma(a_1) \frac{e_1 z_0 - a_1}{1 - \overline{a_1} e_1 z_0} = w_0.$$

Für $z_0 = 0$ stimmen (2.6) und (2.8) überein, wenn $e_1 = e$, $a_1 = -w_0$ gesetzt wird. Für $z_0 \neq 0$ aber lassen sich gemäß (2.9), (2.10) a_1 und e_1 aus w_0, e, z_0 berechnen, doch auch umgekehrt ergeben sich für jedes $z_0 \neq 0$ aus a_1 und e_1 — immer unter den für die Größen gemachten Voraussetzungen — eindeutig w_0 und e . Damit ist gezeigt, daß die Menge der Funktionenspalten (2.6) ($|w_0| < 1, |z_0| < 1, |e| = 1$) die gleiche ist, wie die der Funktionenspalten (2.8) ($|a_1| < 1, |e_1| = 1$). Es gilt also der folgende Satz:

Satz 5: Wenn $\tilde{f}(z)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, die im Punkte z_0 des EK den Wert w_0 der EH annimmt, so gilt

$$(2.11) \quad \left| \Gamma(w_0) \frac{\tilde{f}(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} \tilde{f}(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

für alle $z \in EK$. Schrankenfunktionenspalten sind für $z \neq z_0$ die folgenden, und nur diese:

$$(2.12) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma(a) \frac{e z - a}{1 - \overline{a} e z}, \quad |a| < 1, |e| = 1.$$

Nach diesem Satze ist unter den gleichen Voraussetzungen die im EK sicherlich reguläre Funktionenspalte

$$\tilde{f}_1(z) = \Gamma(\tilde{f}(z_0)) \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)}{1 - \overline{\tilde{f}(z_0)} \tilde{f}(z)} \frac{1 - \overline{z_0} z}{z - z_0}$$

sogar eine beschränkte. Ist nun z_1 ein weiterer Punkt des EK (es braucht nicht notwendig $z_1 \neq z_0$ zu sein), und ist $|\tilde{f}(z_1)| < 1$, d. h. ist $\tilde{f}(z)$ keine der Funktionenspalten (2.12), so ergibt sich durch erneute Anwendung von Satz 5, daß

$$\tilde{f}_2(z) = \Gamma(\tilde{f}_1(z_1)) \frac{\tilde{f}_1(z) - \tilde{f}_1(z_1)}{1 - \overline{\tilde{f}_1(z_1)} \tilde{f}_1(z)} \frac{1 - \overline{z_1} z}{z - z_1}$$

eine beschränkte Funktionenspalte ist. Sei auf diese Weise allgemein eine beschränkte Funktionenspalte $\tilde{f}_r(z)$ aus der vorangegangenen $\tilde{f}_{r-1}(z)$ gewonnen worden, so läßt sich bei Vorgabe eines Punktes z_r des EK unter der Voraussetzung, daß $|\tilde{f}_r(z_r)| < 1$, auf Grund von Satz 5 aussagen, daß dann auch

$$(2.13) \quad \tilde{f}_{r+1}(z) = \Gamma(\tilde{f}_r(z_r)) \frac{\tilde{f}_r(z) - \tilde{f}_r(z_r)}{1 - \overline{\tilde{f}_r(z_r)} \tilde{f}_r(z)} \frac{1 - \overline{z_r} z}{z - z_r}$$

eine beschränkte Funktionenspalte ist. Dieser Rekursionsprozeß spielt eine beherrschende Rolle in der Theorie der beschränkten Funktionenspalten. Er führt z. B. zur JENSENSchen Ungleichung, zur Behandlung des Interpolationsproblems, unter dem Namen „SCHURScher Algorithmus“ zur Lösung des Koeffizientenproblems und zu sehr allgemeinen Verzerrungssätzen. Die erstgenannte dieser Fragen mag hier zunächst angegriffen werden.

Wenn speziell $\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{f}_2(z_2) = \dots = \tilde{f}_m(z_m) = 0$, wenn also neben z_0 auch z_1, z_2, \dots, z_m w_0 -Stellen von $\tilde{f}(z)$ sind (in dieser Aufzählung darf jede w_0 -Stelle mehrmals vorkommen, jedoch höchstens so oft, als ihre Vielfachheit

beträgt⁴⁾), so lautet (2.13):

$$(2.14) \quad \tilde{f}_{\nu+1}(z) = \tilde{f}_{\nu}(z) \frac{1 - \bar{z}_{\nu} z}{z - z_{\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m),$$

und $\tilde{f}_{m+1}(z)$ ist eine beschränkte Funktionenspalte, die genau dann in einem Punkt des EK einen Wert vom Absolutbetrag 1 annimmt, wenn sie eine Konstante vom Betrag 1 ist. Alle Gl. (2.14) benutzend, lautet die Aussage in geringfügiger Abwandlung:

Satz 6: Wenn $\tilde{f}(z)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, die in den Punkten z_0, z_1, \dots, z_m des EK den Wert w_0 der EH annimmt (jede dieser w_0 -Stellen darf in der Aufzählung höchstens so oft auftreten, wie ihre Vielfachheit beträgt), so gilt:

$$(2.15) \quad \left| \Gamma(w_0) \frac{\tilde{f}(z) - w_0}{1 - \bar{w}_0 \tilde{f}(z)} \right| \leq |h(z)| \quad \text{mit} \quad h(z) = \prod_{\nu=0}^m \frac{z - z_{\nu}}{1 - \bar{z}_{\nu} z}.$$

Schrankenfunktionenspalten sind für $z \neq z_{\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$) genau die folgenden:

$$(2.16) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma(w_0) \frac{e \cdot h(z) + w_0}{1 + \bar{w}_0 e \cdot h(z)}, \quad |e| = 1.$$

Es sei hier nochmals ausdrücklich herausgestellt, daß eine Funktionenspalte, die für ein $z \neq z_{\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$) in (2.15) Schrankenfunktionenspalte ist, dies dann für alle z des EK zugleich ist.

Aus Satz 6 folgt nun leicht der folgende Satz, dessen Hauptinhalt im Falle $n = 1$ als JENSENSCHE Ungleichung bekannt ist:

Satz 6a: Wenn z_0, z_1, \dots, z_m im EK gelegene, von 0 verschiedene o -Stellen (jede dieser o -Stellen darf höchstens so oft auftreten, wie ihre Vielfachheit beträgt) der beschränkten Funktionenspalte

$$\tilde{f}(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots, \quad a_k \neq 0$$

sind, so gilt

$$|z_0| |z_1| \dots |z_m| \geq |a_k|.$$

Schrankenfunktionenspalten sind die Funktionenspalten

$$\tilde{f}(z) = e z^k \cdot h(z), \quad |e| = 1,$$

und nur diese.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn auf die nach dem SCHWARZSCHEN Lemma beschränkte Funktionenspalte $\frac{\tilde{f}(z)}{z^k}$ Satz 6 mit $w_0 = 0$ im Punkt $z = 0$ angewandt wird.

Die Rechnungen des § 1 gestatten sofort, aus Satz 6 Abschätzungen für $|\tilde{f}(z)|$ selbst zu erhalten, und zwar eine solche nach oben und eine nach unten. Wenn wir uns derselben Abkürzung $h(z)$ wie in Satz 6 und 6a bedienen, so gilt nach jenen Ergebnissen nämlich:

$$(2.17) \quad \frac{|w_0| - |h(z)|}{1 - |w_0| |h(z)|} \leq |\tilde{f}(z)| \leq \frac{|w_0| + |h(z)|}{1 + |w_0| |h(z)|}.$$

⁴⁾ Ein Punkt z_0 heißt k -fache w_0 -Stelle der in z_0 regulären Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$, wenn

$$\tilde{f}(z) - w_0 = a_k (z - z_0)^k + \dots \quad (a_k \neq 0)$$

die Potenzreihenentwicklung um z_0 ist.

Die Abschätzungen sind scharf, linksseitig wenigstens, solange die Schranke nicht negativ ist. Als Schrankenfunktionenspalten kommen höchstens die Funktionenspalten (2.16) in Frage, aber nur unter Vorbehalten, die aus Feststellungen des § 1 zu ersehen sind. Es muß danach zur Erzielung des Gleichheitszeichens in (2.17) $w_0 = 0$ sein oder aber für $w_0 \neq 0$:

$$\Gamma(w_0) \frac{\bar{f}(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} \bar{f}(z)} = \mp \frac{|h(z)|}{|w_0|} w_0$$

für die Abschätzungen nach $\begin{cases} \text{unten} \\ \text{oben} \end{cases}$, d. h. unter Verwendung von (2.16):

$$h(z) \varepsilon = \mp \frac{|h(z)|}{|w_0|} w_0.$$

Dies hinwiederum bedeutet, daß $h(z) = 0$ oder für $h(z) \neq 0$ ε ein komplexes Vielfaches $\varepsilon \frac{w_0}{|w_0|}$ von w_0 ($|\varepsilon| = 1$) und $\varepsilon h(z) = \mp |h(z)|$ sein muß. Zusammenfassend ist also zu sagen: Schrankenfunktionenspalten in (2.17) sind unter der Voraussetzung, daß die untere Schranke nicht negativ ist, für $z \neq z_r$ ($r = 0, 1, \dots, m$) genau die folgenden:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \bar{f}(z) = \begin{cases} \varepsilon h(z), & |\varepsilon| = 1, & \text{für } w_0 = 0, \\ \frac{w_0}{|w_0|} \varepsilon h(z) + \frac{|w_0|}{1 + |w_0| \varepsilon h(z)}, & |\varepsilon| = 1, & \text{für } w_0 \neq 0, \end{cases} \\ &\text{b)} \end{aligned}$$

im Falle a) in allen Punkten z des EK gleichzeitig, im Falle b) in genau denjenigen Punkten z , in denen $\varepsilon h(z)$ positiv bzw. negativ ist für die Abschätzung nach oben bzw. unten.

Wird Ungleichung (2.15) zur folgenden abgeschwächt:

$$\left| \Gamma(w_0) \frac{\bar{f}(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} \bar{f}(z)} \right| \leq h^*(r),$$

wo

$$h^*(r) = \frac{r + r_0}{1 + r_0 r} \frac{r + r_1}{1 + r_1 r} \cdots \frac{r + r_m}{1 + r_m r}, \quad |z| = r, \quad |z_r| = r_r,$$

so liefern jetzt Rechnungen des § 1:

$$(2.19) \quad \frac{|w_0| - h^*(r)}{1 - |w_0| h^*(r)} \leq |\bar{f}(z)| \leq \frac{|w_0| + h^*(r)}{1 + |w_0| h^*(r)},$$

und Schrankenfunktionenspalten sind, wenn der Fall $z_0 = z_1 = \cdots = z_m = 0$, $z = 0$ ausgeschlossen wird, genau die folgenden:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \bar{f}(z) = \begin{cases} \varepsilon h^*(\varepsilon z), & |\varepsilon| = 1, |\varepsilon| = 1 & \text{für } w_0 = 0, \\ \frac{w_0}{|w_0|} \pm \frac{h^*(\varepsilon z) + |w_0|}{1 \pm |w_0| h^*(\varepsilon z)}, & |\varepsilon| = 1, & \text{für } w_0 \neq 0, \end{cases} \\ &\text{b)} \end{aligned}$$

und zwar für den Punkt $z = \bar{\varepsilon} r$ (\pm für $\begin{cases} \text{obere} \\ \text{untere} \end{cases}$ Schranke).

§ 3. Das Koeffizientenproblem.

Eine notwendige Bedingung für die Koeffizienten einer beschränkten Funktionenspalte

$$(3.1) \quad \bar{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

wird von der GUTZMERSchen Verallgemeinerung des CAUCHYSchen Koeffizientensatzes geliefert, die sich in (2.3) und (2.4) findet:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |a_{\mu}|^2 r^{2\mu} \leq 1,$$

und da dies für alle r in $0 \leq r < 1$ gilt, darf sogar der Grenzübergang $r \rightarrow 1 - 0$ vollzogen werden:

$$(3.2) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_{\mu}|^2 \leq 1.$$

Diese Koeffizientenbedingung ist aber bekanntlich keineswegs hinreichend dafür, daß (3.1) eine beschränkte Funktionenspalte ist. Die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen ist das Koeffizientenproblem.

Sei

$$(3.3) \quad p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

nun eine beliebige Spalte von Potenzreihen (Entwicklung im Nullpunkt). Auf sie werde rein formal, also ohne Konvergenzuntersuchung, der in § 2 beschriebene Rekursionsprozeß angewandt, jedoch für die speziellen Werte $z_0 = z_1 = \dots = 0$. Das heißt, es wird durch formales Rechnen die Potenzreihenspalte

$$(3.4) \quad p_{r+1}(z) = \Gamma_{(a_{r,0})} \frac{p_r(z) - a_{r,0}}{1 - \overline{a_{r,0}} p_r(z)} \cdot \frac{1}{z}$$

aus der Potenzreihenspalte

$$p_r(z) = a_{r,0} + a_{r,1} z + a_{r,2} z^2 + \dots$$

gewonnen ($r = 0, 1, 2, \dots$), wo noch $p_0(z)$ mit $p(z)$ ($a_{0,\mu} = a_{\mu}$) identifiziert wird. Der Rekursionsprozeß soll dann und nur dann abgebrochen werden, sobald ein Index m ($m \geq 0$) auftritt, für den $|a_{m,0}| \geq 1$.

Es gilt dann der folgende Satz:

Satz 7: Die Potenzreihenspalte (3.3) ist genau dann im EK konvergent und stellt eine beschränkte Funktionenspalte dar, wenn der soeben beschriebene Rekursionsprozeß nicht abbricht oder aber im Falle des Abbrechens mit einem Index m gilt:

$$(3.5) \quad |a_{m,0}| = 1; \quad a_{m,k} = 0 \text{ für } k \geq 1.$$

In diesem Satze ist die vollständige Lösung des Koeffizientenproblems eingeschlossen, denn die Spalten $a_{r,0}$ lassen sich aus den Spalten a_r berechnen. Durch eine genauere Betrachtung von (3.4) läßt sich sogar leicht feststellen, daß sich für jeden Index r die $a_{r,0}$ aus den Größen a_0, a_1, \dots, a_r aufbauen. Diese Feststellung wird beim Beweise von Satz 7 eine Rolle spielen.

Daß die im Satz formulierte Bedingung für die Beschränktheit einer durch (3.3) gegebenen Funktionenspalte notwendig ist, ist schon in allgemeinerem Zusammenhang in § 2 eingesehen worden. Es soll nun gezeigt werden, daß sie auch hinreichend ist. Dazu werde zunächst angenommen, der Rekursionsprozeß breche nicht ab. Dann wird aus der gegebenen Potenzreihenspalte (3.3) eine unendliche Folge von Spalten $a_{0,0} (= a_0), a_{1,0}, \dots, a_{r,0}, \dots$ gewonnen.

Sei nun

$$(3.6) \quad b_0^{(v)} + b_1^{(v)} z + \dots$$

eine Potenzreihenspalte, die in den ersten v Koeffizienten mit (3.3) übereinstimmt, also

$$(3.7) \quad b_0^{(v)} = a_0, \quad b_1^{(v)} = a_1, \dots, \quad b_{v-1}^{(v)} = a_{v-1}.$$

Der auf sie angewandte obige Rekursionsprozeß mag zu Spalten $b_{0,0}^{(v)} (= b_0)$, $b_{1,0}^{(v)}$, $b_{2,0}^{(v)}$, ... führen, die den $a_{0,0}$, $a_{1,0}$, $a_{2,0}$, ... entsprechen. Nach obiger Feststellung ist wegen (3.7) dann:

$$b_{0,0}^{(v)} = a_{0,0}, \quad b_{1,0}^{(v)} = a_{1,0}, \dots, \quad b_{v-1,0}^{(v)} = a_{v-1,0}.$$

Nun sei weiter vorausgesetzt, daß (3.6) im EK konvergent ist und eine beschränkte Funktionenspalte $g_v(z)$ darstellt. Das läßt sich stets einrichten, denn es braucht bloß etwa $b_{v,0} = e$ ($|e| = 1$) gesetzt zu werden, und dann ergibt sich $g_v(z)$ aus dem rückläufig durchgeführten Rekursionsprozeß als beschränkte Funktionenspalte. Für spätere Zwecke sei vermerkt, daß sich die Gesamtheit aller so zu gewinnenden Funktionenspalten durch die folgende Rekursionsformel darstellen läßt ($b_0^{(v)} = \tau_v$ gesetzt):

$$(3.8) \quad g_0(z) = e, |e| = 1, \\ g_v(z) = \Gamma_{(\tau_v)} \frac{z g_{v-1}(z) + c_v}{1 + \bar{c}_v z g_{v-1}(z)}, \quad |c_v| < 1 \quad (v \geq 1).$$

Zu jedem Index v existiert also eine beschränkte Funktionenspalte $g_v(z)$, deren Entwicklung in den ersten v Koeffizienten mit (3.3) übereinstimmt. Wegen (3.2) gilt nun aber für jedes μ — und damit ist (3.2) nur in wesentlich abgeschwächter Form, nämlich in Form des CAUCHYschen Koeffizientensatzes ausgenutzt —:

$$|b_\mu^{(v)}| \leq 1,$$

also auch

$$|a_\mu| \leq 1.$$

Hieraus folgt speziell, daß $p(z)$ im EK konvergent ist und eine dort reguläre Funktionenspalte darstellt. Es gilt aber sogar weitergehend:

$$|p(z) - g_v(z)| = \left| \sum_{\mu=v}^{\infty} (a_\mu - b_\mu^{(v)}) z^\mu \right| \\ \leq 2 \cdot \sum_{\mu=v}^{\infty} |z^\mu| = \frac{2|z|^v}{1-|z|}.$$

Für jedes z des EK gilt also:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} g_v(z) = p(z),$$

d. h. aber, daß auch $p(z)$ beschränkt ist.

Zur Vollendung des Beweises von Satz 7 braucht nur noch der Fall behandelt zu werden, daß der Rekursionsprozeß mit einem Index m abbricht und daß (3.5) gilt. Dieser Fall ist aber sofort abgetan, denn jetzt läßt sich aus dem rückläufig durchgeführten Rekursionsprozeß (3.4) $p(z)$ sofort als beschränkte Funktionenspalte berechnen, wie es genau schon oben bei $g_v(z)$ geschehen war.

Die so erhaltenen Funktionenspalten heißen die Schrankenfunktionenspalten des Koeffizientenproblems; sie und nur sie sind es, die in den für beschränkte Funktionenspalten (3.3) gültigen Koeffizientenungleichungen

$$(3.9) \quad |a_{\nu,0}| \leq 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

das Gleichheitszeichen erzielen. Werden sie mit $g_\nu(z)$ bezeichnet, so wird ihre Gesamtheit gerade durch (3.8) geliefert.

Ein Induktionsschluß zeigt, daß für diese Schrankenfunktionenspalten, die als Spalten rationaler Funktionen in der ganzen Ebene mit Ausnahme von endlich vielen Punkten regulär sind, die funktionale Beziehung

$$(3.10) \quad \overline{g_\nu\left(\frac{1}{z}\right)} g_\nu(z) = 1$$

gilt. Für $\nu = 0$ ist das trivial. Angenommen nun, die Gl. (3.10) gelte für einen Index $\nu = k-1 \geq 0$. Dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \overline{g_k\left(\frac{1}{z}\right)} g_k(z) &= \frac{\frac{1}{z} \overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} + \widetilde{c}_k}{1 + \frac{1}{z} \overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} c_k} \Gamma_{(c_k)}^2 \frac{z g_{k-1}(z) + c_k}{1 + \widetilde{c}_k z g_{k-1}(z)} \\ &= \frac{\overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} \Gamma_{(c_k)}^2 g_{k-1}(z) + z \widetilde{c}_k \overline{g_{k-1}(z)} + \frac{1}{z} \overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} c_k + \widetilde{c}_k c_k}{1 + \frac{1}{z} \overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} c_k + z \widetilde{c}_k \overline{g_{k-1}(z)} + \overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} c_k \widetilde{c}_k \overline{g_{k-1}(z)}} \end{aligned}$$

und das ist = 1, da nach Induktionsvoraussetzung und (1.8):

$$\overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} \Gamma_{(c_k)}^2 g_{k-1}(z) + \widetilde{c}_k c_k = \overline{g_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right)} c_k \widetilde{c}_k \overline{g_{k-1}(z)} + 1^5).$$

Für Funktionenspalten gilt die Übertragung des Satzes von LAURENT. Im Anschluß hieran wird gesagt, daß z_0 eine Stelle der Regularität, ein Pol bzw. eine wesentliche Singularität einer in einer punktierten Umgebung $0 < |z - z_0| < \varrho$ von z_0 regulären Funktionenspalte ist, wenn der Hauptteil der Laurententwicklung keinen, nur endlich viele bzw. unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten besitzt. Wegen (3.10) und (0.2) gilt

$$\left| g_\nu\left(\frac{1}{z}\right) \right| |g_\nu(z)| \geq 1.$$

Ist z_0 eine 0-Stelle von $g_\nu(z)$, so muß hiernach $\left| g_\nu\left(\frac{1}{z}\right) \right| \rightarrow \infty$ streben für $z \rightarrow z_0$, also kann dann $\frac{1}{z_0}$ keine Stelle der Regularität sein, und da bleibt nur die Möglichkeit der Polstelle. Alle Nullstellen von $g_\nu(z)$, falls überhaupt vorhanden, müssen hiernach im EK liegen. Es darf übrigens für $n \geq 2$ nicht geschlossen werden, daß umgekehrt z_0 Nullstelle ist, falls $\frac{1}{z_0}$ Polstelle ist.

⁵ Die Beziehung (3.10) kann auch so erschlossen werden: Erstens folgert man, von (3.5) rückwärts gehend: (3.10a) $|g_\nu(z)| = 1$ für $|z| = 1$, zweitens gilt für die (auf $|z| = 1$ reguläre) rationale Funktion $R(z) = \overline{g_\nu\left(\frac{1}{z}\right)} g_\nu(z) - 1$, daß sie auf $|z| = 1$ verschwindet und deswegen für alle z verschwindet.

Die Schrankenfunktionenspalten (3.8) sind, wie erwähnt, Spalten rationaler Funktionen, und als solche können sie in der Form $g_v(z) = \frac{p_v(z)}{p_v(z)}$ geschrieben werden, wo p_v ein Polynom und p_v eine Spalte von Polynomen sind. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn noch etwa verlangt wird, daß keine Nullstelle von $p_v(z)$ auch 0-Stelle von $p_v(z)$ ist und daß $p_v(0) = 1$. Aus (3.8) ergibt sich dann das folgende rekursive Gesetz:

$$\begin{aligned} p_0(z) &= e, \quad p_0(z) = 1, \\ p_v(z) &= \Gamma_{(c_v)}(z p_{v-1}(z) + c_v p_{v-1}(z)), \\ p_v(z) &= p_{v-1}(z) + z \tilde{c}_v p_{v-1}(z). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p_v(z) &= \Gamma_{(c_v)}(z p_{v-1}(z) + c_v p_{v-1}(z)), \\ p_v(z) &= p_{v-1}(z) + z \tilde{c}_v p_{v-1}(z). \end{aligned}} \right\} (v \geq 1)$$

Wird als $(n+1)$ -gliedrige Funktionenspalte $\begin{pmatrix} p_v(z) \\ p_v(z) \end{pmatrix} = \mathfrak{P}_v(z)$ eingeführt, so lautet die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(z) &= \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{P}_v(z) &= \begin{pmatrix} z \Gamma_{(c_v)} & c_v \\ z \tilde{c}_v & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{P}_{v-1}(z) \quad (v \geq 1), \end{aligned}$$

in expliziter Schreibweise ist also:

$$\mathfrak{P}_v(z) = \begin{pmatrix} z \Gamma_{(c_v)} & c_v \\ z \tilde{c}_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \Gamma_{(c_{v-1})} & c_{v-1} \\ z \tilde{c}_{v-1} & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} z \Gamma_{(c_1)} & c_1 \\ z \tilde{c}_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkenswert sind noch die folgenden Feststellungen: $g_v(z)$ ist auf $|z| = 1$ noch regulär und nimmt dort Werte vom Absolutbetrag 1 an, wie sofort aus (3.10) ersichtlich ist. — Im Gegensatz zum Falle $n = 1$ können für $n \geq 2$ die $g_v(z)$ auch für $v = 2$ schlicht sein. Was unter Schlichtheit einer Funktionenspalte zu verstehen ist, wird in § 5 erläutert werden.

Im Hinblick auf späteren Gebrauch mögen noch die ersten der Koeffizientenungleichungen (3.9) und die zugehörigen Schrankenfunktionenspalten explizit in a_0, a_1, a_2, \dots hingeschrieben werden:

$$(3.11) \text{ a) } v = 0: \quad |a_0| \leq 1; \quad g_0(z) = e, \quad |e| = 1;$$

$$(3.11) \text{ b) } v = 1: \quad (|a_0| < 1) \frac{1}{v^2(a_0)} |\Gamma_{(a_0)} a_1| \leq 1$$

$$(\text{d. h. explizit: } |\tilde{a}_0 a_1|^2 - |a_0|^2 |a_1|^2 + |a_1|^2 \leq (1 - |a_0|^2)^2),$$

$$g_1(z) = \Gamma_{(a_1)} \frac{e z + a_0}{1 + \tilde{a}_0 e z}, \quad |e| = 1;$$

$$(3.11) \text{ c) } v = 2: \quad (|a_0| < 1, |\tilde{a}_{10}| < 1)$$

$$\frac{1}{v^2(a_{10})} |\Gamma_{(a_{10})} a_{11}| \leq 1,$$

$$\text{wo } a_{10} = \frac{\Gamma_{(a_0)} a_1}{v^2(a_0)}, \quad a_{11} = \frac{\Gamma_{(a_0)} \left(a_2 + \frac{a_1 \tilde{a}_0 a_1}{v^2(a_0)} \right)}{v^2(a_0)},$$

$$g_2(z) = \Gamma_{(a_2)} \frac{a_0 + (a_{10} + a_0 \tilde{a}_{10} e) z + \Gamma_{(a_{10})} e z^2}{1 + (\tilde{a}_{10} e + \tilde{a}_0 a_{10}) z + \tilde{a}_0 \Gamma_{(a_{10})} e z^2}, \quad |e| = 1.$$

Die Funktionenspalte $g_1(z)$ mag etwas eingehender untersucht werden. $g_1(z)$ bildet den EK auf einen ebenen (zweidimensionalen) Bereich ab, der

dann natürlich eine Kreisscheibe ist. Es läßt sich nämlich $g_1(z)$ in der Form:

$$g_1(z) = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 g_1(z)$$

schreiben, wo etwa

$$(3.12) \quad \tilde{b}_0 = \frac{F(c_1)(E - e\tilde{e})c_1}{1 - |\tilde{e}c_1|^2}, \quad \tilde{b}_1 = \frac{F(c_1)(E - c_1\tilde{c}_1)e}{1 - |\tilde{e}c_1|^2},$$

$$g_1(z) = \frac{z + \tilde{e}c_1}{1 + \tilde{c}_1 e z}$$

gesetzt werden kann. Hier gilt:

$$(3.13) \quad |\tilde{b}_0|^2 + |\tilde{b}_1|^2 = 1, \quad |\tilde{b}_0| < 1, \quad \tilde{b}_0 \tilde{b}_1 = 0.$$

Zu jedem vorgegebenen $\alpha = \tilde{e}c_1$ mit $|\alpha| < 1$ und vorgegebenen \tilde{b}_0, \tilde{b}_1 , die (3.13) erfüllen, lassen sich eindeutig die Spalten e, c_1 aus (3.12) berechnen, nämlich

$$c_1 = \tilde{b}_0 + \alpha \tilde{b}_1, \quad e = \frac{F(c_1)\tilde{b}_1}{|\tilde{b}_1|^2},$$

wie leicht nachgeprüft werden kann. Das heißt, die Menge der Abbildungen, die durch $g_1(z)$ vermittelt wird, läßt sich als die Menge derjenigen Abbildungen charakterisieren, die den EK auf die Schnitte der EH mit den analytischen zweidimensionalen Ebenen (Abstand vom o-Punkt kleiner als 1) abbilden.

§ 4. Verzerrungssätze.

Ursprünglich wurden Abschätzungen für $|\tilde{f}'(z)|$ als Verzerrungssätze bezeichnet. Es ist aber üblich geworden, auch Abschätzungen für $|\tilde{f}(z)|$ unter die Verzerrungssätze zu rechnen, und in diesem Sinne enthielt § 2 bereits einige Verzerrungssätze. Das Ziel wird jetzt sein, Abschätzungen für den Betrag der Ableitung einer beschränkten Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$ zu gewinnen, später in die Schranken dieser Abschätzungen und solcher für $|\tilde{f}(z)|$ aber noch die ersten Koeffizienten der Entwicklung

$$\tilde{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

aufzunehmen.

(2.11) läßt sich in der Form

$$(4.1) \quad \left| \Gamma_{(\tilde{f}(z_0))} \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)}{z - z_0} \frac{1 - \bar{z}_0 z}{1 - \overline{\tilde{f}(z_0)} \tilde{f}(z)} \right| \leq 1$$

schreiben. Wird hier der Grenzübergang $z \rightarrow z_0$ gemacht, so bleibt die Ungleichung gültig. Für z_0 dann wieder z schreibend, ergibt sich also:

$$(4.2) \quad \left| \Gamma_{(\tilde{f}(z))} \tilde{f}'(z) \frac{1 - z\bar{z}}{1 - \overline{\tilde{f}(z)} \tilde{f}(z)} \right| \leq 1.$$

Die Schranke wird offenbar auch hier von den Funktionenspalten (2.6), dort $w_0 = \tilde{f}(z_0)$ setzend, im Punkte $z = z_0$ angenommen. Darüber hinaus läßt sich aber sogar feststellen, daß jede dieser Funktionenspalten für alle z des EK die Schranke in (4.2) erreicht, daß also [vgl. den Übergang von (2.6) zu (2.12)]

$$(4.3) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma_{(a)} \frac{ez - a}{1 - \bar{a}ez}, \quad |a| < 1, \quad |e| = 1,$$

für alle z zugleich Schrankenfunktionenspalte in (4.2) ist. Das aber folgt einfach aus den Tatsachen, daß $\tilde{f}(z) = e z$ für (4.2) Schrankenfunktionenspalte ist und daß die linke Seite von (4.1) nach den Feststellungen über die Invarianz des Linienelements [vgl. (1.29)] $\frac{1}{v^2(\tilde{f})} |\Gamma(\tilde{f}) d\tilde{f}|$ invariant ist gegenüber Automorphismen von $|\tilde{f}| < 1$. Daß die Funktionenspalten (4.3) die einzigen sind, die in (4.2) das Gleichheitszeichen bewirken, wird später gezeigt.

Zusammenfassend und geringfügig ergänzend läßt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 8: Wenn $\tilde{f}(z)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, so gilt:

$$(4.4) \quad |\Gamma'(\tilde{f}(z)) \tilde{f}'(z)| \leq \frac{1 - |\tilde{f}(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Schrankenfunktionenspalten sind neben jeder Konstanten vom Betrag 1 genau die folgenden:

$$\tilde{f}(z) = \Gamma_{(a)} \frac{e z - a}{1 - \bar{a} e z}, \quad |e| = 1, |a| < 1,$$

und zwar jede für alle z des EK zugleich.

Wenn mit $ds = \frac{|dz|}{1 - z\bar{z}}$ das hyperbolische Linienelement einer Kurve $z(s)$ im EK und mit $dS = \frac{1}{v^2(w)} |\Gamma(w) dw|$ das Linienelement der Bildkurve $w = \tilde{f}(z(s))$ in bezug auf die Hermitesche Geometrie (1.29) in der EH bezeichnet werden, so besagt also Satz 8, daß $\frac{dS}{ds} \leq 1$ ist, also folgt hieraus auch für die Längenintegrale $s = \int ds$, $S = \int dS$ im Sinne dieser beiden Geometrien für Kurve und Bildkurve, daß dann immer gilt: $S \leq s$.

Der Differentialquotient $\frac{dS}{ds}$ ist die erste einer Reihe von Differentialinvarianten im Sinne der beiden oben genannten Geometrien, die durch folgenden Prozeß erzeugt werden können.

Von $w = \tilde{f}(z)$ ausgehend, bilden wir:

$$\mathfrak{h}(\zeta) = \Lambda \Gamma'(\tilde{f}(z_0)) \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)}{1 - \overline{\tilde{f}(z_0)} \tilde{f}(z)} \quad \text{mit } z = \frac{e\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 e\bar{\zeta}}, \quad \Lambda \text{ unitär, } |e| = 1$$

und erhalten:

$$\mathfrak{h}(\zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda \mathfrak{U}_r\{\tilde{f}\} e^r \zeta^r,$$

dann liefert jede Elimination der unitären Matrix Λ und der Größe e aus den Koeffizientenspalten Differentialinvarianten der geforderten Art, wie z. B.

$$|\tilde{\mathfrak{U}}_r \mathfrak{U}_\mu| \quad \text{oder} \quad J_r = |\mathfrak{U}_r| = \frac{1}{r!} |\mathfrak{h}^{(r)}(0)|.$$

Es ergibt sich (wenn wir im Endergebnis wieder z statt z_0 schreiben und bei \tilde{f} und seinen Ableitungen das weggelassene Argument z_0 jetzt wieder z heißen soll):

$$(4.4a) \quad \mathfrak{U}_1\{\tilde{f}\} = \frac{\Gamma(\tilde{f}) \tilde{f}'}{v^2(\tilde{f})} (1 - z\bar{z}),$$

$$(4.4b) \quad \mathfrak{U}_2\{\tilde{f}\} = \frac{\Gamma(\tilde{f})}{v^2(\tilde{f})} \left\{ \left(\frac{1}{2} \tilde{f}'' (1 - z\bar{z}) - \bar{z} \tilde{f}' \right) v^2(\tilde{f}) + \tilde{f}' \tilde{f}'' (1 - z\bar{z}) \right\} (1 - z\bar{z})$$

Aus Satz 8 folgt leicht eine nur von $|z|$ abhängende scharfe Schranke für $|\tilde{f}'(z)|$:

Satz 9: Wenn $\tilde{f}(z)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, so gilt:

$$(4.5) \quad |\tilde{f}'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Die Funktionenspalten

$$\tilde{f}(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} e, \quad |a| < 1, |e| = 1,$$

und nur diese, sind Schrankenfunktionenspalten, und zwar im Punkte $z = a$.

Beweis: Wegen (1.9) und den sich anschließenden Feststellungen über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens folgt aus (4.4)

$$v(\tilde{f}(z)) |\tilde{f}'(z)| \leq \frac{v^2(\tilde{f}(z))}{1-|z|^2},$$

und da $v(\tilde{f}) \leq 1$, ist (4.5) schon bewiesen. Die Aussage über die Schrankenfunktionenspalten läßt sich durch eine triviale Rechnung aus Satz 8 herleiten.

Die bei der Lösung des Koeffizientenproblems gewonnenen Ungleichungen (3.9) und speziell (3.11) geben die Möglichkeit an die Hand, einige der bisher abgeleiteten Verzerrungsätze auf einem anderen Wege zu erhalten, aber ihnen noch weitergehende hinzuzufügen, die übrigens zum Teil auch direkt mittels des SCHURschen Algorithmus aufzufinden sind. Wenn $\tilde{f}(z)$ eine beschränkte Funktionenspalte ist, so ist auch

$$(4.6) \quad g(z) = \tilde{f}(l(z))$$

beschränkt, falls $l(z)$ ein Automorphismus des EK, speziell etwa

$$(4.7) \quad l(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}, \quad |z_0| < 1.$$

Die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von (4.6) um den Nullpunkt der z -Ebene sind

$$(4.8) \quad \begin{cases} a) & a_0 = g(0) = \tilde{f}(z_0), \\ b) & a_1 = g'(0) = (1 - z_0 \bar{z}_0) \tilde{f}'(z_0), \\ c) & a_2 = \frac{1}{2} g''(0) = \frac{1}{2} (1 - z_0 \bar{z}_0)^2 \tilde{f}''(z_0) - \bar{z}_0 (1 - z_0 \bar{z}_0) \tilde{f}'(z_0), \end{cases}$$

und für sie gelten die Koeffizientenungleichungen (3.11). Die zweite dieser Ungleichungen ergibt, den Index 0 wieder weglassend:

$$(4.9) \quad \frac{1 - z \bar{z}}{v^2(\tilde{f}(z))} |I_{(f(z))}' \tilde{f}'(z)| \leq 1.$$

Das ist aber genau die Ungleichung (4.2). Soll in einem Punkte z_0 des EK das Gleichheitszeichen stehen, so muß [vgl. (3.11 b)]

$$g(z) = I_{(a_0)} \frac{ez + a_0}{1 + \bar{a}_0 ez}, \quad |a_0| < 1, |e| = 1,$$

sein, also

$$\tilde{f}(z) = I_{(a_0)} \frac{e \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} + a_0}{1 + \bar{a}_0 e \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}}.$$

Dies läßt sich nach Feststellungen des § 2 auch in der Form (4.3) schreiben, und jede solche Funktionenspalte ist für alle z_0 des EK gleichzeitig Schrankenfunktionenspalte, wie auch aus jenen Feststellungen hervorgeht.

Durch einen Integrationsprozeß läßt sich aus (4.9), die vermöge (1.10) zur Ungleichung

$$(4.10) \quad \frac{|\tilde{f}(z)|}{v^2} \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|f(z)|}{1-z\bar{z}}$$

abgeschwächt werde, Ungleichung (2.19) zu einem Teil wiedergewinnen. Es werde bei dieser Rechnung die folgende auch sonst bekanntlich sehr vorteilhafte Symbolik verwandt.

Sei $g(x, y)$ eine komplexwertige Funktionenspalte der beiden reellen Argumente x, y , die in einem Punkte x_0, y_0 der $x-y$ -Ebene partiell differenzierbar nach beiden Variablen sei.

Dann werden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z} g = g_z$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = g_{\bar{z}}$ („Ableitungen von g nach z und \bar{z} “) definiert⁶⁾ durch:

$$(4.11) \quad g_z = \frac{1}{2} (g_x - i g_y), \quad g_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (g_x + i g_y).$$

Anzumerken ist übrigens noch die allgemein gültige Beziehung:

$$(4.12) \quad \overline{(f_z)} = (\bar{f})_{\bar{z}}.$$

In dieser Symbolik lauten die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen: $\bar{f}_z = 0$, so daß im Falle der komplexen Differenzierbarkeit von (4.11) als Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$ der komplexen Variablen z gilt:

$$(4.13) \quad \tilde{f}'(z) = \tilde{f}_z(z, \bar{z}).$$

Im übrigen lautet — das sei hier ohne genaue Präzisierung erwähnt — eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Winkeltreue von (4.11):

$$\overline{(\tilde{f}_z)} \tilde{f}_z = 0.$$

Die regulären Funktionenspalten und deren Konjugierte bilden winkeltreu ab, aber für $n \geq 2$ auch noch andere, wie das Beispiel $\tilde{f}(z, \bar{z}) = \left(\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} \right)$ zeigt.

Für das hier vorliegende spezielle Problem wird dieser Kalkül nur für Funktionen, und nicht für Funktionenspalten in Anwendung kommen, und zwar für den Absolutbetrag $\vartheta(z, \bar{z}) = |\tilde{f}(z)|$ einer beschränkten Funktionen-

⁶⁾ Diese Definition wird von dem Verlangen nach der Gültigkeit der Kettenregel nahegelegt. Es gilt nämlich dann für das Differential:

$$d g = g_x dx + g_y dy = g_z dz + g_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Dementsprechend drücken sich natürlich auch die höheren Differentiale $d^{(v)}g$, soweit sie existieren, in der komplexen Schreibweise aus:

$$d^{(v)}g = \left(\frac{\partial}{\partial z} dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right)^{(v)} g.$$

Im Hinblick auf die Rolle, die z, \bar{z} in diesem Kalkül spielen und die man mit der Rolle von „unabhängigen“ Veränderlichen vergleichen kann, erlauben wir uns auch gelegentlich den Gebrauch der „formalen“ Schreibweise:

$$g(x, y) = \tilde{f}(z, \bar{z}).$$

spalte, die nicht eine Konstante vom Betrag 1 ist. Aus $\partial^2 = \tilde{f}(z) \bar{f}(z)$ folgt durch partielle Ableitung nach z [man beachte (0.3), (4.12) und (4.13)]:

$$2 \partial \partial_z = \tilde{f}(z) \bar{f}'(z),$$

so daß (4.10) nun lautet:

$$\frac{2 \partial \partial_z}{1 - \partial^2} \leq \frac{\partial}{1 - z \bar{z}}.$$

Für $\partial \neq 0$ ist der Übergang zu

$$(4.14) \quad \frac{2 |\partial_z|}{1 - \partial^2} \leq \frac{1}{1 - z \bar{z}}$$

gestattet. Wegen des Satzes von der Isoliertheit der ∂ -Stellen, der sich trivialerweise auf Funktionenspalten überträgt, und wegen der Stetigkeit von $|\partial_z|$ gilt (4.14) sogar für alle z im EK, trivialerweise auch dann, wenn der Satz über die Isoliertheit der ∂ -Stelle versagt, also $\partial = 0$ ist. Wird nun ∂ als Funktion der Polarkoordinaten $r = \sqrt{z \bar{z}}$, $\varphi = \arctg \frac{z - \bar{z}}{i(z + \bar{z})}$ aufgefaßt, so gilt wegen $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2z} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ ($z \neq 0$):

$$|\partial_z|^2 = \frac{1}{4} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) \geq \frac{1}{4} \partial_r^2,$$

so daß (4.14) nun übergeht in

$$(4.15) \quad \frac{|\partial_r|}{1 - \partial^2} \leq \frac{1}{1 - r^2}.$$

Wenn der ∂ -Wert in $z = 0$ mit ∂_0 bezeichnet wird, so ergibt sich durch Integration und anschließende Umformung:

$$\begin{aligned} \left| \log \left(\frac{1 + \partial}{1 - \partial} \frac{1 - \partial_0}{1 + \partial_0} \right) \right| &= \left| 2 \cdot \int_0^r \frac{\partial_\varrho}{1 - \partial^2} d\varrho \right| \leq 2 \cdot \int_0^r \frac{d\varrho}{1 - \varrho^2} = \log \frac{1 + r}{1 - r}, \\ \frac{1 - r}{1 + r} &\leq \frac{1 + \partial}{1 - \partial} \frac{1 - \partial_0}{1 + \partial_0} \leq \frac{1 + r}{1 - r}, \\ (4.16) \quad \frac{\partial_0 - r}{1 - \partial_0 r} &\leq \partial \leq \frac{\partial_0 + r}{1 + \partial_0 r}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann aber auch vorgegangen werden, um weitergehende Ungleichungen zu gewinnen. Wird nun etwa

$$(4.17) \quad \frac{1 - z \bar{z}}{v^2 (\tilde{f}(z))} |I_{(\tilde{f}(z))} \tilde{f}'(z)| = \lambda(z, \bar{z})$$

gesetzt, dann kann die Ungleichung (3.11) c) durch λ und λ_z ausgedrückt werden [vgl. (4.8) c)]. Es ist nämlich:

$$|I_{(\tilde{f})} \tilde{f}'|^2 = \tilde{f} \tilde{f} \tilde{f}' \tilde{f}' + v^2 (\tilde{f}) \tilde{f}' \tilde{f}',$$

$$2 \cdot |I_{(\tilde{f})} \tilde{f}'| \frac{\partial}{\partial z} |I_{(\tilde{f})} \tilde{f}'| = \frac{\partial}{\partial z} (I_{(\tilde{f})} \tilde{f}'^2) = \tilde{f}'' I_{(\tilde{f})} \tilde{f}'',$$

also nach Differentiation von (4.17):

$$\begin{aligned}
2\lambda\lambda_z &= \left(-\frac{2\bar{z}(1-z\bar{z})}{v^4(\bar{f})} + \frac{2(1-z\bar{z})^2\tilde{f}''}{v^4(\bar{f})} \right) |I'_{(0)}\tilde{f}'|^2 + \frac{(1-z\bar{z})^2}{v^4(\bar{f})} \tilde{f}'' I'_{(0)}\tilde{f}'' \\
&= 2\frac{\tilde{f}'' I'_{(0)}\tilde{f}''}{v^4(\bar{f})} \left\{ -\bar{z}(1-z\bar{z})\tilde{f}' + \frac{(1-z\bar{z})^2\tilde{f}'\tilde{f}'}{v^2(\bar{f})} + \frac{1}{2}(1-z\bar{z})^2\tilde{f}'' \right\} \\
&= \frac{2}{1-z\bar{z}} \frac{(1-z\bar{z})^2\tilde{f}'' I'_{(0)}\tilde{f}''}{v^4(\bar{f})} \left\{ \left(\frac{1}{2}(1-z\bar{z})^2\tilde{f}'' - \bar{z}(1-z\bar{z})\tilde{f}' \right) + \frac{(1-z\bar{z})^2\tilde{f}'\tilde{f}'}{v^2(\bar{f})} \right\}.
\end{aligned}$$

Gemäß (4.8) entsprechen sich also

$$(1-z\bar{z})\lambda\lambda_z \text{ und } \frac{\tilde{a}_1 I'_{(0)}\tilde{a}_2}{v^4(a_0)} \left(a_2 + \frac{a_1\tilde{a}_0 a_1}{v^2(a_0)} \right),$$

in der Bezeichnungsweise von (3.11) also:⁷⁾

$$(4.18) \quad (1-z\bar{z})\lambda\lambda_z \text{ und } \tilde{a}_{10} \tilde{a}_{11}.$$

Es entsprechen sich auch

$$(4.19) \quad \lambda \text{ und } |a_{10}|.$$

Ungleichung (1.10) auf (3.11) c) anwendend, folgt unter Berücksichtigung von (4.18) und (4.19):

$$(1-z\bar{z})\lambda|\lambda_z| \leq \lambda(1-\lambda^2).$$

Mit der Beschränkung auf $\lambda \neq 0$ (die nach dem an der entsprechenden Stelle über ϑ oben Gesagten aber unnötig wird) ist der Übergang zu

$$\frac{|\lambda_z|}{1-\lambda^2} \leq \frac{1}{1-z\bar{z}}$$

möglich. Nun wieder λ als Funktion der Polarkoordinaten r und φ auffassend, ergibt sich wie beim Übergang von (4.14) zu (4.15):

$$\frac{|\lambda_r|}{1-\lambda^2} \leq \frac{2}{1-r^2}.$$

Integration liefert hieraus, wenn der λ -Wert im Nullpunkt mit λ_0 bezeichnet wird:

$$\left| \log \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0} \right) \right| \leq \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2,$$

also

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 &\leq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0} \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2, \\
(4.20) \quad \frac{\lambda_0 - 2r + \lambda_0 r^2}{1 - 2\lambda_0 r + r^2} &\leq \lambda \leq \frac{\lambda_0 + 2r + \lambda_0 r^2}{1 + 2\lambda_0 r + r^2}.
\end{aligned}$$

Um hieraus Abschätzungen für $|\tilde{f}(z)|$ zu gewinnen, ist eine weitere Integration nötig. Ist ϑ wie oben erklärt, und zwar als Funktion der Polarkoordinaten aufgefaßt, und werden obige Rechnungen übernommen, so liegt hier folgende Ungleichung vor:

$$\lambda \geq \frac{\vartheta_r(1-r^2)}{1-\vartheta^2},$$

also gemäß (4.20):

$$\frac{\vartheta_r}{1-\vartheta^2} \leq \frac{\lambda_0 + 2r + \lambda_0 r^2}{1 + 2\lambda_0 r + r^2} \frac{1}{1-r^2},$$

⁷⁾ oder: $(1-z\bar{z})\lambda\lambda_z = \tilde{\mathfrak{A}}_1(\bar{f})\mathfrak{A}_2(\bar{f})$ unter Verwendung der Abkürzungen (4.4, a), (4.4, b).

$$\left| \log \left(\frac{1+\vartheta}{1+\vartheta} \frac{1-\vartheta_0}{1+\vartheta_0} \right) \right| \leq 2 \int_0^r \frac{\lambda_0 + 2\varrho + \lambda_0 \varrho^2}{1 + 2\lambda_0 \varrho + \varrho^2} \frac{1}{1-\varrho^2} d\varrho = \log \frac{1 + 2\lambda_0 r + r^2}{1-r^2},$$

$$\frac{1-r^2}{1 + 2\lambda_0 r + r^2} \leq \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \frac{1-\vartheta_0}{1+\vartheta_0} \leq \frac{1 + 2\lambda_0 r + r^2}{1-r^2},$$

$$\frac{\vartheta_0 - \lambda_0(1-\vartheta_0)r - r^2}{1 + \lambda_0(1-\vartheta_0)r - \vartheta_0 r^2} \leq \vartheta \leq \frac{\vartheta_0 + \lambda_0(1+\vartheta_0)r + r^2}{1 + \lambda_0(1+\vartheta_0)r + \vartheta_0 r^2}.$$

Zusammenfassend wird der folgende Verzerrungssatz formuliert, dessen Aussage über die Schrankenfunktionenspalten sich durch Rechnung verifizieren läßt:

Satz 10: Wenn

$$(4.21) \quad \tilde{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

eine beschränkte Funktionenspalte ist, für die gilt:

$$\vartheta_0 = |a_0| < 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{v^2(a_0)} |\Gamma(a_0) a_1| < 1,$$

dann bestehen die folgenden Abschätzungen ($|z| = r$):

$$(4.22) \quad \frac{\lambda_0 - 2r + \lambda_0 r^2}{1 - 2\lambda_0 r + r^2} \frac{1}{1-r^2} \leq \frac{1}{v^2(\tilde{f}(z))} |\Gamma(\tilde{f}(z)) \tilde{f}'(z)| \leq \frac{\lambda_0 + 2r + \lambda_0 r^2}{1 + 2\lambda_0 r + r^2} \frac{1}{1-r^2},$$

$$(4.23) \quad \frac{\vartheta_0 - \lambda_0(1-\vartheta_0)r - r^2}{1 + \lambda_0(1-\vartheta_0)r - \vartheta_0 r^2} \leq |\tilde{f}(z)| \leq \frac{\vartheta_0 + \lambda_0(1+\vartheta_0)r + r^2}{1 + \lambda_0(1+\vartheta_0)r + \vartheta_0 r^2}.$$

Die Funktionenspalten

$$(4.24) \quad \tilde{f}(z) = \frac{\pm \vartheta_0 + \varepsilon \lambda_0 (1 \pm \vartheta_0) z + \varepsilon^2 z^2}{1 + \varepsilon \lambda_0 (1 \pm \vartheta_0) z \pm \varepsilon^2 \vartheta_0 z^2} e, \quad |\varepsilon| = 1, \quad |e| = 1,$$

sind Schrankenfunktionenspalten (oberes Vorzeichen ergibt die obere, unteres die untere Schranke von (4.23); für (4.22) spielt dies Vorzeichen keine Rolle), linksseitig natürlich nur, solange die Schranken nicht negativ sind. Die Schranken werden erreicht für (4.23) im Punkte $z = \bar{\varepsilon} r$, für (4.22) in $z = \bar{\varepsilon} r$ bzw. $z = -\bar{\varepsilon} r$ für die obere bzw. untere Schranke.

Es ist wünschenswert, in die Schranken der gewonnenen Ungleichungen neben r nur die Absolutbeträge von a_0 und a_1 eingehen zu lassen. Es gilt also noch, λ_0 geeignet nach oben oder unten abzuschätzen (für $n \geq 2$ wenigstens), und diese neuen Werte in (4.22) und (4.23) einzusetzen. Da die oberen Schranken monoton steigende Funktionen von λ_0 sind, ist in ihnen λ_0 durch einen Wert $\lambda_0^{(1)} \geq \lambda_0$ zu ersetzen. Die unteren Schranken in (4.22) bzw. (4.23) sind monoton steigend bzw. fallend; in ihnen ist also λ_0 durch einen Wert $\lambda_0^{(2)} \leq \lambda_0$ bzw. $\lambda_0^{(1)} \geq \lambda_0$ zu ersetzen. Gemäß (1.9) dürfen $\lambda_0^{(1)} = \frac{|a_1|}{v^2(a_0)}$, $\lambda_0^{(2)} = \frac{|a_1|}{v(a_0)}$ gesetzt werden, und das sind für $n \geq 2$ die besten Schranken.

Für den Fall der Ungleichung (4.23) ist der neuentstehende Verzerrungssatz besonders durchsichtig und soll formuliert werden:

Satz 11: Wenn (4.21) eine beschränkte Funktionenspalte ist, für die gilt:

$$\vartheta_0 = |a_0| < 1, \quad \lambda_0^{(1)} = \frac{|a_1|}{v^2(a_0)},$$

dann bestehen die folgenden Abschätzungen ($|z| = r$):

$$\frac{\vartheta_0 - \lambda_0^{(1)}(1 - \vartheta_0)r - r^2}{1 + \lambda_0^{(1)}(1 - \vartheta_0)r - \vartheta_0 r^2} \leq |\tilde{f}(z)| \leq \frac{\vartheta_0 + \lambda_0^{(1)}(1 + \vartheta_0)r + r^2}{1 + \lambda_0^{(1)}(1 + \vartheta_0)r + \vartheta_0 r^2}.$$

Die Funktionenspalten (4.24) sind Schrankenfunktionenspalten (linksseitig natürlich nur, solange die Schranke nicht negativ ist), und zwar im Punkte $z = \bar{\varepsilon} r$ (oberes Vorzeichen ergibt die obere, unteres die untere Schranke.)

§ 5. Folgerungen aus den Verzerrungssätzen. Schlichtheitschranke.

Aus den unteren Schranken der Abschätzungen von $|\tilde{f}(z)|$ ergeben sich unmittelbar die Radien r_0 derjenigen Kreise $|z| < r_0$, in denen alle beschränkten Funktionenspalten

$$\tilde{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit vorgegebenen Absolutbeträgen des ersten oder der ersten beiden Koeffizienten keine ϑ -Stelle besitzen, auf deren Rand aber mindestens eine dieser Funktionenspalten eine ϑ -Stelle hat. Aus (4.16) oder aus Satz 7 folgt:

$$r_0 = |a_0|,$$

oder in verschärfter Form ergibt sich aus Satz 11 r_0 als die nichtnegative Wurzel der in r quadratischen Gleichung

$$|a_0| - \frac{|a_1|}{1 + |a_0|} r - r^2 = 0.$$

Ähnliche Schranken existieren für die ϑ -Stellen von Differential- und von Differenzenquotient. Aus der linken Seite der Ungleichung (4.22) läßt sich eine solche für den Differentialquotienten — denn sie ist die gleiche wie für den invarianten Differentialquotienten, der in (4.22) vorkommt, weil der eine genau dann zu ϑ wird, wenn das mit dem anderen der Fall ist — herauslesen, und zwar ist sie für $\lambda_0 = 0$ Null, für $\lambda_0 > 0$ die kleinere der Wurzeln der in r quadratischen Gleichung

$$(5.1) \quad \lambda_0 - 2r + \lambda_0 r^2 = 0.$$

Um die entsprechende Frage für den Differenzenquotienten zu lösen, werden Abschätzungen desselben benötigt. Ein erster Satz in dieser Richtung ist der folgende:

Satz 12: Wenn

$$\tilde{f}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, |a_1| < 1,$$

eine beschränkte Funktionenspalte ist, so gelten die folgenden Ungleichungen ($|z_1| = r_1 < 1$, $|z_0| = r_0 < 1$, $z_1 \neq z_0$):

$$\begin{aligned} \frac{|a_1| - (r_0 + r_1) + |a_1| r_0 r_1}{1 - |a_1| (r_0 + r_1) + r_0 r_1} &\leq \left| F(\tilde{f}(z_0)) \frac{\tilde{f}(z_1) - \tilde{f}(z_0)}{z_1 - z_0} \frac{1 - \bar{z}_0 z_1}{1 - \overline{\tilde{f}(z_0)} \tilde{f}(z_1)} \right| \\ &\leq \frac{|a_1| + (r_0 + r_1) + |a_1| r_0 r_1}{1 + |a_1| (r_0 + r_1) + r_0 r_1} \end{aligned}$$

Schrankenfunktionenspalten sind genau die folgenden (linksseitig natürlich nur, solange die Schranke nicht-negativ ist):

$$f(z) = \begin{cases} e z^2, & |e| = 1, & \text{für } a_1 = 0, \\ \frac{a_1 \pm \varepsilon z + |a_1|}{|a_1| \pm 1 \pm |a_1| \varepsilon z} z, & |\varepsilon| = 1, & \text{für } a_1 \neq 0, \end{cases}$$

und zwar in den Punkten $z_0 = \bar{\varepsilon} r_0$, $z_1 = \bar{\varepsilon} r_1$ (\pm für die obere untere Schranke).

Beweis: Es werde der sog. invariante Differenzenquotient (vgl. Satz 2)

$$(5.2) \quad \Gamma(f(z_0)) \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{1 - \bar{z}_0 z}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} = \vartheta(z_0, z)$$

gesetzt. Dann ist nach Satz 5 $\vartheta(z_0, z)$ eine beschränkte Funktionenspalte bei festem z_0 und variablem $z \in \text{EK}$. Es ist $\vartheta(z_0, 0) = \frac{f(z_0)}{z_0}$, und jetzt kann der Verzerrungssatz (2.19) auf $\vartheta(z_0, z)$ angewandt werden:

$$(5.3) \quad \frac{\left| \frac{f(z_0)}{z_0} - |z| \right|}{1 - \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| |z|} \leq |\vartheta(z_0, z)| \leq \frac{\left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| + |z|}{1 + \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| |z|}$$

Da beide Schranken monoton steigend bezüglich $\left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right|$ sind und da $\frac{f(z_0)}{z}$ nach dem SCHWARZSchen Lemma auch eine beschränkte Funktionenspalte ist, können in (5.3) die Abschätzungen (2.19) nun auf $\frac{f(z)}{z}$ angewandt werden, so daß sich ergibt:

$$\frac{\frac{|a_1| - r_0}{1 - |a_1| r_0} - r}{1 - \frac{|a_1| - r_0}{1 - |a_1| r_0} r} \leq |\vartheta(z_0, z)| \leq \frac{\frac{|a_1| + r_0}{1 + |a_1| r_0} + r}{1 + \frac{|a_1| + r_0}{1 + |a_1| r_0} r}.$$

Das Gleichheitszeichen wird für $r_0 \neq 0$ und $a_1 \neq 0$ höchstens dann erreicht, wenn

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{a_1 \pm \varepsilon z + |a_1|}{|a_1| \pm 1 \pm |a_1| \varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

und zwar in $z_0 = \bar{\varepsilon} r_0$. Da im Falle dieser Schrankenfunktionenspalten

$$\vartheta(z_0, z) = \frac{a_1}{|a_1|} \cdot \frac{\frac{|a_1| \pm r_0}{1 \pm |a_1| r_0} \pm \varepsilon z}{1 \pm \frac{|a_1| \pm \bar{\varepsilon} z_0}{1 \pm |a_1| \bar{\varepsilon} z_0} \varepsilon z}$$

ist, werden die Gleichheitszeichen von ihnen auch stets erreicht, und zwar in $z = \bar{\varepsilon} r$. Die Aussage des Satzes über die Schrankenfunktionenspalten im Falle $a_1 = 0$ ist trivial, und im Falle $r_0 = 0$ ist sie aus früherem (§ 2) bekannt.

Ein weitergehender Satz ist der folgende:

Satz 13: Wenn

$$(5.4) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

eine beschränkte Funktionenspalte ist, wo a_0 und $a_{10} = \frac{1}{v^2(a_0)} \Gamma(a_0) a_1$ Beträge kleiner als 1 besitzen, so gelten die folgenden Ungleichungen ($|z_1| = r_1 < 1$, $|z_0| = r_0 < 1$, $z_1 \neq z_0$):

$$\frac{|a_{10}| - (r_0 + r_1) + |a_{10}| r_0 r_1}{1 - |a_{10}| (r_0 + r_1) + r_0 r_1} \leq \left| \Gamma(\bar{f}(z_0)) \frac{f(z_1) - \bar{f}(z_0)}{z_1 - z_0} \frac{1 - \bar{z}_0 z_1}{1 - \overline{\bar{f}(z_0)} \bar{f}(z_1)} \right| \leq \frac{|a_{10}| + (r_0 + r_1) + |a_{10}| r_0 r_1}{1 + |a_{10}| (r_0 + r_1) + r_0 r_1}$$

Schrankenfunktionenspalten sind genau die folgenden (linksseitig natürlich nur, so lange die Schranke nicht-negativ ist):

$$\bar{f}(z) = \Gamma(a_0) \frac{g(z) + a_0}{1 + \bar{a}_0 g(z)},$$

wo

$$g(z) = \begin{cases} e z^2, |e| = 1, & \text{für } a_{10} = 0, \\ \frac{a_{10}}{|a_{10}|} \frac{\pm \varepsilon z + |a_{10}|}{1 \pm |a_{10}| \varepsilon z} z, |e| = 1, & \text{für } a_{10} \neq 0, \end{cases}$$

und zwar in den Punkten $z_0 = \bar{\varepsilon} r_0$, $z_1 = \bar{\varepsilon} r_1$ (\pm für die $\begin{cases} \text{obere} \\ \text{untere} \end{cases}$ Schranke).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 12, wenn beachtet wird, daß der Betrag des invarianten Differenzenquotienten (5.2) nach Satz 2 invariant ist gegenüber Automorphismen von $|\bar{f}| < 1$ — deshalb auch sein Name — Von $\bar{f}(z)$ wird nämlich zu

$$g(z) = \Gamma(a_0) \frac{\bar{f}(z) - a_0}{1 - \bar{a}_0 \bar{f}(z)} = a_{10} z + \dots$$

übergegangen, und auf $g(z)$ Satz 12 angewandt.

Wann soll nun eine Funktionenspalte $\bar{f}(z)$ schlicht in einem Gebiete \mathcal{G} der z -Ebene genannt werden? Im Falle $n = 1$ heißt $\bar{f}(z)$ schlicht in \mathcal{G} , wenn

$$(5.5) \quad \frac{\bar{f}(z_1) - \bar{f}(z_0)}{z_1 - z_0} \neq 0$$

für alle Punktepaare z_0, z_1 ($z_1 \neq z_0$) aus \mathcal{G} . Es gilt der Satz, daß (5.5) im Falle der Schlichtheit auch in der Grenze $z_1 \rightarrow z_0$ bestehen bleibt, d. h. daß dann auch

$$(5.6) \quad \bar{f}'(z_0) \neq 0$$

für alle z_0 aus \mathcal{G} . Für $n \geq 2$ gilt dies keineswegs mehr, wie einfache Beispiele zeigen ($\bar{f}(z) = a z^2 + b z^3$ etwa, wenn die Matrix (a, b) den Rang 2 hat). Es wird dadurch nahegelegt, nicht nur (5.5) zu fordern, sondern auch noch (5.6): Eine in einem Gebiete \mathcal{G} reguläre Funktionenspalte heißt schlicht in \mathcal{G} , wenn (5.5) für alle $z_0, z_1 \in \mathcal{G}$ ($z_0 \neq z_1$) und (5.6) für alle $z_0 \in \mathcal{G}$ gelten.

Jede beschränkte Funktionenspalte (5.4) mit $a_1 \neq 0$ ist in einem gewissen, genügend kleinen Kreis $|z| < r < 1$ schlicht. Die obere Grenze aller solcher Zahlen r werde mit $\varrho\{\bar{f}\}$ bezeichnet und heiße der Schlichtheitsradius von $\bar{f}(z)$. Die untere Grenze aller Schlichtheitsradien $\varrho\{\bar{f}\}$, wenn \bar{f} die Funktionenspalten einer Familie \mathfrak{F} von im EK regulären Funktionenspalten durchläuft, heißt der Schlichtheitsradius $\varrho(\mathfrak{F})$ dieser Familie.

Satz 14: Sei \mathfrak{F} die Familie derjenigen beschränkten Funktionenspalten

$$\bar{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, |a_0| < 1,$$

für die $|a_{10}| = \frac{1}{v^2(a_0)} |F(a_0) a_1| < 1$ fest vorgegeben ist. Dann ist die Schlichtheits-
 schranke $\varrho(\mathfrak{F})$ Wurzel der Gleichung

$$(5.7) \quad |a_{10}| - 2\varrho + |a_{10}|\varrho^2 = 0,$$

und zwar diejenige, die kleiner als 1 ist. Explizit:

$$\varrho(\mathfrak{F}) = \frac{|a_{10}|}{1 + v(a_{10})}.$$

Beweis: Aus Satz 13 und den in Verbindung mit (5.1) gemachten Darlegungen folgt unmittelbar, daß alle $f(z) \in \mathfrak{F}$ im Kreis $|z| < \varrho_0$ schlicht sind, wo ϱ_0 diejenige Wurzel von (5.7) ist, die kleiner als 1 ist. Also gilt: $\varrho(\mathfrak{F}) \geq \varrho_0$.

Es gibt aber nach Satz 10 Funktionenspalten, nämlich (4.24), die auf $|z| = \varrho_0$ eine o-Stelle der Ableitung haben. Damit ist alles bewiesen.

§ 6. Die Sternschranke.

Von der im EK regulären Funktionenspalte $f(z)$ fordern wir zusätzlich:

$$1) f(z) \neq 0 \text{ für } z \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad 2) f'(z) \neq 0.$$

Die Frage nach einer Verallgemeinerung der Sternigkeit einer Funktion auf Funktionenspalten legt die folgende geometrische Vorstellung nahe. Eine im EK reguläre Funktionenspalte $f(z)$ bildet die radialen Halbstrahlen $z = r e^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $\varphi = \text{const.}$, auf gewisse Kurven im \mathbb{R}^{2n} ab, die in allen ihren Punkten Tangenten besitzen. Der Richtungsvektor einer solchen Tangente ist gegeben durch $\frac{d}{dr} f(r e^{i\varphi}) = f'(z) \cdot \frac{z}{r}$. Wenn dann der Radiusvektor $f(z)$ mit dem Tangentenvektor einen Winkel τ bildet, dessen absoluter Betrag für alle Punkte z aus $0 < |z| < r_0$ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bleibt, so heiße die Funktionenspalte $f(z)$ sternig in $|z| < r_0$. Es gilt:

$$\cos \tau = \frac{1}{|f(z)| |f'(z)|} \Re \{ \overline{f(z)} f'(z) \}.$$

Als Bedingung für die Sternigkeit einer Funktionenspalte $f(z)$ in $|z| < r_0$ ergibt sich also:

$$\Re \{ z \overline{f(z)} f'(z) \} > 0 \quad \text{in} \quad 0 < |z| < r_0.$$

Satz 15: Eine im Kreise $|z| < r_0$ reguläre Funktionenspalte mit einer einfachen o-Stelle im Nullpunkt ist genau dann sternig in $|z| < r_0$, wenn

$$(6.3) \quad \Re \{ z \overline{f(z)} f'(z) \} > 0 \quad \text{in} \quad 0 < |z| < r_0.$$

Daß zu jeder im Nullpunkt regulären Funktionenspalte

$$(6.4) \quad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

eine Kreisscheibe um den Nullpunkt existiert, in der $f(z)$ sternig ist, ist unmittelbar klar. Ist (6.4) eine im EK reguläre Funktionenspalte, so soll die obere Grenze der Radien aller solcher im EK liegenden Kreisscheiben als der Sternigkeitsradius $r\{f\}$ von $f(z)$ bezeichnet werden. Und ist \mathfrak{F} eine Familie von im EK regulären Funktionenspalten (6.4), so heißt die untere Grenze aller ihrer Sternigkeitsradien die Sternigkeitschranke $r(\mathfrak{F})$ der Familie, die

natürlich nur Interesse hat, wenn sie positiv ist. Sie für die Familie \mathfrak{F} der beschränkten Funktionenspalten (6.4) mit gegebenem $|a_1|$ ($0 < |a_1| < 1$) zu finden, ist jetzt die Aufgabe.

Mit (6.4) ist nach dem SCHWARZschen Lemma auch

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + \dots$$

beschränkt, und in g lautet die Bedingung (6.3):

$$(6.5) \quad \Re \{ \tilde{g} (g + z g') \} > 0 \quad \text{in} \quad 0 < |z| < r_0,$$

wo jetzt $r_0 \leq 1$. Ungleichung (4.10) lautet, in $g(z)$ geschrieben:

$$\frac{|\tilde{g} g'|}{|g|^3} \leq \frac{1}{1-z\bar{z}} \frac{1-|g(z)|^2}{|g(z)|},$$

und da $\frac{1-x^2}{x}$ eine für $0 < x < 1$ monoton fallende Funktion der reellen Veränderlichen x ist, folgt unter Verwendung der linken Seite von (4.16) ($|z| = r$):

$$\frac{|\tilde{g} g'|}{|g|^3} \leq \frac{1}{1-r^2} \left(\frac{1-|a_1|r}{|a_1|-r} - \frac{|a_1|-r}{1-|a_1|r} \right),$$

wenn $|a_1| > r$ vorausgesetzt wird. Es gilt also in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \Re \left\{ 1 + \frac{z \tilde{g} g'}{|g|^3} \right\} &\geq 1 - |z| \frac{|\tilde{g} g'|}{|g|^3} \\ &\geq 1 - \frac{r}{1-r^2} \frac{(1-r^2)(1-|a_1|^2)}{(1-|a_1|r)(|a_1|-r)} \\ &= \frac{|a_1| - 2r + |a_1|r^2}{(1-|a_1|r)(|a_1|-r)}. \end{aligned}$$

Es gilt demnach (6.5) jedenfalls, wenn r_0 gleich der kleineren der Wurzeln der in r quadratischen Gleichung

$$|a_1| - 2r + |a_1|r^2 = 0$$

gesetzt wird (man beachte, daß $|a_1| > r_0$). Und es ist also

$$(6.6) \quad r(\mathfrak{F}) \geq r_0,$$

wenn \mathfrak{F} die oben definierte Familie bedeutet. Gemäß § 5 gibt es aber beschränkte Funktionenspalten (6.4), die auf $|z| = r_0$ eine σ -Stelle der Ableitung besitzen. Also gilt in (6.6) das Gleichheitszeichen, und es ist der folgende Satz gewonnen:

Satz 16: Die Sternigkeitschranke derjenigen Familie beschränkter Funktionenspalten

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

die einen vorgegebenen zwischen 0 und 1 liegenden Absolutbetrag von a_1 haben, ist gleich deren Schlichtheitschranke (s. Satz 14).

§ 7. Der Satz von JULIA-CARATHÉODORY⁹⁾.

Sei $\{z_k\}$ eine unendliche Punktfolge des EK ($k = 1, 2, 3, \dots$). Für jedes Glied dieser Folge kann das SCHWARZsche Lemma aus Satz 5 für eine beschränkte Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$ hingeschrieben werden:

$$(7.1) \quad \Gamma(\tilde{f}(z_k)) \left| \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_k)}{1 - \overline{\tilde{f}(z_k)} \tilde{f}(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right|,$$

vorausgesetzt, daß $|\tilde{f}(z_k)| < 1$. Gemäß (1.19) läßt sich (7.1) umschreiben zu:

$$\frac{(1 - |\tilde{f}(z_k)|^2)(1 - |\tilde{f}(z)|^2)}{|1 - \overline{\tilde{f}(z_k)} \tilde{f}(z)|^2} \geq \frac{(1 - |z_k|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z_k} z|^2},$$

d. h.

$$(7.2) \quad \frac{|1 - \overline{\tilde{f}(z_k)} \tilde{f}(z)|^2}{1 - |\tilde{f}(z)|^2} \leq \frac{1 - |z_k|^2}{1 - |z|^2} \frac{1 + |\tilde{f}(z_k)|}{1 + |z_k|} \frac{|1 - \overline{z_k} z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, daß

$$(7.3) \quad \overline{\lim}_{z \in \text{EK}} |\tilde{f}(z)| = 1.$$

Dann gibt es jedenfalls Punktfolgen $\{z_k\}$ des EK, die gegen eine Zahl ε vom Absolutbetrag 1 streben und für die $\{\tilde{f}(z_k)\}$ gegen eine Spalte ε vom Absolutbetrag 1 strebt. Es mögen jetzt die Normierungen $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = e_1$ (erste Spalte der Einheitsmatrix) vorgenommen werden, die stets durch unitäre Drehungen in z -Ebene und im Bildraum zu erzielen sind. Es wird also an $\tilde{f}(z)$ die über (7.3) hinausgehende Forderung gestellt, daß es eine Folge $\{z_k\}$ des EK gibt, die gegen 1 strebt und für die $\{\tilde{f}(z_k)\}$ den Punkt e_1 als Häufungspunkt besitzt. Derartige Punktfolgen sollen im folgenden nur in Betracht kommen.

Es fehlt nun noch eine Voraussetzung, um in (7.2) zur Grenze $k \rightarrow \infty$ übergehen zu können, nämlich die, daß nicht für jede der nun zugelassenen Folgen

$$\frac{1 - |\tilde{f}(z_k)|}{1 - |z_k|} \rightarrow \infty.$$

Dann existiert nämlich wenigstens eine Folge $\{z_k\}$, für die

$$\frac{1 - |\tilde{f}(z_k)|}{1 - |z_k|} \rightarrow \alpha = \alpha(\{z_k\})$$

(α endliche reelle Zahl, ≥ 0 natürlich). Die untere Grenze aller solcher α sei α_0 , also

$$(7.4) \quad \alpha_0 = \underline{\lim}_{\{z_k\}} \alpha(\{z_k\}).$$

Dann existiert selbstverständlich unter diesen zugelassenen Folgen $\{z_k\}$ auch eine, für die

$$(7.5) \quad \frac{1 - |\tilde{f}(z_k)|}{1 - |z_k|} \rightarrow \alpha_0$$

strebt. Für sie werde der Grenzübergang in (9.2) vorgenommen, so daß sich die folgende für alle $z \in \text{EK}$ gültige Ungleichung ergibt:

$$(7.6) \quad \frac{|1 - \overline{e_1} \tilde{f}(z)|^2}{1 - |\tilde{f}(z)|^2} \leq \alpha_0 \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

⁹⁾ Für den Fall $n = 1$ sei vor allem auf die klassische Darstellung bei C. CARATHÉODORY [3], S. 22 ff., verwiesen.

Angenommen nun, in dieser Ungleichung gelte für eine gewisses $z = z_0 \in \text{EK}$ das Gleichheitszeichen, es gelte also

$$(7.7) \quad \frac{|1 - \tilde{c}_1 \tilde{f}(z_0)|^2}{1 - |\tilde{f}(z_0)|^2} = \alpha_0 \frac{|1 - z_0|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

Es mögen die Transformationen

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

$$g = \Gamma_{(f_0)} \frac{f - f_0}{1 - \bar{f}_0 f} \quad (f_0 = \tilde{f}(z_0))$$

durchgeführt und g als Funktionenspalte $g(w)$ aufgefaßt werden. Mit der Abkürzung $e_0 = \Gamma_{(f_0)} \frac{e_1 - f_0}{1 - \bar{f}_0 e_1}$ ergibt sich durch leichte Rechnung:

$$(7.8) \quad \frac{|1 - \tilde{c}_0 g|^2}{1 - |g|^2} = \frac{1 - |f_0|^2}{|1 - \tilde{c}_1 f_0|^2} \frac{|1 - \tilde{c}_1 f|^2}{1 - |f|^2},$$

und mit der Abkürzung $\varepsilon = \frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0}$ ergibt sich aus (7.8) durch Spezialisierung auf den Fall $n = 1$ sofort:

$$\frac{|1 - \tilde{c}_0 w|^2}{1 - |w|^2} = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Somit lautet (7.6) in der neuen Bezeichnung [es wird (7.7) mitbenutzt]:

$$(7.9) \quad \frac{|1 - \tilde{c}_0 g|^2}{1 - |g|^2} \leq \frac{|1 - \tilde{c}_0 w|^2}{1 - |w|^2}.$$

Andererseits folgt unter Benutzung von Dreiecksungleichung, CAUCHY-SCHWARZscher Ungleichung und SCHWARZschem Lemma in der einfachsten Form [es ist $g(0) = 0$], wenn die Funktionenspalten

$$(7.10) \quad g(w) = e w \quad (|e| = 1)$$

ausgeschaltet werden:

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \frac{|1 - \tilde{c}_0 g|^2}{1 - |g|^2} &\geq \frac{(1 - |\tilde{c}_0 g|)^2}{1 - |g|^2} \geq \frac{(1 - |g|)^2}{1 - |g|^2} = \frac{1 - |g|}{1 + |g|} \\ &> \frac{1 - |w|}{1 + |w|}. \end{aligned}$$

(7.9) sagt für nicht-negative reelle Zahlen $\tilde{c}_0 w$ aber gerade das Gegenteil von (7.11) aus. Das Gleichheitszeichen in (7.6) kann demnach höchstens für die auf $\tilde{f}(z)$ umgerechneten Funktionenspalten (7.10) gelten. Den Übergang von (2.6) zu (2.8) und die damit in Verbindung stehenden Ausführungen beachtend, sind das genau die folgenden:

$$(7.12) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma(a) \frac{ez - a}{1 - \bar{a}ez}, \quad |e| = 1, |a| < 1.$$

Damit für diese Funktionenspalten $\tilde{f}(1) = e_1$ und (7.5) erfüllt ist, muß noch

$$(7.13) \quad \Gamma(a) \frac{e - a}{1 - \bar{a}e} = e_1, \quad \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}e|^2} = \alpha_0$$

sein. Dann aber wird das Gleichheitszeichen in (7.6) auch tatsächlich erreicht — und zwar für alle z zugleich —, wie aus Satz 5 wegen der Herleitung von (7.6) aus (7.1) unmittelbar folgt.

Aus (7.6) folgt übrigens, daß stets $\alpha_0 > 0$, denn $\alpha_0 = 0$ würde $\tilde{e}_1 \tilde{f}(z) \equiv 1$, also nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung $|\tilde{f}(z)| = 1$ liefern, was ausgeschlossen war. Zu jedem $\alpha_0 > 0$ gibt es aber Funktionenspalten (7.12) mit (7.13), denn die Bedingungen (7.13) lassen sich auch in der Form

$$\frac{|1 + \bar{a} e_1|^2}{1 - |a|^2} = \alpha_0, \quad e = \Gamma(a) \frac{e_1 + a}{1 + \bar{a} e_1}$$

schreiben, und nun braucht z. B. nur $a = \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0 + 1} e_1$ gesetzt zu werden.

Als Familie $\mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ ($\alpha_0 > 0$) wird die folgende Menge von beschränkten Funktionenspalten $\tilde{f}(z)$ — mit n Komponenten —, deren keine eine Konstante vom Betrag 1 ist, erklärt: $\tilde{f}(z)$ gehört zu $\mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$, wenn 1. die Menge \mathfrak{A} derjenigen Folgen $\{z_k\}$ des EK, die gegen 1 streben und für die $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(z_k)$ existiert und $= e_1$ ist, nicht leer ist, und wenn 2. $\lim_{\substack{\{z_k\} \in \mathfrak{A} \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1 - |\tilde{f}(z_k)|^2}{1 - |z_k|^2} = \alpha_0$ endlich ist.

Nun läßt sich der oben hergeleitete Satz von JULIA wie folgt formulieren^{*)}:

Satz 17: Für alle Funktionenspalten $\tilde{f}(z) \in \mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ gilt im EK:

$$(7.14) \quad \frac{|1 - \tilde{e}_1 \tilde{f}(z)|^2}{1 - |\tilde{f}(z)|^2} \leq \alpha_0 \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Schrankenfunktionenspalten sind genau die folgenden, und zwar für alle z zugleich:

$$(7.15) \quad \tilde{f}(z) = \Gamma(a) \frac{e z - a}{1 - \bar{a} e z},$$

$$a) \frac{|1 + \bar{e}_1 a|^2}{1 - |a|^2} = \alpha_0, \quad b) e = \Gamma(a) \frac{e_1 + a}{1 + \bar{a} e_1}.$$

Es läßt sich eine geometrische Formulierung dieses Satzes geben, die auch zu seinem Beweise hätte herangezogen werden können. Der Orizykel $\frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} < c$ ($c > 0$) der z -Ebene werde mit $\mathfrak{R}_c^{(1)}$ bezeichnet. Die Menge der Punkte \mathfrak{z} des \mathfrak{R}^{2n} mit $\frac{|1 - \tilde{e}_1 z|^2}{1 - |z|^2} < c$ ($c > 0$) werde ein Hyperorizykel genannt und mit $\mathfrak{R}_c^{(n)}$ bezeichnet. Euklidisch gesehen, stellt es übrigens das Innere eines speziellen Hyperellipsoids dar, das seinen Mittelpunkt im Punkte $\frac{1}{1+c} e_1$ hat und natürlich durch e_1 geht. Zwei gleichlange Haupthalbachsen von der Länge $\frac{c}{1+c}$ haben die Richtung von e_1 und $i e_1$, während die $2n - 2$ restlichen Haupthalbachsen unter sich gleich lang sind, und zwar die Länge $\sqrt{\frac{c}{1+c}}$ haben.

Die geometrische Fassung des Satzes von JULIA lautet:

^{*)} Der Satz von JULIA in seiner Verallgemeinerung auf Systeme von zwei Funktionen mit 2 Veränderlichen findet sich bei A. MINIATOFF [4].

Satz 18: Jede Funktionenspalte $\tilde{f}(z) \in \mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ nimmt für $z \in \text{Rd } \mathfrak{K}_c^{(1)}$ nur Werte aus $\mathfrak{K}_{\alpha_0 c}^{(n)}$ (abgeschlossener Hyperorizykel) an, und zwar Werte aus $\text{Rd } \mathfrak{K}_{\alpha_0 c}^{(n)}$ genau dann, wenn $\tilde{f}(z)$ eine der Funktionenspalten (7.15) ist. Im letzteren Falle wird $\text{Rd } \mathfrak{K}_c^{(1)}$ auf eine eindimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\text{Rd } \mathfrak{K}_{\alpha_0 c}^{(n)}$ abgebildet.

Nun soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 19: Wenn die Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$ zu $\mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ gehört, so gehört die Funktion $\tilde{e}_1 \tilde{f}(z)$ zu $\mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(1)}$.

Beweis: Daß $\tilde{e}_1 \tilde{f}(z)$ beschränkt und keine Konstante vom Betrag 1 ist, ist unmittelbar einzusehen (vgl. dazu den Beweis, daß es durch (7.4) erklärte α_0 größer als 0 ist).

Aus (7.14) folgt für reelle $z = x$:

$$\begin{aligned} |1 - \tilde{e}_1 \tilde{f}(x)|^2 &\leq \alpha_0 (1 - |\tilde{f}(x)|^2) \frac{1-x}{1+x} \\ &\leq \alpha_0 \frac{1-x}{1+x}, \end{aligned}$$

also strebt für $x \rightarrow 1-0$

$$1 - \tilde{e}_1 \tilde{f}(x) \rightarrow 0,$$

d. h.

$$(7.16) \quad \tilde{e}_1 \tilde{f}(x) \rightarrow 1.$$

Sei nun τ ein Häufungswert von $\tilde{f}(x)$ für $x \rightarrow 1-0$. Dann folgt wegen (7.16):

$$\tilde{e}_1 \tau = 1,$$

also (wegen $|\tau| \leq 1$ unter Benutzung von (0.3):

$$(7.17) \quad \tau = e_1.$$

Demnach strebt $\tilde{f}(x) \rightarrow e_1$ für $x \rightarrow 1-0$.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist:

$$(7.18) \quad \frac{1 - |\tilde{e}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \geq \frac{1 - |\tilde{f}(x)|}{1-x},$$

folglich

$$(7.19) \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1 - |\tilde{e}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \geq \alpha_0$$

gemäß der Definition von α_0 . Wird andererseits (7.18) neben der Dreiecksungleichung in (7.14) verwandt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - |\tilde{e}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \right)^2 &\leq \left(\frac{1 - \tilde{e}_1 \tilde{f}(x)}{1-x} \right)^2 \leq \alpha_0 \frac{1 - |\tilde{f}(x)|}{1-x} \frac{1 + |\tilde{f}(x)|}{1+x} \\ &\leq \alpha_0 \frac{1 - |\tilde{e}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \frac{1 + |\tilde{f}(x)|}{1+x}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1 - |\tilde{e}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \leq \alpha_0 \frac{1 + |\tilde{f}(x)|}{1+x},$$

und da

$$\frac{1 + |\tilde{f}(x)|}{1+x} \rightarrow 1$$

für $x \rightarrow 1 - 0$, ist

$$(7.20) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow 1-0} \frac{1 - |\tilde{c}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \leq \alpha_0.$$

Aus (7.19) und (7.20) ist also herauszulesen, daß

$$\frac{1 - |\tilde{c}_1 \tilde{f}(x)|}{1-x} \rightarrow \alpha_0$$

für $x \rightarrow 1 - 0$. Nach aus der klassischen Theorie des JULIASchen Gedankenkreises Bekanntes ist damit der Satz bewiesen. Ja, es ergibt sich weiter noch der folgende Satz:

Satz 20: Wenn $\tilde{f}(z) \in \mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$, so existieren die Grenzwerte von

$$a) \frac{1 - |\tilde{c}_1 \tilde{f}(z)|}{1-|z|}, \quad b) \frac{1 - \tilde{c}_1 \tilde{f}(z)}{1-z}, \quad c) \tilde{c}_1 \tilde{f}'(z)$$

bei Annäherung $z \rightarrow 1$ im Winkelraum, und der Grenzwert ist in jedem Fall α_0 .

Außerdem läßt sich noch leicht beweisen:

Satz 21: Wenn $\tilde{f}(z) \in \mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$, so existieren die Grenzwerte von

$$a) \tilde{f}(z) \quad \text{bzw.} \quad b) \frac{1 - |\tilde{f}(z)|}{1-|z|}$$

bei Annäherung $z \rightarrow 1$ im Winkelraum, und die Grenzwerte sind c_1 bzw. α_0 .

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort aus Satz 20, Aussage b) genau wie die Überlegung, die zu (7.17) führte. Zum Beweis der zweiten Behauptung kann (7.18) für komplexe Argumente benutzt werden:

$$\frac{1 - |\tilde{f}(z)|}{1-|z|} \leq \frac{1 - |\tilde{r}\tilde{f}(z)|}{1-|z|}.$$

Aus Satz 20, Aussage a) folgt deshalb:

$$(7.21) \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow 1} \frac{1 - |\tilde{f}(z)|}{1-|z|} \leq \alpha_0 \quad (z \rightarrow 1 \text{ im Winkelraum}).$$

Andererseits ist gemäß Definition von α_0 :

$$(7.22) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in EK}} \frac{1 - |\tilde{f}(z)|}{1-|z|} \geq \alpha_0.$$

In (7.21) und (7.22) ist der Beweis der Behauptung erbracht.

Es soll nun eine Untersuchung von Folgen (von Spalten)

$$(7.23) \quad \frac{f(z_k) - c_1}{z_k - 1}$$

für Funktionenspalten $\tilde{f}(z) \in \mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ und gegen 1 strebende Zahlenfolgen $\{z_k\}$ des EK unternommen werden. Im Gegensatz zum Falle $n = 1$ braucht für $n > 1$ der Grenzwert von (7.23) nicht für alle Folgen $\{z_k\}$, die im Winkelraum gegen 1 streben, zu existieren, d. h. mit anderen Worten, eine Winkelderivierte $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\tilde{f}(z) - c_1}{z - 1}$ ($z \rightarrow 1$ im Winkelraum) braucht nicht vorhanden zu sein.

Das wird etwa durch das folgende Beispiel bewiesen. Die erste Komponente von $\tilde{f}(z)$ sei $f_1(z) = \frac{1}{1 + \sigma(1-z)}$, wo σ eine positive reelle Zahl ist, während

die zweite Komponente $f_2(z) = (z-1)h(z)$ sei, wo $h(z)$ eine im EK reguläre Funktion ist, deren Absolutbetrag dort kleiner als M sein möge. Alle übrigen Komponenten von $\tilde{f}(z)$ seien identisch Null. $\tilde{f}(z)$ ist dann im EK regulär und strebt für $z \rightarrow 1$ gegen e_1 . Ferner ist

$$(7.24) \quad 1 - |\tilde{f}(z)|^2 = \frac{2\sigma \Re(1-z) + \sigma^2 |1-z|^2}{|1+\sigma(1-z)|^2} - |1-z|^2 |h(z)|^2$$

$$(7.25) \quad = \frac{|1-z|^2}{|1+\sigma(1-z)|^2} \left\{ 2\sigma \Re \frac{1}{1-z} + \sigma^2 - |1+\sigma(1-z)|^2 |h(z)|^2 \right\}.$$

Für alle z des EK gilt offenbar

$$\begin{aligned} |1+\sigma(1-z)| &< 1+2\sigma, \\ \Re \frac{1}{1-z} &= \Re \frac{1}{1-z} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

letzteres deshalb, weil $w = \frac{1}{1-z}$ den EK auf die Halbebene $\Re w > \frac{1}{2}$ abbildet.

Also folgt aus (7.25) für alle $z \in \text{EK}$:

$$(7.26) \quad 1 - |\tilde{f}(z)|^2 > \frac{|1-z|^2}{|1+\sigma(1-z)|^2} \{ \sigma + \sigma^2 - (1+2\sigma)^2 M^2 \}.$$

Wenn etwa $M^2 = \frac{\sigma(1+\sigma)}{(1+2\sigma)^2}$ gesetzt wird, so ist wegen (7.26) $\tilde{f}(z)$ als beschränkte Funktionenspalte erwiesen. Schließlich ist aus (7.24) unmittelbar ersichtlich, daß für reelle $z = x$

$$\frac{1 - |\tilde{f}(x)|^2}{1-x^2} \rightarrow \sigma$$

strebt, wenn $x \rightarrow 1-0$ geht. $\tilde{f}(z)$ gehört also einer Familie $\mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ an mit $\alpha_0 \leq \sigma$. Nach Satz 21, Aussage b) ist aber sogar $\alpha_0 = \sigma$. Für die so konstruierte Funktionenspalte $\tilde{f}(z)$ braucht nun

$$(7.27) \quad \frac{f_2(z)}{z-1} = h(z)$$

für $z \rightarrow 1$ im Winkelraum nicht zu existieren, denn es kann bekanntlich $h(z)$ unter den gemachten Voraussetzungen so gewählt werden. Damit ist die Behauptung bewiesen, denn (7.27) ist die zweite Komponente von (7.23).

Es läßt sich aber der folgende Satz beweisen:

Satz 22: Der Vorrat der Grenzwerte ϑ konvergenter Folgen

$$(7.28) \quad \frac{\tilde{f}(z_k) - e_1}{z_k - 1} \quad (z_k \rightarrow 1 \text{ im Winkelraum})$$

für die Funktionenspalten $\tilde{f}(z) \in \mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ erfüllt genau die $(2n-2)$ -dimensionale ebene Mannigfaltigkeit

$$(7.29) \quad \tilde{e}_1 \vartheta = \alpha_0.$$

Beweis: Wenn der Grenzwert von (7.28) existiert und $= \vartheta$ ist, so folgt:

$$\tilde{e}_1 \frac{\tilde{f}(z_k) - e_1}{z_k - 1} \rightarrow \tilde{e}_1 \vartheta,$$

d. h.

$$\frac{1 - \tilde{e}_1 \tilde{f}(z_k)}{1 - z_k} \rightarrow \tilde{e}_1 \vartheta.$$

Nach Satz 20, Aussage b) ist also dann

$$\tilde{e}_1 \vartheta = \alpha_0.$$

Daß jedes ϑ mit (7.29) als Grenzwert von (7.28) auftreten kann, wird schon durch die speziellen Funktionenspalten (7.15), die bekanntlich zu $\mathfrak{F}_{\alpha_0}^{(n)}$ gehören, erwiesen. Jene besitzen sogar eine Ableitung im Punkte 1:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{z-1} \left(\Gamma(a) \frac{ez-a}{1-\tilde{a}ez} - \Gamma(a) \frac{e-a}{1-\tilde{a}e} \right) \right\} \\ (7.30) \quad &= \Gamma(a) \frac{(E-a\tilde{a})e}{(1-\tilde{a}e)^2} = \frac{1+\tilde{a}e_1}{(1-\tilde{a}a)^2} \Gamma(a) (E-a\tilde{a}) \Gamma(a) (e_1+a) \\ &= \frac{1+\tilde{a}e_1}{1-|a|^2} (e_1+a) = \alpha_0 \frac{e_1+a}{1+\tilde{e}_1 a}. \end{aligned}$$

Wird nun $a = \varrho \vartheta - e_1$ gewählt mit passendem reellen $\varrho \neq 0$, so ist (7.30) wegen (7.29) Genüge getan. Damit (7.15) a) erfüllt ist, muß $\varrho = \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + |\vartheta|^2}$ gewählt werden, wie eine leichte Rechnung zeigt. Damit ist alles bewiesen.

Literaturhinweise.

[1] BEHNKE-THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer kompl. Veränderlicher. (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, 3. Bd.) — [2] BOCHNER-MARTIN: Several Complex Variables. Princeton 1948. — [3] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie II, Verlag Birkhäuser Basel, 1950. — [4] MINIATOFF, A.: Sur une Propriété des Transformations dans l'Espace de deux Variables Complexes. C. R. Paris 200 (1935). — [5] SOMMER, FR.: Die Geometrie der Hyperkugelautomorphismen. (Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Heft 3) Münster/Westf. 1949.

(Eingegangen am 8. Juli 1952.)

Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen.

Von

WOLFGANG ROTHSTEIN in Marburg (Lahn).

Einleitung. In der neueren Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen spielen die harmonischen Nullmengen eine wichtige Rolle, die eingehend untersucht wurde. Geht man zu zwei unabhängigen Veränderlichen über, so sind ähnliche Eigenschaften zunächst von Ebenenmengen $w = c$ zu erwarten, wenn c eine harmonische Nullmenge durchläuft. Daß für solche Mengen z. B. der RIEMANNSCHE Satz von der hebbaren Unstetigkeit gilt, ist leicht zu sehen und bekannt. In diesem Fall können die Mengen viel allgemeiner charakterisiert werden, wie es mehrfach geschehen ist. Schon bei einfachen Aufgaben wird man nun auf die interessante Frage geführt, wie es mit denjenigen Sätzen steht, die kein Analogon bei nur einer Veränderlichen haben. Einen Beitrag hierzu liefert diese Arbeit.

Unter 1. und 2. wird gezeigt, daß die angegebenen Ebenenmengen, grob gesagt, keinen Einfluß auf die Bildung der Regularitätshülle eines Gebietes haben. Das gilt für eine Klasse von Punktmengen, die ich B -Mengen nenne. Beim Beweis ist wesentlich eine Verallgemeinerung der Regularitätsradien, die „Regularitätszahl $\varrho(z)$ “ und ihr superharmonischer Charakter. Die Funktion $\varrho(z)$ oder ähnliche auf gleiche Art konstruierte Funktionen werden vermutlich auch sonst bei der Bildung der Regularitätshüllen von Nutzen sein.

In 3. werden einige Folgerungen gezogen, die sich auch als Sätze vom Typus des HARTOGSSCHEN Hauptsatzes aussprechen lassen.

Der bekannte THULLENSCHE Satz über die Singularitäten einer analytischen Fläche [Math. Ann. 111 (1935)] gilt ebenfalls noch, wenn statt einer Singularitätenfläche eine Menge von Singularitätenebenen $w = c$ (c aus einer harmonischen Nullmenge) zugelassen wird (Satz 6). In Verbindung mit den vorhergehenden Ergebnissen ergibt sich so in einfacher Weise ein Satz über Funktionen einer Veränderlichen (Satz 7 und 7'), der unter schärferen Voraussetzungen von K. NOSHIRO bewiesen wurde.

Der THULLENSCHE Satz ist inzwischen auf niederdimensionale analytische Flächen des R^{2n} übertragen worden*). Das zum Beweis von Satz 6 benutzte Verfahren — auf einer Verallgemeinerung eines Satzes von RADÓ beruhend — erlaubt es, auch unseren Satz entsprechend zu formulieren (Satz 6'). Das ist der wesentliche Inhalt von 4. und 5.

*) Vgl. R. REMMERT und K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. Bd. 126.

Die Durchführung des Beweises von Satz 6' stieß auf die Schwierigkeit, daß bisher keine systematische Darstellung der Theorie der niederdimensionalen analytischen Flächen vorlag, die für diesen Zweck ausreicht. Diese Theorie wird in der zitierten Arbeit von REMMERT und STEIN gegeben. In der Absicht, die Lektüre meiner Arbeit zu erleichtern, gebe ich unter 9. im Anschluß an das Lehrbuch von OSGOOD zum Teil ohne Beweis die Sätze an, auf die ich mich stütze.

Unter 6. wird ein Analogon des HARTOGSSchen Hauptsatzes für $(2n-2)$ -dimensionale analytische Flächen des R^{2n} ($n \geq 3$) bewiesen (Satz 8). Dabei wird Satz 6 wesentlich benutzt. Ohne Beweis sei erwähnt, daß aus Satz 8 folgt: \mathfrak{F} sei eine $(2n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in $|z_i| < 1$; $i = 1, \dots, n$. Ist nun jeder der Schnitte von \mathfrak{F} mit einer der $(2n-2)$ -dimensionalen Ebenen $z_i = \text{const.}$ algebroid, so ist auch \mathfrak{F} algebroid ($n \geq 3$).

Viele Beweise sind aus dem Text herausgenommen und unter 8. bis 11. nachgetragen. Unter 7. wurden mehrfach benutzte bekannte Sätze zusammengestellt.

1. Schon bei der Konstruktion der Regularitätshüllen sehr einfacher Gebiete stößt man auf eine Frage, die, soweit ich weiß, bisher noch nicht behandelt wurde. Sei etwa $\varphi = |w|^2 + |z|^2$ und S die Kugelschale $1/2 < \varphi < 1$. Dann ist bekanntlich die Kugel $K = (\varphi < 1)$ die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(S)$ von S . Ist weiter E eine analytische Ebene und $K' = K - E$; $S' = S - E$, so ist auch jetzt $K' = \mathfrak{H}(S')$. Werden nun aber K und S an mehreren Ebenen E_m geschnitten, so machen beim Nachweis von $K - \Sigma E_m = \mathfrak{H}(S - \Sigma E_m)$ die Schnittpunkte der E_m Schwierigkeiten. Das führt zu der Aufgabe, Punktengen M anzugeben, für welche bei beliebigem Gebiet G die Relation

$$(H) \quad \mathfrak{H}(G - M) \supseteq \mathfrak{H}(G) - M$$

gilt. Der Einfachheit halber mögen nur niederdimensionale M — d. h. M liegt auf dem Rand von $R^4 - M$ und $R^4 - M$ ist offen — betrachtet werden.

Definition 1. Die niederdimensionale Menge M heiße H -Menge, wenn sie bei beliebigem Gebiet G der Relation (H) genügt.

Auf Grund der OKASchen Lösung¹⁾ des LEVIschen Problems genügt es, um H -Mengen zu finden, eine andere Aufgabe zu behandeln. Der allgemeine Kontinuitätssatz²⁾ lautet:

(K). Die Funktion $f(w, z)$ sei in dem schlichten Gebiet G regulär und eindeutig; \mathfrak{F}_n und \mathfrak{F} seien abgeschlossene analytische Flächenstücke mit den Rändern C_n und C , ferner \mathfrak{F}_n in G und C in G enthalten. Schließlich möge $\lim \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ in folgendem Sinne gelten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein m , so daß \mathfrak{F} ganz in der ε -Umgebung von \mathfrak{F}_n und C_n ganz in der ε -Umgebung von C

¹⁾ OKA, K.: Domaines pseudoconvexes. The Tohoku Math. J. (1942). Siehe auch den Bericht von H. BEHNKE und K. STEIN: Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Nieuw Archief voor Wiskunde 23, 2 (1951).

²⁾ Vgl. z. B. BEHNKE, H.: Der Kontinuitätssatz und die Regularitätskonvexität. Math. Ann. 113 (1936).

enthalten ist, wenn $n > m$. Dann gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{F})$, so daß $f(w, z)$ in $G \cup U(\mathfrak{F})$ eindeutig und regulär definierbar ist.

Bleibt (K) richtig, wenn $G, U(\mathfrak{F})$ durch $G' = G - M, U' = U(\mathfrak{F}) - M$ ersetzt wird, so „gilt (K) in $G - M$ “.

Definition 2. M ist K -Menge, wenn (K) bei beliebigem G in $G - M$ gilt (kurz: wenn (K) in $R^4 - M$ gilt).

Satz 1. Jede K -Menge ist H -Menge.

Beweis. Die entscheidende Aussage des OKASCHEN Satzes ist: Wenn das schlichte Gebiet G nicht Regularitätsgebiet ist, so gilt (0):

Es gibt analytische Flächenstücke $\mathfrak{F}_n, \mathfrak{F}$ mit den Rändern C_n, C , so daß:
1. \mathfrak{F}_n und C ganz in G liegen; 2. auf \mathfrak{F} Randpunkte von G liegen; 3. $\lim \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$.

Es sei nun M eine K -Menge, aber nicht H -Menge. Dann gibt es ein Gebiet G , so daß $\mathfrak{H}(G) - M$ nicht in $\mathfrak{H}(G - M)$ enthalten ist. Also existiert in $\mathfrak{H}(G) - M$ eine Kugel K , welche nicht in $\mathfrak{H}(G - M)$ liegt. Der Durchschnitt \mathfrak{D} von $\mathfrak{H}(G)$ und $\mathfrak{H}(G - M)$ ist Regularitätsgebiet, umfaßt $(G - M)$ und enthält K nicht. Sei M_* der Teil von M auf dem Rand von \mathfrak{D} und $\mathfrak{D}_* = \mathfrak{D} + M_*$. Da M niederdimensional ist, umfaßt \mathfrak{D}_* das Gebiet G ; \mathfrak{D}_* enthält aber nicht $\mathfrak{H}(G)$. Daher kann \mathfrak{D}_* nicht Regularitätsgebiet sein (sonst wäre der Durchschnitt $\mathfrak{D}_* \cap \mathfrak{H}(G)$ Regularitätsgebiet, also $\mathfrak{H}(G)$ nicht die Hülle von G). Infolgedessen erfüllt \mathfrak{D}_* die Bedingung (0). Da M_* mit M eine K -Menge ist, kann dann wegen des Kontinuitätssatzes (K) auch \mathfrak{D} kein Regularitätsgebiet sein. Das ist ein Widerspruch.

2. Eine Klasse von K -Mengen erhält man folgendermaßen.

Definition 3. M heiße B -Menge, wenn es zu jedem P aus M eine Kugel U um P und eine in $U - M$ reguläre biharmonische Funktion $b(w, z)$ gibt, so daß für $R \in M; Q_n \rightarrow R; Q_n \in U - M$ immer $\lim b(Q_n) = +\infty$ ist.

Wichtige Eigenschaften der B -Mengen sind:

B1. Mit M ist auch jedes analytische Bild von M eine B -Menge.

B2. Ist \mathfrak{F} ein analytisches Flächenstück, so liegt entweder \mathfrak{F} ganz auf M oder $\mathfrak{F} \cap M$ ist analytisches Bild einer ebenen harmonischen Nullmenge.

Beim Beweis kann man $\mathfrak{F} = (w = 0)$ setzen. Die Funktion $b(0, z)$ ist harmonisch auf $\mathfrak{F} - (\mathfrak{F} \cap M)$, also auch — nach der Festsatzung $b(0, z) = +\infty$ auf $\mathfrak{F} \cap M$ — superharmonisch auf \mathfrak{F} . Entweder also ist $b(0, z) = +\infty$, d. h. \mathfrak{F} liegt auf M , oder $\mathfrak{F} \cap M$ ist eine harmonische Nullmenge [Satz d)]³⁾.

B3. Es sei F eine Familie auf M gelegener analytischer Flächenstücke und g ein nicht zu F gehöriges analytisches Flächenstück. Dann ist $F \cap g$ Bild einer ebenen harmonischen Nullmenge. (Folgt sofort aus B2).

Satz 2. Jede B -Menge ist K -Menge, also auch H -Menge.

Der Beweis (unter 8.) stützt sich auf eine Verallgemeinerung des Begriffs der Regularitätsradien⁴⁾. Dazu sei M eine B -Menge und

$$\mathfrak{S} = \{ |w| < 1; |z| < 1 \}; \mathfrak{R} = \left\{ \frac{1}{2} \leq |w| < 1; |z| < 1 \right\}; \mathfrak{R} \cap M = 0.$$

³⁾ Die Sätze a)–e) sind unter 7. zusammengestellt.

⁴⁾ Ich beschränke mich auf das im folgenden gerade Zweckmäßige.

Es möge eine in $\mathcal{G} - M$ reguläre biharmonische Funktion $b(w, z)$ geben, für die $\lim_{Q \rightarrow M} b(Q) = +\infty$ ist.

Bei festem z' bezeichne nun $B_*(\lambda, z')$ den Durchschnitt von $b(w, z') < \lambda$ und $|w| < 1$, und $B(\lambda, z')$ die Vereinigung von $B_*(\lambda, z')$ und $1/2 < |w| < 1$ (alles auf $z = z'$).

Endlich möge $f(w, z)$ in \mathcal{R} regulär und eindeutig sein. *Regularitätszahl* $\varrho(z')$ von $f(w, z)$ [bez. $b(w, z)$] werde nun genannt die größte positive Zahl, so daß $B(\lambda, z')$ für alle $\lambda < \varrho(z')$ dem Regularitätsgebiet von $f(w, z)$ angehört.

Satz 3. Die Regularitätszahl $\varrho(z)$ ist superharmonisch (Beweis unter 8.).

Besonders einfache B -Mengen M sind die, für welche es zu jedem Punkt P aus M eine Kugel U und eine in U reguläre Funktion $\varphi(w, z)$ gibt, die auf M nur Werte aus einer harmonischen Nullmenge annimmt. Offenbar bestehen sie aus analytischen Flächenstücken. Sie sollen kurz F -Mengen heißen. Daß die F -Mengen tatsächlich B -Mengen sind, ergibt sich unmittelbar aus dem wichtigen

Satz von EVANS⁵⁾. N sei eine beschränkte harmonische Nullmenge. Dann gibt es eine außer in ∞ und N überall reguläre Potentialfunktion $u(z)$ mit $\lim_{Q \rightarrow N} u(Q) = +\infty$.

Bei den F -Mengen hat man einfach $b(w, z) = u(\varphi(w, z))$ zu setzen, um der Bedingung für B -Mengen zu genügen.

3. Eine besondere Folge dieser Ergebnisse wollen wir genauer betrachten. Für H -Mengen, erst recht also für B - oder F -Mengen M gilt offenbar

Satz 4. Sei $\mathcal{G} = \{|w| < 1; |z| < 1\}$; $\mathcal{G}_e = \{|w| < 1; |z| < e\}$;

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{1}{2} < |w| < 1; |z| < 1 \right\} \text{ und } \mathcal{G}' = \mathcal{G} - M; \mathcal{G}'_e = \mathcal{G}_e - M;$$

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} - M.$$

Ist nun $f(w, z)$ eindeutig und regulär in $\mathcal{R}' \cup \mathcal{G}'_e$, so auch in \mathcal{G}' .

Das ist die natürliche Verallgemeinerung eines bekannten Satzes (er folgt sofort aus dem superharmonischen Charakter der Regularitätsradien), in welchem M eine harmonische Nullmenge analytischer Ebenen $w = \text{const.}$ ist.

Eine wesentliche Verschärfung dieses Satzes läßt sich nun weder aus der Tatsache, daß jede F -Menge H -Menge ist, noch mit Hilfe der gewöhnlichen Regularitätsradien (jedenfalls nicht auf einfache Art) ableiten.

Satz 5 (Bezeichnungen wie in Satz 4). M sei eine harmonische Nullmenge von Ebenen $w = \text{const.}$ und \mathfrak{P} eine Punktmenge in $|z| < 1$ von positivem harmonischem Maß. Ferner sei $\mathcal{R} \cap M = 0$ und $f(w, z)$ regulär und eindeutig in \mathcal{R} und außerdem in den punktierten Kreisen

$$\{z = d \text{ aus } \mathfrak{P}; w \text{ in } \{|w| < 1\} - M\}.$$

⁵⁾ EVANS, G. C.: Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions. *Mh. f. Math. u. Phys.* 43 (1936). Die Funktion $u(z)$ spielt in vielen funktionentheoretischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. Vgl. z. B. NOSHIO, K.: On the singularities of analytic functions with a general domain of existence. *Proc. of the Japan Acad.* 22 (1946). Dort auch weitere Literaturangaben.

Dann bleibt $f(w, z)$ in \mathcal{G} regulär und eindeutig.

Beweis. Zu M bilde man die EVANSSche Funktion $u(w)$ und zu $b(w, z) \equiv u(w)$ die Funktion $\varrho(z)$. Da auf \mathfrak{P} überall $\varrho(z) = +\infty$ und \mathfrak{P} von positivem Maß ist, so ist $\varrho(z) \equiv +\infty$ [Satz d) unter 7.].

Zusatz. Es genügt sogar vorauszusetzen, daß die Funktionen $f(w, d)$ für d aus \mathfrak{P} in $\{|w| < 1\} - M$ regulär sind. Dann hat man eine Aussage aus dem Kreis des HARTOGSSchen Hauptsatzes. Entsprechendes gilt für meromorphe Funktionen. Nach OKA ist nun zwar jedes Meromorphiegebiet auch Regularitätsgebiet. Jedoch sehe ich nicht, wie man auf Grund dieses Satzes die Sonderbehandlung der meromorphen Funktionen beim HARTOGSSchen Hauptsatz ersparen könnte⁶⁾.

Die Frage, ob Satz 5 auch für beliebige B -Mengen gilt, ist zu bejahen.

Satz 5' (Bezeichnungen wie in Satz 4). M sei B -Menge und \mathfrak{P} eine Punktmenge in $|z| < 1$ von positivem Maß. Keine Ebene $z = d \in \mathfrak{P}$ soll ganz auf M liegen. Ist $f(w, z)$ regulär und eindeutig in $\mathcal{R}' = \mathcal{R} - M$ (es braucht nicht $\mathcal{R} \cap M = 0$ zu sein) und in den punktierten Kreisen $\{z = d \in \mathfrak{P}; w \text{ in } [|w| < 1] - M\}$, so auch in $\mathcal{G}' = \mathcal{G} - M$. Dasselbe gilt für meromorphe Funktionen.

Beweis. 1. Man fixiere zunächst $d_* \in \mathfrak{P}$ so, daß erstens der Durchschnitt \mathfrak{D}_s von \mathfrak{P} und $|z - d_*| < e$ für jedes $e < 0$ positives harmonisches Maß besitzt [Satz b)].

2. Der Schnitt M_* von M und $z = d_*$ hat dann das harmonische Maß 0 (vgl. B2). Zu jedem Punkt P von M_* als Mittelpunkt gibt es daher beliebig kleine Kreise $|w - P| = s$, welche M_* nicht treffen [Satz c)]. s sei so klein, daß eine in $\{|w - P| < 2s; |z - d_*| < 2s\} - M$ reguläre biharmonische Funktion $b(w, z)$ existiert, für welche $\lim_{Q \rightarrow M} b(Q) = +\infty$ ist.

3. Man fixiere jetzt $e < 0$ so, daß $\mathcal{R}_* = \{s - e < |w - P| < s + e; |z - d_*| < e\}$ und M punktfremd sind. Bildet man nun $\varrho(z)$ bezüglich $b(w, z)$ und \mathcal{R}_* , so folgt wie in Satz 5, daß $\varrho(z) \equiv +\infty$ ist. Also ist $f(w, z)$ in $\{|w - P| < s; |z - d_*| < e\} - M$ regulär.

Da M abgeschlossen ist, genügen endlich viele der so zu jedem Punkt von $M_* = M \cap \{z = d_*\}$ konstruierten Umgebungen, um M_* zu überdecken. Daher folgt:

Es gibt ein $e_* > 0$, so daß $f(w, z)$ in $\{|z - d_*| < e_*; |w| < 1\} - M$ regulär bleibt.

Damit ist man im wesentlichen bei den Voraussetzungen von Satz 4.

Zusatz. Für B -Mengen läßt sich Satz 4 auch direkt ableiten (vgl. dazu den Beweis von Satz 2). Man braucht also nicht Satz 1 heranzuziehen, der ja auf den tiefliegenden OKAschen Ergebnissen beruht.

⁶⁾ Zum HARTOGSSchen Satz vgl. P. LELONG: Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes. Ann. sci. École norm. sup. III, S. 58 (1941). — Für meromorphe Funktionen vgl. meine Arbeiten in: Math. Zeitschr. 53 (1950) und Math. Nachr. 3 (1949); ferner das Referat von P. LELONG in Math. Reviews 11 (1950).

4. In Verbindung mit der Verallgemeinerung eines Satzes von P. THULLEN⁷⁾ läßt sich aus Satz 5 eine interessante Folgerung ziehen.

Satz 6 (Satz von THULLEN). Das analytische Flächenstück g sei algebroid in $\mathfrak{G} = \{w < 1; |z| < 1\}$ abgesehen höchstens von den Punkten der Ebenen $w = c$, wo die c einer harmonischen Nullmenge angehören. Ist g singular in einem Punkte $(c_1, 0)$, so in allen Punkten des Kreises $\{w = c_1; |z| < 1\}$. (Beweis unter 9.)

Aus Satz 5 folgt nun

Satz 7. Schneidet g (unter den Voraussetzungen von Satz 6) keine der Ebenen $z = d \in \mathfrak{P}$ in unendlich vielen Punkten, so ist \mathfrak{P} eine harmonische Nullmenge (Beweis unter 10.).

Dieser Satz befreit einen kürzlich von K. NOSHIO⁸⁾ auf ganz anderer Grundlage bewiesenen Satz von unnötigen Einschränkungen. Wie man den ursprünglichen THULLENSchen Satz als Übertragung des CASORATI-WEIERSTRASSschen Theorems in die Sprache der Flächentheorie auffassen kann, so entspricht Satz 6 dem gleichen Theorem für nichtisolierte Singularitäten. Und Satz 7 gibt eine Auskunft über die Dichte PICARDScher Ausnahmewerte $z = d$.

Da Satz 6 sich ohne weiteres (und zwar durch Abbildung im kleinen) auf F -Mengen übertragen läßt, ergibt sich aus Satz 5 noch der allgemeinere

Satz 7'. M sei F -Menge und g in $\mathfrak{G} - M$ algebroid, jedoch in wenigstens einem Punkte von M singular. Schneidet nun g keine der Ebenen $z = d \in \mathfrak{P}$ in unendlich vielen Punkten, so ist \mathfrak{P} eine harmonische Nullmenge.

5. Der Beweis des ursprünglichen THULLENSchen Satzes (und ebenso der seiner Verallgemeinerung) beruht auf zwei wesentlich verschiedenen Aussagen (Hilfssatz 1 und 2 unter 9.). Beide leitet THULLEN mit Hilfe des zweiten COUSINSchen Satzes ab. Für die Übertragung auf andere Fälle ist es jedoch zweckmäßig, den COUSINSchen Satz zu vermeiden. Das ist unter 9. geschehen.

Hilfssatz 2 kann (beim alten Satz), wie bekannt, aus einem Satz von RADÓ⁹⁾ abgeleitet werden, den H. CARTAN¹⁰⁾ besonders kurz bewiesen hat. Der RADÓsche Satz läßt sich allgemeiner fassen, so daß er auch in unserem Falle ausreicht. Auch der CARTANSche Beweisansatz ist durchführbar, wenn statt des Logarithmus die EVANSSche Funktion genommen wird¹¹⁾.

Satz von RADÓ. In dem echten Teilgebiet G des Einheitskreises sei $w(z)$ beschränkt und k -wertig algebroid, aber nicht konstant. B sei der in $|z| < 1$

⁷⁾ THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 111 (1935), Satz 2.

⁸⁾ A. a. O., Theorem 8 und 9.

⁹⁾ RADÓ, T.: Über eine nicht fortsetzbare RIEMANNSche Mannigfaltigkeit. Math. Zeitschr. 20 (1934).

¹⁰⁾ CARTAN, H.: Sur une extension d'un théorème de RADÓ. Math. Ann. 125 (1952). — Zum Satz von RADÓ vgl. auch: H. BEHNKE u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNScher Gebiete. Math. Ann. 124 (1951).

¹¹⁾ THULLEN benutzt den RADÓschen Satz nicht, sondern leitet ihn aus dem seinen von neuem her. Dies Verfahren ist auch bei Satz 6 vollständig durchführbar, aber etwas umständlicher.

gelegene Teil des Randes von G . Dann gilt: Gehören alle Randwerte von $w(z)$ auf B einer harmonischen Nullmenge N an, so ist $w(z)$ im Einheitskreis k -wertig algebroid.

Zusatz 1. Die Voraussetzung kann weiter abgeschwächt werden. Nicht alle Randwerte von $w(z)$ auf B müssen in N liegen. Es genügt anzunehmen: Zu jeder Folge $z_n \rightarrow \alpha \in B$ gibt es eine Folge von Funktionswerten $w(z_n)$, deren Grenzwerte sämtlich zu N gehören.

Beweis. Man bilde zu N die EVANSSCHE Potentialfunktion $u(w)$ und dann die Funktion $h(z) = u(w(z))$. Sie ist k -wertig harmonisch in G und dort nach unten beschränkt. Ferner gibt es zu jeder Folge $z_n \rightarrow \alpha \in B$ eine Folge von Funktionswerten, so daß $h(z_n) \rightarrow +\infty$. Die Summe $H = h_1 + \dots + h_k$ der Zweige von $h(z)$ ist in G eindeutig, harmonisch und hat auf B den einzigen Randwert $+\infty$. Man ergänze H durch die Festsetzung $H = +\infty$ in $\{|z| < 1\} - G$ zu einer im Einheitskreis superharmonischen Funktion. Nach Satz d) ist entweder $H = +\infty$ oder B vom harmonischen Maß 0. Im ersten Fall ist h , also auch w eine Konstante. Das widerspricht der Voraussetzung. Im zweiten Fall betrachte man die symmetrischen Grundfunktionen der k -Zweige w_1, \dots, w_k . Sie sind in G eindeutig, regulär und beschränkt. Infolgedessen bleiben sie auch auf B noch regulär¹²⁾. Dann ist $w(z)$ im ganzen Einheitskreis k -wertig algebroid.

Zusatz 2. Es ist für den Beweis von Hilfssatz 2 (unter 9) bequem, eine noch etwas allgemeinere Fassung zu besitzen. Seien $w^{(1)}, \dots, w^{(r)}$ in G beschränkt und k_e -wertig algebroid, aber kein $w^{(e)}$ konstant. Gilt dann: Zu jeder Folge $z_n \rightarrow \alpha \in B$ gibt es eine Folge von Funktionswerten $w^{(e_n)}(z_n)$, deren Grenzwerte sämtlich zu N gehören, so ist jede Funktion $w^{(e)}$ in $|z| < 1$ k_e -wertig algebroid.

Beim Beweis setze man $h(z) = u(w^{(1)}(z)) + \dots + u(w^{(r)}(z))$ und schließe wie früher weiter.

Der RADÓSCHE Satz (mit Zusätzen) gilt ebenso für Funktionen von mehreren Variablen; das folgt aus dem bewiesenen auf Grund des HARTOGSSCHEN Hauptsatzes. Infolgedessen geht der Beweis von Satz 6 für $(2n-2)$ -dimensionale analytische Flächen g des R^{2n} ganz analog.

Wie in der Einleitung angegeben, läßt sich Satz 6 sogar auf niederdimensionale analytische Flächen des R^{2n} ausdehnen. Im R^4 kann eine zweidimensionale Fläche g^2 zweidimensionale Singularitätenflächen haben, im R^{2n} eine g^{2k} $2k$ -dimensionale Singularitätenflächen.

Satz 6'. Sei g^{2k} algebroid in $\mathcal{B} = \{|w_1| < 1; \dots; |w_{n-k}| < 1; |z_1| < 1; \dots; |z_k| < 1\}$ abgesehen höchstens von den Punkten der Ebenen $w_1 = c_1; \dots; w_{n-k} = c_{n-k}$, wobei c_i in N_i liegt und alle N_i harmonische Nullmengen sind. Ist dann g^{2k} in $P = (c_1^0, \dots, c_{n-k}^0, 0, \dots, 0)$ singulär, so auch in allen Punkten des Zylinders $\{w_1 = c_1^0; \dots; w_{n-k} = c_{n-k}^0; |z_1| < 1; \dots; |z_k| < 1\}$. (Beweis unter 9.)

6. Satz 6 (für vierdimensionale Flächen im R^6) erlaubt es, ein Analogon des HARTOGSSCHEN Hauptsatzes für vierdimensionale analytische Flächen des

¹²⁾ Vgl. NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen, S. 132, Satz 2. Berlin: J. Springer, 1936.

R^n abzuleiten. Gleiches gilt für $(2n-2)$ -dimensionale analytische Flächen des R^{2n} . Die bei Funktionen üblichen Methoden versagen hier, weil man keinen Ersatz für die Regularitätsradialen hat.

Satz 8. (HARTOGSScher Satz für Flächen.) Für die Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} möge gelten:

a) Der Durchschnitt von \mathfrak{M} und $\mathcal{B}_e = \{w < 1; |z_1| < e; |z_2| < e\}$ besteht aus endlich vielen vierdimensionalen analytischen Flächenstücken.

b) Für alle e mit $|e| < 1$ besteht der Durchschnitt von \mathfrak{M} und $\{w = e; |z_1| < 1; |z_2| < 1\}$ aus endlich vielen zweidimensionalen analytischen Flächenstücken $\mathcal{F}(e)$, die sich nicht erweitern lassen.

c) Jedes $\mathcal{F}(c)$ schneidet $\mathcal{B}_\gamma = \{w < 1; |z_1| < \gamma; |z_2| < \gamma; \gamma < e\}$.

Dann besteht \mathfrak{M} in $\mathcal{B} = \{w < 1; |z_1| < 1; |z_2| < 1\}$ aus endlich vielen vierdimensionalen analytischen Flächenstücken. Kurz: \mathfrak{M} ist in \mathcal{B} algebroid.

Er folgt aus dem

Hilfssatz. Sei $r < 1$; $\mathcal{B}_r = \{w < r; |z_1| < r; |z_2| < r\}$ und \mathfrak{M}_r der Teil von $\mathfrak{M} \cap \mathcal{B}_r$, der den Bedingungen a) bis c) genügt. Ferner möge c in $|w| < r$ eine abgeschlossene Menge \mathfrak{P} von positivem Maß durchlaufen.

Dann gibt es in \mathfrak{P} ein c_* , so daß \mathfrak{M}_r in der Umgebung jedes Punktes von $\{w = c_*; |z_1| < r; |z_2| < r\}$ algebroid ist (Beweis unter 11.).

Beweis von Satz 8. Es genügt zu zeigen, daß \mathfrak{M}_r in \mathcal{B}_r algebroid ist. Sei $r' < r$ und \mathfrak{P} die Menge der c , für welche auf $\{w = c; |z_1| \leq r'; |z_2| \leq r'\}$ eine Singularität von \mathfrak{M}_r liegt. \mathfrak{P} ist abgeschlossen und nach dem Hilfssatz vom Maß 0. Wegen Satz 6 ist dann aber \mathfrak{P} leer. Also ist \mathfrak{M}_r in \mathcal{B}_r algebroid.

7. Mehrfach benutzt werden folgende bekannten Sätze. Darin seien: G ein beschränktes Gebiet der w -Ebene, N und \mathfrak{P} abgeschlossene Punktmengen in G , N eine harmonische Nullmenge und \mathfrak{P} von positivem harmonischem Maß.

Satz a)¹³⁾. Ist $\mathfrak{P} = \sum_1^\infty \mathfrak{P}_n$ und sind die \mathfrak{P}_n abgeschlossen, so hat wenigstens eine der \mathfrak{P}_n positives harmonisches Maß. Daraus folgt

Satz b). In \mathfrak{P} gibt es einen Punkt c , so daß der Durchschnitt von $|w - c| \leq \varepsilon$ mit \mathfrak{P} für jedes $\varepsilon < 0$ positives harmonisches Maß hat.

Satz c)¹⁴⁾. Um jeden Punkt c aus N als Mittelpunkt gibt es beliebig kleine Kreise, welche N nicht treffen.

Satz d)¹⁵⁾. Ist $h(w)$ superharmonisch in G und $h(c) = +\infty$ für alle c aus \mathfrak{P} , so ist $h(w) = +\infty$.

Satz e)¹⁶⁾. In $\{w \in G - N; |z| < 1\}$ gilt die zweite Aussage von COUSIN: Jedes dort algebroid analytische Flächenstück besitzt eine reguläre Darstellung $g(w, z) = 0$.

¹³⁾ Vgl. NEVANLINNA, a. a. O., S. 119.

¹⁴⁾ Vgl. etwa: BRELOT, J. de Math. 19 (1940), théorème D, S. 334.

¹⁵⁾ Vgl. etwa LELONG, a. a. O., théorème 10, S. 105.

¹⁶⁾ Vgl. OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Lieferung, S. 264, 2. Auflage. Leipzig: C. G. Teubner 1929.

8. Beweise von Satz 3 und Satz 2.

Satz 3. $\varrho(z)$ ist superharmonisch.

Beweis. 1. Ist $\varrho(z)$ nicht beschränkt, so setze man $\varrho_1(z) = \min(\varrho(z), \lambda)$ und $\varrho(z) = \lim \varrho_1(z)$. Sind die $\varrho_1(z)$ superharmonisch, so auch $\varrho(z)^{12)}$.

2. Man darf nun $\varrho(z)$ als beschränkt annehmen. Außerdem ist $\varrho(z)$ offenbar halbstetig, also summierbar. Infolgedessen läßt sich das Kriterium¹³⁾ benutzen: Gilt für jeden in G enthaltenen Kreis $|z - \alpha| \leq r$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\alpha + r e^{i\theta}) d\theta \leq \varrho(\alpha),$$

so ist ϱ in G superharmonisch. —

Sei $\bar{\varrho}(\theta) = \varrho(\alpha + r e^{i\theta})$. $\bar{\varrho}(\theta)$ ist als Limes einer Folge stetiger Funktionen $\varphi_n(\theta) < \bar{\varrho}(\theta)$ darstellbar¹⁴⁾. Es genügt also zu zeigen:

Sei $|z - \alpha| \leq r$ in G enthalten, $\psi(\theta)$ stetig und $\psi(\theta) < \bar{\varrho}(\theta)$, ferner $h_1(z)$ die in $|z - \alpha| < r$ reguläre Potentialfunktion mit den Randwerten $\psi(\theta)$. Dann ist $h_1(z) \leq \varrho(z)$ in $|z - \alpha| < r$. Mit anderen Worten:

(*) $f(w, z)$ ist in $\mathfrak{B} = \{w \text{ aus } B(h_1(z), z); |z - \alpha| < r\}$ regulär.

Das Gebiet $B(h_1(z'), z')$ der Ebene $z = z'$ setzt sich aus $1/2 \leq |w| < 1$ und den hiermit zusammenhängenden Teilen des Durchschnitt von $b(w, z') < h_1(z')$ (d. h. $e^{b-h_1} < 1$) und $|w| < 1$ zusammen. Seien $\mathfrak{R} = \{1/2 \leq |w| < 1; |z - \alpha| < r\}$ und $\mathfrak{D} = \{e^{b-h_1} < 1; |z - \alpha| < r\}$ die entsprechenden Teile von $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{D}$. Auf dem Randhyperflächenstück $|z - \alpha| = r$ von \mathfrak{B} ist $f(w, z)$ nach Voraussetzung regulär.

Zum Beweise von (*) ergänze man b, h zu regulär-analytischen Funktionen $g(w, z) = b(w, z) + i \cdot c(w, z)$; $h(z) = h_1(z) + i \cdot h_2(z)$. Dann ist h eindeutig, g dagegen im allgemeinen nicht. Die aus der Vieldeutigkeit von g entspringenden Schwierigkeiten lassen sich wie folgt überwinden.

\mathfrak{D} kann beliebig genau durch einen Bereich $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$ approximiert werden, dessen innere Punkte den Relationen

$$(\mathfrak{E}) \quad \varphi = |e^{\varrho-h}|^2 - \gamma(|w|^2 + |z|^2) < \Gamma; (\gamma, \Gamma > 0); |w| < 1; |z - \alpha| < r$$

genügen, während sein Rand das nicht tut. Überdies kann γ so klein genommen werden, daß in \mathfrak{E} stets $\varphi > 0$ ist. Allgemein sei $\mathfrak{E}(t)$ der Teil von \mathfrak{E} , in welchem $\varphi < t$ ist. Die $\mathfrak{E}(t)$ haben die Eigenschaften:

C 1. Wenn $t > t'$, so $\mathfrak{E}(t) \supset \mathfrak{E}(t')$.

C 2. Liegt P in \mathfrak{E} und ist $\varphi(P) = t'$, so ist P Randpunkt von $\mathfrak{E}(t')$. Es gibt beliebig kleine Umgebungen U von P , deren in $\varphi < t'$ gelegener Teil U ein einziges Gebiet ist.

C 3. Sei $\mathfrak{E}(t')$ die Menge der Randpunkte von $\mathfrak{E}(t')$ mit $\varphi = t'$ und U eine Umgebung von $\mathfrak{E}(t')$. Dann gibt es ein $\epsilon < 0$ derart, daß $\mathfrak{E}(t)$ in $\mathfrak{E}(t') \cup U$ enthalten ist, wenn nur $0 < t - t' < \epsilon$.

C 1 folgt aus der Definition. C 2 wird unten (Hilfssatz) bewiesen. C 3 folgt aus der Stetigkeit von φ und C 2.

¹²⁾ Vgl. RADÓ, T.: Subharmonic functions, S. 14, 3.6. Ergebn. d. Math. und ihrer Grenzgebiete 5, 1. Berlin: J. Springer 1937.

¹³⁾ RADÓ, a. a. O., S. 7, 2.3.

¹⁴⁾ RADÓ, a. a. O., S. 1, 1.3.

Es ist zu zeigen, daß $f(w, z)$ in $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{C}$ regulär und eindeutig bleibt. Anderenfalls muß es ein größtes $t_* < \Gamma$ geben, so daß $f(w, z)$ noch in $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{C}(t_*)$ regulär bleibt (vgl. C 1). Wegen C 3 genügt es, um einen Widerspruch herbeizuführen, zu zeigen, daß $f(w, z)$ noch in einer hinreichend kleinen Umgebung U von $\mathfrak{I}(t_*)$ regulär bleiben muß. Sei nun $\varphi(P) = t_*$ und $F(w, z)$ ein Funktionselement der (im großen im allgemeinen vieldeutigen) Funktion $g(w, z) - h(z)$. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes (s. unten) sind dann erfüllt. Folglich gibt es genau eine lokale Fortsetzung von $f(w, z)$ im Punkte P . Man sieht nun leicht, daß diese lokalen Fortsetzungen in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{I}(t_*)$ eine eindeutige reguläre Funktion, die gewünschte Fortsetzung von $f(w, z)$, erklären.

Es steht noch aus der

Hilfssatz. Es sei $F(w, z)$ in U regulär und eindeutig; $P = (w_0, z_0)$ in U ;
 $\varphi = |F(w, z)|^2 - \gamma(|w|^2 + |z|^2)$; ($\gamma, \Gamma > 0$) und $\varphi(P) = \Gamma$.

Dann gilt:

1. Es gibt eine Umgebung $V \subset U$, deren in $\varphi < \Gamma$ gelegener Teil \bar{V} ein einziges Gebiet und nicht leer ist.

2. Ist $f(w, z)$ in \bar{V} regulär und eindeutig, so existiert in P genau eine lokale Fortsetzung von $f(w, z)$. Das heißt: Es gibt eine Umgebung V' von P und eine in ihr reguläre Funktion $f'(w, z)$, so daß $f' = f$ in $V' \cap \bar{V}$.

Beweis. 1. Man ordne U das analytische Flächenstück $\mathfrak{F}^4 = \{(w, z) \in U; Z = F(w, z)\}$ im (Z, w, z) -Raum zu. Dann gibt es eine Umgebung V^6 des Punktes (Z_0, w_0, z_0) (wobei $Z_0 = F(w_0, z_0)$), so daß \mathfrak{F}^4 im Durchschnitt von $\Phi = |Z|^2 - \gamma(|w|^2 + |z|^2) < \Gamma$ und V^6 nicht zerfällt, jedoch $\Phi < \Gamma$ schneidet²⁰⁾. Daraus folgt die Behauptung.

2. Bei der Zuordnung $U \rightarrow \mathfrak{F}^4$ geht f in eine Funktion auf \mathfrak{F}^4 über. Diese läßt sich nach (Z_0, w_0, z_0) fortsetzen²¹⁾. — Man kann stattdessen wie folgt schließen. Es gibt eine Folge analytischer Ebenenstücke E_n^4, E^4 , so daß gilt: 1. E_n^4 liegt ganz in $\Phi < \Gamma$. 2. E^4 geht durch P und $E^4 - P$ liegt in $\Phi < \Gamma$. 3. $E_n^4 \rightarrow E^4$. Den Schnitten $E_n^4 \cap \mathfrak{F}^4 = \tilde{\mathfrak{F}}_n^2$; $E^4 \cap \mathfrak{F}^4 = \tilde{\mathfrak{F}}^2$ entsprechen in U analytische Flächenstücke $\mathfrak{F}_n^2 \rightarrow \mathfrak{F}^2$. Auf den \mathfrak{F}_n^2 und auf $\mathfrak{F}^2 - P$ ist $f(w, z)$ regulär und eindeutig; also existiert nach (K) eine Fortsetzung von f in P . Wegen 1. gibt es nur eine derartige Fortsetzung.

Beweis von Satz 2: Ist M B -Menge, so auch K -Menge.

Aus Satz 3 folgt zunächst sofort (vgl. Beweis zu Satz 5)

Satz 4a. Sei $\mathfrak{G} = \{|w| < 1; |z| < 1\}$; $\mathfrak{G}_e = \{|w| < 1; |z| < e\}$; $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} - M$, $\mathfrak{G}'_e = \mathfrak{G}_e - M$ und $\mathfrak{R} = \{1/2 < |w| < 1; |z| < 1\}$; $\mathfrak{R} \cap M = 0$. Die biharmonische Funktion $b(w, z)$ sei in \mathfrak{G}' regulär und $\lim_{Q \rightarrow M} b(Q) = +\infty$. Dann gilt: Ist $f(w, z)$ regulär in $\mathfrak{G}' \cup \mathfrak{R}$, so auch in \mathfrak{G}' .

²⁰⁾ ROTHSTEIN, W., Über die Fortsetzung analytischer Flächen, Satz B. Math. Ann. 122 (1951). Der entsprechende Satz gilt auch im vorliegenden Fall.

²¹⁾ ROTHSTEIN, W.: Über die Fortsetzung von Verteilungen meromorpher Ortsfunktionen im \mathbb{R}^n . Math. Ann. 124 (1952).

(Ka) sei der Satz (K) in dem besonderen Fall, daß $\mathfrak{F}_n = \{|w| < 1; z = d_n\}$; $\mathfrak{F} = \{|w| < 1; z = 0\}$; $C = \{|w| = 1; z = 0\}$ und $\lim d_n = 0$ ist. Aus Satz 4a folgt leicht

Hilfssatz 1. (Ka) gilt in $\mathfrak{G} - M$, wenn $M \cap C = 0$ ist. (Voraussetzungen über M wie in Satz 4a.)
Hieraus ergibt sich

Hilfssatz 2. Sei $\varphi = |w|^2 - \gamma|z|^2$; $\gamma > 0$; $\varphi(P) = 1$ und U der in $\varphi < 1$ gelegene Teil einer Kugel um P . M sei B -Menge. Dann gilt: Ist $f(w, z)$ regulär in $U' = U - M$, so bleibt $f(w, z)$ regulär in $V - M$, wo V eine volle Umgebung von P ist.

Beweis. Sei $P = (a, c)$. Es gibt ein $\Gamma' > 0$ und eine Umgebung V' von P , so daß: 1. alle Flächen $\mathfrak{F}(A, \Gamma) = \{\bar{a}(w-a) - \gamma\bar{c}(z-c) + A(z-c)^2 = -\Gamma\}$ mit $|A| < 1$; $0 < \Gamma < \Gamma'$ V' nur in $\varphi < 1$ schneiden, und 2. eine in $V' - M$ reguläre biharmonische Funktion $b(w, z)$ mit $\lim_{Q \rightarrow M} b(Q) = +\infty$ existiert.

Man fixiere nun A^* ($|A^*| < 1$) so, daß $\mathfrak{F}(A^*, 0)$ nicht auf M liegt. Das ist wegen B 2. sicher möglich. Mittels der in einer passenden Umgebung $V'' \subset V'$ von P ein-eindeutigen regulären Abbildung

$$T: \quad w' = \bar{a}(w-a) - \gamma\bar{c}(z-c) + A^*(z-c)^2; \quad z' = z-c \\ \text{(falls } a \neq 0; \text{ sonst } z' = w-a)$$

bilde man $\mathfrak{F}(A^*, 0)$ auf $w' = 0$ ab. Wegen B 3 läßt sich ein Kreis $\{w' = 0; |z'| = d\}$ in $T(V'')$ angeben, der $T(M)$ nicht trifft. Nun kann Hilfssatz 1 angewendet werden. Dann folgt die Behauptung.

Ich habe früher gezeigt, daß dieser Hilfssatz bereits den allgemeinen Kontinuitätssatz (K) enthält, wenn M leer ist²²). Der Beweis dafür läßt sich auf den vorliegenden Fall fast wörtlich übertragen. Das soll nicht mehr durchgeführt werden. Aus Hilfssatz 2 folgt also die Gültigkeit von (K) in $R^4 - M$. Das ist Satz 2.

9. Beweis von Satz 6²³) und Satz 6'. G sei ein Gebiet der w -Ebene, B sein Rand und N eine Nullmenge in G .

Hilfssatz 1. g sei in der Vereinigung von (1): $\{w \in G; |z| < \varepsilon\}$ und (2): $\{w \in G - N; |z| < 1\}$ algebroid und schneide $\{w \in B; |z| < 1\}$ nicht. Dann trifft g das Gebiet $\{w \in G; z = 0\}$.

Beweis. Ist der Satz falsch, so ist für genügend kleines $\varepsilon > 0$ das Gebiet $\{w \in G; |z| < \varepsilon\}$ frei von g -Punkten. In (2) dagegen liegen nach Voraussetzung g -Punkte; einer von ihnen sei $Q = (a, d)$. Da N Nullmenge ist, lassen sich endlich viele zu N fremde geschlossene Jordankurven γ_r bestimmen, so daß gilt²⁴):

1. Die γ_r umschließen N ; d. h. das von B und den γ_r begrenzte Gebiet I' ist frei von N -Punkten (enthält aber $w = a$).

²²) ROTHSTEIN, W.: Die invariante Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen. Archiv f. Math. 1 (1948).

²³) Vgl. dazu: THULLEN, a. a. O.

²⁴) Vgl. NEVANLINNA, a. a. O., S. 106 ff.

2. Ist $h(w)$ die in Γ reguläre Potentialfunktion mit den Randwerten $h(B) = 0$ und $h(\gamma_r) = \log e/2$, so ist $h(a) > \log |d|$.

Dann liegt Q also im Gebiet $\{w \in \Gamma; |z| < e^{h(w)}\}$. Es gibt weiter ein λ zwischen 0 und 1, so daß in $\{w \in \Gamma; |z| < \lambda e^{h(w)}\}$ kein g -Punkt liegt, wohl aber auf $\{w \in \Gamma; |z| = \lambda e^{h(w)}\}$ ein solcher vorhanden ist. Das ist jedoch nur möglich, wenn g mit einer der auf $|z| = \lambda e^{h(w)}$ liegenden analytischen Flächen zusammenfällt (s. unten, S. 8,2). Diese nun schneiden sämtlich wenigstens eine der Hyperflächen $\{w \in B\}$ oder $\{w \in \gamma_r\}$ (s. unten, S. 7). Das widerspricht den Voraussetzungen über g .

Hilfssatz 2. g sei in (1): $\{w \in G - N; |z| < 1\}$ algebroid und möge das Hyperflächenstück $\{w \in B; |z| < 1\}$ nicht schneiden. Ferner sei A das größte Teilgebiet von $|z| < 1$, so daß g in (2): $\{w \in G; z \in A\}$ algebroid ist. Dann ist A entweder leer oder gleich $|z| < 1$.

Beweis. A sei nicht leer. g trifft die Ebenen $z = \text{const.}$ nur in isolierten Punkten. Da g über A die Hyperfläche $\{w \in B\}$ nicht trifft, jedoch nach Hilfssatz 1 das Gebiet (2) schneidet, wird g in (2) durch eine reguläre Gleichung

$$(*) \quad w^m + E_1(z) w^{m-1} + \dots + E_m(z) = 0$$

genau darstellt. Es ist denkbar, daß g über A in mehrere Stücke zerfällt. Man darf annehmen, daß keines von ihnen eine Ebene $w = \text{const.}$ ist. Dann definiert (*) mehrere in A algebroiden Funktionen $w^{(1)}, \dots, w^{(r)}$. Da A maximal ist, gilt: Zu jeder Folge $z_n \rightarrow \alpha; z_n \in A; \alpha$ Randpunkt von A , gibt es eine Folge von Funktionswerten $w^{(n)}(z_n)$, deren Grenzwerte sämtlich N angehören. (Zur Begründung dieses Schlusses vgl. Beweis zu Satz 6'.) Zusatz 2 zum Satz von RADÓ schließt den Beweis.

Satz 6: g sei algebroid in $\{w \text{ aus } (|w| < 1) - N; |z| < 1\}$ und in $(0, 0)$. Dann ist g auf $\{w = 0; |z| < 1\}$ algebroid.

Beweis. Angenommen, $(0, \alpha)$ mit $|\alpha| < 1$ sei Singularität von g , in allen Punkten des Kreises $w = 0; |z| < |\alpha|$ dagegen sei g algebroid. Weiter sei $\vartheta < 1$ und $d > 0$ so klein, daß g in $\{|w| < d; |z| < \vartheta \cdot |\alpha|\}$ algebroid bleibt. Nach Satz c) wähle man in $|w| < d$ einen Kreis $U(0)$, dessen Rand keinen N -Punkt enthält. Unter allen Kreisen $\{w = a \in U \cap N; |z| < R(a)\}$ mit der Eigenschaft, daß auf ihrem Rand — nicht aber in ihrem Inneren — eine Singularität von g liegt, gibt es solche mit kleinstem Radius. $\{w = b; |z| < R\}$ sei einer von ihnen und (b, q) mit $|q| = R$ eine Singularität von g . Dann ist also g in $\{w \in U; |z| < R\}$ algebroid und in (b, q) singulär.

g trifft die Ebene $z = q$ nur in isolierten Punkten. Infolgedessen kann U so abgeändert werden, das Gebiet heiße dann G mit dem Rand B , daß auf $\{w \in B; z = q\}$ weder ein N -Punkt, noch ein g -Punkt liegt. Darauf lege man $\epsilon > 0$ so fest, daß g auch $\{w \in B; |z - q| < \epsilon\}$ nicht schneidet. Man hat dann:

g ist algebroid in (1): $\{w \in G - N; |z - q| < \epsilon\}$ und schneidet $\{w \in B; |z - q| < \epsilon\}$ nicht. Ferner ist g algebroid in (2): $\{w \in G; z \in A^*\}$ mit $A^* = \{|z - q| < \epsilon\} \cap \{|z| < R\}$.

Nach Hilfssatz 2 muß das größte Gebiet $A > A^*$, für welches g in $\{w \in G; z \in A\}$ algebroid ist, mit $|z - q| < \epsilon$ identisch sein. Dem widerspricht jedoch, daß g in (b, q) singulär wird.

Grundlagen der Theorie 2 k -dimensionaler analytischer Flächen*.

Die Koordinaten seien $w_1, \dots, w_r, z_1, \dots, z_k$ ($r = n - k$). Vielfach wird zur Abkürzung $w = (w_1, \dots, w_r)$ und $z = (z_1, \dots, z_k)$ geschrieben. $|w| < a$ bedeutet dann $|w_1| < a_1, \dots; |w_r| < a_r$ und $z = c$ heißt $z_1 = c_1; \dots; z_k = c_k$.

D 1: Eine Punktmenge \mathbb{E}^k in $|w| < a; |z| < b$ ist ein Gebilde k -ter Stufe (Element \mathbb{E}^k), wenn sie durch ein System

$$(*) \quad \begin{aligned} \psi &= w_1^m + E_1(z) w_1^{m-1} + \dots + E_m(z) = 0 \\ w_2 &= v_2(z); \dots; w_r = v_r(z) \end{aligned}$$

genau dargestellt wird. Es soll ein $b' > b$ geben, so daß gilt: $E(z)$ in $|z| < b'$ regulär; $E(0) = 0$; $\psi = 0$ in 0 irreduzibel; $v(z)$ auf $\psi = 0$ regulär und eindeutig; auf $|w| = a; |z| < b'$ liegt keine Lösung von (*).

Ferner soll \mathbb{E}^k auch dann ein Gebilde k -ter Stufe sein, wenn die obigen Bedingungen nach einer nicht-singulären linearen Koordinatentransformation erfüllt sind.

Die Darstellung (*) heißt kanonisch, die Koordinaten (w, z) kanonische Koordinaten. Mit (w, z) sollen auch alle Koordinaten $w' = w + c; z' = z + d$ und die entsprechenden Systeme kanonisch genannt werden. 0 heißt der Mittelpunkt von \mathbb{E}^k .

S 1: Zu einer beliebigen Folge \mathbb{E}_v^k ($v = 1, 2, \dots$) von Elementen gibt es stets Koordinaten, die für alle \mathbb{E}_v^k kanonisch sind.

S 2 (Folgerung aus S 1): Es gibt stets Linearformen

$$L_i = a_{i1} w_1 + \dots + a_{ir} w_r + b_{i1} z_1 + \dots + b_{ik} z_k \quad (i = 1, \dots, k),$$

so daß alle $(2n - 2k)$ -dim. Ebenen $L_i = c_i$ die \mathbb{E}_v^k nur in isolierten Punkten treffen. Es kann $|b_{ik}| \neq 0$ gemacht werden.

S 3: Sind die Koordinaten (w', z') noch nicht kanonisch für alle \mathbb{E}_v^k , schneiden aber die Ebenen $z'_1 = c_1; \dots; z'_k = c_k$ die \mathbb{E}_v^k nur in isolierten Punkten, so gibt es kanonische Koordinaten $w = L(w'); z = z'$. Es braucht also nur eine Transformation der w' vorgenommen zu werden.

S 1 läßt sich demnach verschärfen zu

S 4: Für alle \mathbb{E}_v^k kanonische Koordinaten (w, z) können durch eine Koordinatentransformation $z = L_1(w', z'); w = L_2(w')$ eingeführt werden.

Diese Sätze können aus der Darstellung im OSGOODSchen Lehrbuch abgeleitet werden; in dieser Form stehen sie dort nicht.

S 5 (Maximumprinzip): $g(w, z)$ sei in $|w| < a; |z| < b'$ regulär und \mathbb{E} dort durch (*) definiert. Ist dann $|g(0)| = \max |g(\mathbb{E})|$, so ist g auf \mathbb{E} konstant. Der Satz bleibt offenbar richtig, wenn 0 der Mittelpunkt von \mathbb{E} ist, die Koordinaten aber nicht kanonisch sind.

Beweis: \mathbb{E} hat über $|z| < b$ m Blätter, $g(\mathbb{E})$ entsprechend m Zweige $\varphi_\mu(z)$. Die symmetrischen Grundfunktionen der φ_μ sind in $|z| < b$ regulär und eindeutig. Sie sind sämtlich konstant. Sei etwa $s(z) = \sum \varphi_\mu$. Dann ist $\max |s| \leq \max \sum |\varphi_\mu| \leq \sum \max |\varphi_\mu| \leq m \cdot |g(0)| = |s(0)|$. Also ist $s = s(0)$ nach dem

*) Es sei nochmal auf die systematische Darstellung bei REMMERT u. STEIN, a. a. O., verwiesen.

Maximumprinzip. Analog schließt man bei den anderen Grundfunktionen. Da sie also sämtlich konstant sind, muß auch $g(\mathfrak{E})$ selbst konstant sein.

S 6 (Folgerung aus S 5): 1. Ist $|g| = 1$ eine analytische Hyperfläche durch O und \mathfrak{E} durch (*) definiert, schneidet ferner \mathfrak{E} das Gebiet $|g| > 1$ nicht, so muß \mathfrak{E} in der „Faser $g = g(0)$ “ liegen.

2. Da eine Hyperebene in beliebigen Koordinaten in der Form $|g| = 1$ darstellbar ist, folgt nun speziell: Es ist unmöglich, daß ein Element \mathfrak{E} eine Hyperebene nur in seinem Mittelpunkt berührt und sonst ganz auf einer Seite der Hyperebene liegt.

D 2: \mathfrak{B} sei ein schlichtes beschränktes Gebiet des R^{2n} . Eine Punktmenge \mathfrak{M}^k in \mathfrak{B} heißt analytisches $2k$ -dim. Flächenstück, wenn gilt:

1. \mathfrak{M}^k ist in \mathfrak{B} abgeschlossen.

2. Zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ gibt es eine Umgebung \mathfrak{U} , so daß $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{U}$ die Vereinigung endlich vieler Elemente mit dem Mittelpunkt P ist.

\mathfrak{M}^k heißt irreduzibel, wenn außerdem gilt:

3. \mathfrak{M}^k ist nicht die Vereinigung nicht-leerer Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, welche 1. und 2. erfüllen.

S 7: Auf dem Rande von \mathfrak{B} liegt wenigstens ein Häufungspunkt von \mathfrak{M}^k .

Beweis: Anderenfalls gibt es eine Kugel K , welche \mathfrak{M}^k umfaßt und deren Rand einen Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ enthält. Die Hypertangente von K in P wird von \mathfrak{M}^k nur in P berührt. Wegen der Bedingung 2. in D 2 widerspricht das S 6.

S 8: $f(w, z)$ sei in \mathfrak{B} regulär und \mathfrak{M}^k dort irreduzibel. Dann gilt (P sei ein Punkt aus $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{B}$):

1. Ist $|f(P)| = \max |f(\mathfrak{M}^k)|$, so $f(\mathfrak{M}^k) \equiv f(P)$. (Maximumprinzip auf \mathfrak{M}^k).

2. Ist $|f(P)| = 1$ und schneidet \mathfrak{M}^k das Gebiet $|f| > 1$ nicht, so liegt \mathfrak{M}^k in der „Faser $f = f(P)$ “.

Beweis. 1. folgt aus S 5 und der Bedingung 2. in D 2, und 2. ist nur eine andere Form von 1.

Außerdem ist noch wesentlich

S 9 (Kanonische Darstellung im großen): Sei \mathfrak{M}^k ein irreduzibles $2k$ -dim. analytisches Flächenstück in $\mathfrak{B} = \{|w| < 1; |z| < 1\}$, welches $(1 - \varepsilon < |w| < 1)$ nicht schneidet. Die Koordinaten (w, z) mögen für alle Elemente von \mathfrak{M}^k kanonisch sein. Dann wird \mathfrak{M}^k in \mathfrak{B} durch ein System

$$(*) \quad \begin{aligned} \psi &= w_1^m + E_1(z) w_1^{m-1} + \dots + E_m(z) = 0 \\ w_2 &= v_2(z); \dots, w_r = v_r(z) \end{aligned}$$

genau dargestellt. ψ ist in \mathfrak{B} regulär, $\psi = 0$ dort irreduzibel. Die v sind auf $\psi = 0$ regulär und eindeutig.

Beweisskizze: Durch die lokalen $\psi_P = 0$ wird eine in $|z| < 1$ unbeschränkt fortsetzbare, etwa m -deutige Funktion $w(z)$ definiert, welche in $|z| < 1$ algebroid ist. Sie genügt einer Relation $\psi = 0$. Die lokalen Funktionen $v(z)$ müssen sich dabei zu je einer auf $\psi = 0$ regulären und eindeutigen Funktion $v(z)$ zusammenschließen.

Beweis von Satz 6'. Auch hier werden die oben eingeführten Abkürzungen benutzt. Es bedeutet also $w \in G: w_1 \in G_1; \dots; w_r \in G_r$ und $w \in U: w_1 \in U_1; \dots; w_r \in U_r$. Unter N dagegen werde die Vereinigung der $2k$ -dim. Ausnahme-

ebenen $w_j = c_j \in N_j$ ($j = 1, \dots, r$) verstanden, so daß also $(|w| < 1) - N$ der an diesen Ebenen geschlitzte Zylinder $|w| < 1$ ist. Im 1. Absatz des Beweises von Satz 6 ist noch zu beachten: Man hat natürlich jetzt r Kreise U_1, \dots, U_r in den Ebenen der Variablen w_1, \dots, w_r zu bestimmen. Dagegen braucht man auch jetzt nur ein ϑ und ein d , vor allem aber nur ein $R(a) = R(a_1, \dots, a_r)$ für z_1, \dots, z_k . Schließlich bedeute $|q| = R: \max |q_i| = R$ ($i = 1, \dots, k$).

Beim Beweis von Satz 6' darf man (vgl. S 4) annehmen, daß die Ebenen $z = \text{const.}$ g nur in isolierten Punkten betreffen. Nach einer weiteren Transformation — die vorläufig unterbleibt — würden die Koordinaten kanonisch sein. Der Beweis von Satz 6 (abgesehen von den Hilfssätzen) kann nun wörtlich übernommen werden.

Zum Hilfssatz 1: Die Behauptung ist: g trifft $\{w \in G; z_1 = \dots = z_k = 0\}$. Der Satz ist richtig für $r = k = 1$.

1. Beweis für $k = 1$ und beliebiges r .

Ist der Satz falsch, so liegt für genügend kleines $e > 0$ in $(w \in G; |z| < e)$ kein g -Punkt. In (2): $\{w \in G - N; |z| < 1\}$ dagegen liegt ein g -Punkt $Q = (a_1, \dots, a_r, d)$. Nicht für alle j ist $a_j \in N_j$. Sei etwa a_1 nicht in N_1 . Man konstruiere wie früher die Funktion $h(w_1)$. Die Betrachtung der Hyperflächen $|z| = \lambda \cdot e^{h(w)}$ führt dann nach § 8, 2 und § 7 wie oben zum Widerspruch.

2. Beweis für beliebiges $k > 1$ bei festem r durch Induktion. Der Satz sei für $k' = k - 1$ richtig. Zwei Fälle sind denkbar.

2.1. g schneidet $\mathcal{B}_0 = \{w \in G - N; |z_1| < 1; \dots; |z_{k-1}| < 1; z_k = 0\}$. Der Schnitt $g_0 = g \cap \mathcal{B}_0$ ist ein analytisches Flächenstück, da g mindestens vierdimensional ist. Nach Induktionsannahme trifft g_0 das Gebiet $\{w \in G; z_1 = \dots = z_k = 0\}$.

2.2 g trifft \mathcal{B}_0 nicht. Das ist nicht möglich. Denn g schneidet (2): $\{w \in G - N; |z_1| < 1; \dots; |z_k| < 1\}$ etwa in $Q = (a_1, \dots, a_r, d_1, \dots, d_k)$. Der Schnitt g_* von g und $z_1 = d_1$ trifft nach Induktionsannahme das Gebiet $\{w \in G; z_2 = \dots = z_k = 0\}$. Also trifft g auch \mathcal{B}_0 .

Zum Hilfssatz 2: Zunächst sei angenommen, daß schon die Koordinaten (w, z) für g kanonisch sind. Dann wird jede in (2): $\{w \in G; z \in A\}$ irreduzible Komponente g_s ($s = 1, \dots, s$) von g dort durch ein kanonisches System

$$\begin{aligned} (\sigma): \quad & w_1^m + E_1(z) w_1^{m-1} + \dots + E_m(z) = 0 \\ & w_2 = v_2(z); \dots; w_r = v_r(z) \end{aligned}$$

genau dargestellt. Nun dürfen wir annehmen, daß kein g_s eine Ebene $w = c$ ist. Insgesamt hat man also $t = r \cdot s$ algebroiden Funktionen $v^{(i)}$. Darunter können noch Konstanten sein.

Sei N_* die Vereinigung der Nullmengen N_1, \dots, N_r , also selbst Nullmenge. Da A maximal ist, muß es zu jeder Folge $z_n \rightarrow \alpha$ ($z_n \in A$; α Randpunkt von A) eine Folge von Funktionswerten $v^{(r_n)}(z_n)$ geben, deren Häufungspunkte in N_* liegen. Das gilt auch dann noch, wenn nur die nicht-konstanten v zugelassen werden. Denn über α soll eine Singularität von g liegen, daher muß wenigstens eine (etwa m -blättrige) Komponente g_s über α singularär werden. Es gibt dann höchstens $m - 1$ algebroiden Punkte von g_s über α , da die Ebenen $z = \text{const.}$ g_s

nur in isolierten Punkten treffen. Erst recht gibt es nur endlich viele g_α -Punkte über α , deren w -Koordinaten nicht in einer der Ausnahmeebenen liegen. Schneidet man hinreichend kleine Umgebungen dieser Punkte aus g_α heraus, so gilt für den Rest g_α^* : Zu jedem z_n (von einem passenden Index an) gibt es überlagerte g_α^* -Punkte, und die Konvergenzpunkte aller Folgen $(w_n, z_n) \in g_\alpha^*$ liegen in den Ausnahmeebenen. Für alle Funktionen des Systems (σ) , die ja nicht sämtlich konstant sein sollen, trifft also die Behauptung zu.

Man kann infolgedessen auf die nicht-konstanten $v^{(r)}$ den Zusatz 2 zum Satz von RADÓ anwenden: Alle v müssen in $|z| < 1$ algebroid sein.

Sind die (w, z) noch nicht kanonisch, so doch laut Voraussetzung die Koordinaten (w', z) nach einer linearen Transformation $w' = L(w)$ der w allein. Jedes g_α hat dann in den (w', z) eine Darstellung

$$(\sigma'): \quad \begin{aligned} w_1^m + E_1(z) w_1^{m-1} + \dots + E_m(z) &= 0 \\ w_2' &= v_2'(z); \dots; w_r' = v_r'(z). \end{aligned}$$

Die Systeme mit lauter Konstanten v' können wieder fortgelassen werden. Den algebroiden v' entsprechen durch die Transformation algebroiden v . Auf diese können dieselben Schlüsse wie oben angewandt werden.

10. Beweis von Satz 7. Angenommen, \mathfrak{P} habe positives Maß.

1. Zu jedem c aus N gibt es eine Folge von Kreisen $K_n(c)$ mit Radien $< 1/n$, auf deren Rand kein Punkt von N oder g liegt [Satz c)]. Die Vereinigung der $K_n(c)$ bei festem n sei V_n .

2. \mathfrak{P}_n sei die Teilmenge von \mathfrak{P} , für die gilt: Ist d in \mathfrak{P} , so liegen auf $\{z = d; w \text{ aus } V_n - N\}$ keine Punkte von g .

3. \mathfrak{P}_n ist abgeschlossen und $\mathfrak{P} = \Sigma \mathfrak{P}_n$. Nach Satz a) existiert ein n_* , so daß $\mathfrak{P}_* = \mathfrak{P}_{n_*}$ positives Maß hat. Weiter gibt es in \mathfrak{P}_* ein d_* , so daß der Durchschnitt von \mathfrak{P}_* mit beliebig kleinen Kreisen um d_* positives Maß hat [Satz b)]. — Sei $V_* = V_{n_*}$.

4. Man mache $\epsilon > 0$ so klein, daß auf (1): $\{w \text{ auf d. Rand von } V_*; |z - d_*| < \epsilon\}$ kein Punkt von g liegt. Wegen Satz e) hat g in (2): $\{w \in V_* - N; |z - d_*| < \epsilon\}$ eine reguläre Darstellung $g = 0$. Auf (1) und auf allen $\{w \in V_* - N; |z - d_*| < \epsilon\}$ ist aber $g \neq 0$. Der Durchschnitt von \mathfrak{P}_* und $|z - d_*| < \epsilon$ hat positives Maß (vgl. 3.). Nach Satz 5 ist dann $g \neq 0$ überall in (2). Das widerspricht Satz 6.

11. Beweis des Hilfssatzes zu Satz 8²⁵⁾. Die zweidimensionalen Schnittflächen $\mathfrak{M}_c \cap (w = c)$ mögen $\mathfrak{F}(c)$ heißen. Auf Grund des Satzes a) lassen sich nacheinander Erleichterungen erzwingen.

1. Man kann annehmen, daß für alle c aus \mathfrak{P} die Anzahl der Flächen $\mathfrak{F}(c)$ gleich ist. Sie sei n .

2. Ist für alle c einer Menge von positivem Maß eines der $\mathfrak{F}(c)$ eine Ebene $(w = c; z_1 = d)$, so gehören diese Ebenen in \mathfrak{S}_0 einer von z_2 unabhängigen Fläche an. Mit dieser Fläche haben die von z_2 abhängigen nichts zu tun

²⁵⁾ Der Beweis beruht auf demselben Grundgedanken wie über in meiner Arbeit (Die Existenz analytischer Flächen, welche sich . . . Arch. f. Math. 1 (1948/49).

und können für sich behandelt werden. Also darf man voraussetzen, daß für c aus \mathfrak{P} keines der $\mathfrak{F}(c)$ eine Ebene ($w = c; z_1 = d$) ist.

3. Es gibt einen Kreis K mit den Eigenschaften:

3.1 $\mathfrak{P}' = K \cap \mathfrak{P}$ hat positives Maß.

3.2 Es gibt in \mathfrak{B}_δ endlich viele Gebiete $D_i = \{w \in K; z_1 \in \Delta_{1i}; z_2 \in \Delta_{2i}\}$, so daß

a) \mathfrak{M}_γ in jedem D_i durch je eine reguläre Gleichung

$$(i) \quad z_2^p + A_1(w, z_1) z_2^{p-1} + \dots + A_p(w, z_1) = 0$$

dargestellt wird;

b) Jedes $\mathfrak{F}(c)$ für $c \in \mathfrak{P}'$ wenigstens ein D_i schneidet.

c) ΣD_i den Durchschnitt von $(w \in K)$ und \mathfrak{B}_γ umfaßt.

Den Gleichungen (i) entsprechen endlich viele Funktionen $z_2 = \varphi_j(w, z_1)$, endlichblättrig algebraisch in $\{w \in K; z_1 \in \Delta_{1i(j)}\}$, wobei die Werte von φ_j dem Inneren von $\Delta_{2i(j)}$ angehören. Insbesondere definiert $z_2 = \varphi_j(c, z_1)$ ein Element eines der $\mathfrak{F}(c)$; umgekehrt gehört zu jedem $\mathfrak{F}(c)$ wenigstens eine solche Funktion φ_j . Eine von ihnen ordnet man jedem $\mathfrak{F}(c)$ zu. Außerdem mögen die n Flächenstücke $\mathfrak{F}(c)$ irgendwie numeriert sein. Dann gibt das n -Tupel $L(c) = \{j_1, \dots, j_n\}$ die Zuordnung der φ_j zu den $\mathfrak{F}(c)$ ($v = 1, 2, \dots, n$) genau an. Die $L(c)$ können abgezählt werden. Nach Satz a) muß es dann eine Menge $\mathfrak{P}'' \subset \mathfrak{P}'$ von positivem Maß geben, so daß allen $c \in \mathfrak{P}''$ dasselbe $L(c) = L''$ zugeordnet ist.

Auf diese Weise sind die $\mathfrak{F}(c)$ zu Scharen von Flächenstücken zusammengefaßt, welche — grob gesagt — analytisch von c abhängen.

4. Auf $w = c$ nehmen wir das erste Flächenstück $\mathfrak{F}_1(c)$. Infolge 2. entspricht ihm ein Stück der RIEMANNschen Fläche einer Funktion $z_2 = \varphi(c, z_1)$. Genauer: Es läßt sich ein Gebiet G über der z_1 -Ebene angeben, welches im allgemeinen mehrblättrig und im Inneren verzweigt sein wird, so daß φ in G regulär und eindeutig ist und $\mathfrak{F}_1(c) = \{z_1 \in G; z_2 = \varphi(c, z_1)\}$. Ist $\delta > 0$ klein genug, so gibt es im Schnitt von $\mathfrak{F}_1(c)$ mit $\mathfrak{B}_{r-\delta}$ sicher nur ein Flächenstück \mathfrak{F}_δ , welches \mathfrak{B}_γ schneidet. Es wird gegeben durch

$$\mathfrak{F}_\delta = \{z_1 \in G_\delta; z_2 = \varphi(c, z_1)\},$$

wobei G_δ ein Teilgebiet von G ist. Aus G_δ stanze man noch durch (mehrblättrige) δ -Kreise die Verzweigungspunkte aus. Der Rest sei G'_δ . Weiter sei G' das an den Verzweigungsstellen punktierte G .

δ sei rational und so klein, daß $G'_\delta \cap \Delta_{11}$ (vgl. 3.2) nicht leer ist, in G'_δ also ein Kreis aus Δ_{11} mit rationalem Mittelpunkt Q und rationalem Radius ϱ fixiert werden kann.

G'_δ kann durch endlich viele Kreise $U_k \subset G'$ überdeckt werden, welche rationale Mittelpunkte P_k und rationale Radien r_k haben. Die Beschreibung der Überdeckung wird so vollständig: einander überlappenden U_i, U_j wird die Zahl $(i, j) = 1$ zugeordnet, wenn sie zu verschmelzen sind, anderenfalls $(i, j) = 0$. Das von den U_k überdeckte Gebiet wird vollständig beschrieben durch den endlichgliedrigen Komplex

$$\Gamma_1(c) = \{\delta; Q; \varrho; P_1, \dots; r_1, \dots; (1, 2), \dots\}$$

rationaler Zahlen. Ebenso verfähre man mit den übrigen $\mathfrak{F}_\nu(c)$. Schließlich wird c zugeordnet $\Gamma(c) = [\Gamma_1(c), \dots, \Gamma_n(c)]$.

5. Die Menge aller $\Gamma(c)$ für $c \in \mathfrak{P}''$ ist abzählbar. Infolgedessen gibt es nach Satz a) eine Menge $\mathfrak{P}_* \subset \mathfrak{P}''$ von positivem Maß, so daß allen c aus \mathfrak{P}_* dasselbe $\Gamma(c) = \Gamma_*$ zugeordnet ist. Das zugehörige, von den U_k überdeckte Gebiet heiße G_1 . Damit hat man folgendes erreicht:

Gegeben sind unverzweigte Gebiete G_1, \dots, G_n über der z_1 -Ebene, in jedem G_r ein Kreis K_r und weiter n Funktionen $\varphi_1(w, z_1), \dots, \varphi_n(w, z_1)$, für welche gilt:

- 1) $\varphi_r(w, z_1)$ ist in $\{w \in K; z_1 \in K_r\}$ regulär.
- 2) Für alle c aus \mathfrak{P}_* ist $\varphi_r(c, z_1)$ in G_r regulär und eindeutig.
- 3) \mathfrak{P}_* hat positives Maß.

Infolge einer bekannten Verschärfung des HARTOGSSCHEN Satzes²⁶⁾ gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{P}'_* \subset \mathfrak{P}_*$ von positivem Maß, so daß $\varphi_1(w, z_1)$ in allen Punkten von $\{w \in \mathfrak{P}'_*; z_1 \in G_1\}$ regulär und eindeutig ist. Mehrmalige Anwendung zeigt die Existenz einer Menge $\mathfrak{P}_{**} \subset \mathfrak{P}_*$ von positivem Maß, für welche gilt:

(**) $\varphi_r(w, z_1)$ ist in der Umgebung eines jeden Punktes von $\{w \in \mathfrak{P}_{**}; z_1 \in G_r\}$ regulär und eindeutig.

6. In \mathfrak{P}_{**} gibt es ein c_* , so daß bei beliebigen $\epsilon > 0$ der Durchschnitt \mathfrak{D}_ϵ von \mathfrak{P}_{**} und $|w - c_*| < \epsilon$ positives Maß hat [Satz b)]. Weiter war G_1 so konstruiert, daß zu jedem Verzweigungspunkt Q von G der Rand Π des (mehrblättrigen) δ -Kreises um Q in G_1 liegt. Sei α die Spur von Q , also $|z_1 - \alpha| = \delta$ die Spur von Π . Auf $\{w = c_*; z_1 \in \Pi\}$ ist $\varphi_1(w, z_1)$ regulär und eindeutig. Ist Π μ -blättrig, so bilden die Funktionselemente von $\varphi_1(w, z_1)$ auf $\{w = c_*; z_1 \in \Pi\}$ eine μ -blättrige reguläre Funktion φ_π . Es gibt infolgedessen ein $\epsilon > 0$ und ein $s > 0$ so, daß die symmetrischen Grundfunktionen E_1, \dots, E_μ der Zweige von φ_π in $\{w - c_*| < \epsilon; \delta - s < |z - \alpha| < \delta + s\}$ regulär und eindeutig sind.

Außerdem sind die $E(c, z_1)$ für jedes c aus dem Durchschnitt \mathfrak{D}_ϵ von \mathfrak{P}_{**} und $|w - c_*| < \epsilon$ im Kreise $|z_1 - \alpha| < \delta$ regulär. Da \mathfrak{D}_ϵ positives Maß hat, sind also die $E(w, z)$ in $\{w - c_*| < \epsilon; |z_1 - \alpha| < \delta\}$ regulär. Ebenso schließt man für die anderen Verzweigungspunkte und die übrigen Gebiete G_r . Sei endlich G_r^* die Vereinigung von G_r mit, den δ -Kreisen um die Verzweigungspunkte. Zusammenfassend hat man dann:

(***) $\varphi_r(w, z_1)$ ist in der Umgebung eines jeden Punktes von $\{w = c_*; z_1 \in G_r^*\}$ regulär und eindeutig (in den Verzweigungspunkten algebroid).

7. Auf Grund von (***) gibt es ein $d > 0$, so daß durch $z_2 = \varphi_r(w, z_1)$ vierdimensionale Flächenstücke Φ_r erklärt werden, welche in

$$\{|w - c_*| < d; |z_1| < r - \delta; |z_2| < r - \delta\}$$

algebroid sind. Sie können z. T. zusammenfallen; das macht nichts. Ihnen gehören jedenfalls, für c aus dem Durchschnitt \mathfrak{D}_d von \mathfrak{P}_{**} und $|w - c_*| < d$, alle $\mathfrak{F}_s(c)$ (das sind die Schnitte von $\mathfrak{F}(c)$ mit $\mathfrak{B}_{r-\delta}$, welche durch \mathfrak{B} laufen) an. Und da \mathfrak{D}_d positives Maß hat, erst recht also überabzählbar ist, so müssen alle durch die Gleichungen (i) in D_i definierten vierdimensionalen Flächenstücke auf den Φ_r liegen. Infolgedessen gehören alle $\mathfrak{F}_s(c)$ für $|c - c_*| < d$ den Φ_r an. Das aber bedeutet: Die Behauptung des Satzes ist mit $r - \delta$ statt r richtig, wobei δ beliebig klein gemacht werden kann.

²⁶⁾ Vgl. P. LÉLONG, a. a. O. (Fußnote 6).

Zur GALOISSchen Theorie der arithmetischen Körper.

Von

WOLFGANG KRULL in Bonn.

In Bd. 121 dieser Zeitschrift habe ich die GALOISSche Theorie beliebiger „arithmetischer“ Körper entwickelt¹⁾. Dabei lag das Hauptgewicht auf der Verzweigungsgruppe. Die Theorie der Zerlegungs- und der Trägheitsgruppe wurde rasch abgetan, die Frage nach der eventuellen Einführung von „höheren“ Verzweigungsgruppen überhaupt nicht gestellt. Im folgenden wird zunächst die Untersuchung des Zerlegungskörpers bzw. Zerlegungsringes weitergeführt und ein Ergänzungssatz bewiesen, der vor allem deshalb bemerkenswert ist, weil er die Eigenart des allgemeinen Falles eines beliebigen arithmetischen Körpers im Vergleich zum Spezialfall der endlichen algebraischen Zahlkörper deutlicher hervortreten läßt. Anschließend wird für den Trägheitsring eine naheliegende idealtheoretische Frage behandelt, die man nur deshalb leicht übersieht, weil die Antwort im Spezialfall der Zahlkörper (nicht aber im allgemeinen Fall) trivial ist. Was das Problem der „höheren Verzweigungsgruppen“ angeht, so zeigt eine genauere, im dritten Paragraphen durchgeführte Analyse, daß kaum eine allgemein befriedigende Lösung möglich ist. Im Spezialfall beliebiger NÖRTERScher Ringe lassen sich allerdings höhere Verzweigungsgruppen leicht definieren, aber auch hier scheint es schwer, über die Übertragung der einfachsten von den endlichen Zahlkörpern her geläufigen Sätze hinauszukommen. Die Vernachlässigung der höheren Verzweigungstheorie in der älteren Arbeit wird durch diese Überlegungen in gewissem Umfange gerechtfertigt. Als eine unmittelbar lohnende Aufgabe erscheint nur der Ausbau der höheren Verzweigungstheorie bei diskreten Bewertungsringen mit unvollkommenem Restklassenkörper. Hierzu bringt der letzte Abschnitt einige grundsätzliche Betrachtungen und Beispiele.

§ 1. Der Zerlegungsring.

Es sei wie in G. Th. \mathfrak{K} ein beliebiger ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper \mathfrak{K} ; \mathfrak{p} sei ein Primideal aus \mathfrak{K} , von dem ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf und soll, daß es das einzige maximale Primideal von \mathfrak{K} darstellt. \mathfrak{K} sei ein endlicher, separabler Normalkörper von \mathfrak{K} , \mathfrak{S} der Ring aller von \mathfrak{K} ganz abhängigen Elemente aus \mathfrak{K} . In \mathfrak{S} gibt es endlich viele Primideale $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ ($i = 1, \dots, n$), die über \mathfrak{p} liegen, also der Gleichung $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{p}$ genügen. Die $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ sind alle

¹⁾ Die Verzweigungsgruppe in der GALOISSchen Theorie beliebiger arithmetischer Körper. Math. Ann. 121, 446—466 (1950); in Zukunft mit G. Th. zitiert. Die vorliegende Note bildet eine Ergänzung von G. Th., § 1. Wegen eines drucktechnischen Verehens wird im folgenden die Verzweigungsgruppe im Gegensatz zu G. Th. durch den Index v (und nicht durch ν) gekennzeichnet.

im Sinne der GALOISSchen Theorie untereinander konjugiert. Wir zeichnen unter den \tilde{p}_i ein bestimmtes, etwa $\tilde{p} = \tilde{p}_1$, aus und verstehen unter der *Zerlegungsgruppe* \mathcal{G}_z (von \tilde{p} über \mathfrak{K}) das System aller der Automorphismen A aus der GALOISSchen Gruppe \mathcal{G} von \mathfrak{K} über \mathfrak{K} , die das Primideal \tilde{p} in sich überführen. Der *Zerlegungskörper* \mathfrak{K}_z (von \tilde{p} über \mathfrak{K}) ist der zu \mathcal{G}_z gehörige Körper. Schließlich werde $\mathfrak{S}_z = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{K}_z$, $\mathfrak{p}_z = \tilde{p} \cap \mathfrak{K}_z = \tilde{p} \cap \mathfrak{S}_z$ gesetzt. Genau wie bei den endlichen algebraischen Zahlkörpern zeigt man: \mathfrak{K}_z ist der kleinste Körper \mathfrak{L} zwischen \mathfrak{K} und \mathfrak{K} mit der Eigenschaft, daß über dem Primideal $\tilde{p} \cap \mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{L}$ in \mathfrak{S} nur das Primideal \tilde{p} liegt (G. Th., Satz 1a). Weiter wurde in G. Th. das folgende Resultat gewonnen:

G. Th. Satz 1 b): *Es sei \tilde{q} ein beliebiges zu \tilde{p} gehöriges Primärideal, $\mathfrak{q}_z = \tilde{q} \cap \mathfrak{K}_z = \tilde{q} \cap \mathfrak{S}_z$. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{S}_z$ mindestens ein der Kongruenz $a \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{q}_z}$ genügendes $a \in \mathfrak{K}$. Auf der anderen Seite hat im Falle der endlichen algebraischen Zahlkörper²⁾ der Zerlegungskörper \mathfrak{K}_z zwei Haupteigenschaften:*
 1. Es ist $\mathfrak{S}_z/\mathfrak{p}_z = \mathfrak{K}/\mathfrak{p}$. 2. Das Ideal $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{S}_z$ besitzt eine Zerlegung $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{S}_z = \mathfrak{p}_z \mathfrak{r}_z$ mit zu \mathfrak{p}_z teilerfremdem \mathfrak{r}_z und es werden die sämtlichen zu \mathfrak{p}_z gehörigen Primärideale \mathfrak{q}_z (d. h. hier die sämtlichen Potenzen von \mathfrak{p}_z) umkehrbar eindeutig auf die zu \mathfrak{p} gehörigen Primärideale \mathfrak{q} (d. h. die Potenzen von \mathfrak{p}) abgebildet, wenn man jedem \mathfrak{q}_z jeweils $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_z \cap \mathfrak{K}$ zuordnet.

Es ist nun offenbar 1. einfach eine spezielle Anwendung von G. Th. Satz 1 b). Was aber 2. angeht, so ist ein Zusammenhang mit G. Th. Satz 1 b) nicht ohne weiteres zu sehen. Um hier weiterzukommen, hat man zunächst eine im allgemeinen Fall u. U. auftretende Schwierigkeit zu beachten: Sind alle zu \mathfrak{p} gehörigen Primärideale \mathfrak{q} Potenzen von \mathfrak{p} , so sieht man mühelos, daß stets $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{q}$ wird, daß also $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}'$ stets $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{S}$ nach sich zieht. Im allgemeinen Fall dagegen muß man mit der Möglichkeit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{S}$ rechnen. Die gleichen Überlegungen gelten für die zu \mathfrak{p}_z gehörigen Primärideale \mathfrak{q}_z . Nennen wir nun ein zu \mathfrak{p} bzw. \mathfrak{p}_z gehöriges Primärideal \mathfrak{q} bzw. \mathfrak{q}_z hinsichtlich \mathfrak{S} *permanent*, wenn $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}_z \cap \mathfrak{S}_z = \mathfrak{q}_z$ wird, so läßt sich der Satz 2 des Spezialfalls in folgender Weise auf den allgemeinen Fall übertragen:

G. Th. Satz 1 c)³⁾: *Ordnet man jedem zu \mathfrak{p}_z gehörigen Primärideal \mathfrak{q}_z das zu \mathfrak{p} gehörige Primärideal $\mathfrak{q}_z \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{q}$ zu, so werden dadurch die zu \mathfrak{p}_z gehörigen, hinsichtlich \mathfrak{S} permanenten \mathfrak{q}_z umkehrbar eindeutig auf die zu \mathfrak{p} gehörigen, hinsichtlich \mathfrak{S} permanenten \mathfrak{q} abgebildet.*

Zum Beweise sei zunächst bemerkt: In jeder Klasse zu \mathfrak{p} (\mathfrak{p}_z) gehöriger Primärideale, die in \mathfrak{S} das gleiche Erweiterungsideal besitzen, gibt es ein einziges hinsichtlich \mathfrak{S} permanentes Ideal, nämlich die Summe aller Ideale der Klasse. Gibt es zu \mathfrak{q} (\mathfrak{q}_z) ein der Gleichung $\tilde{a} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{q}$ ($\tilde{a} \cap \mathfrak{S}_z = \mathfrak{q}_z$) genügendes \mathfrak{S} -Ideal \tilde{a} , so ist \mathfrak{q} (\mathfrak{q}_z) hinsichtlich \mathfrak{S} permanent. — Den eigentlichen Beweis von Satz 1 c) zerlegen wir in 6 Schritte: a) Ist \mathfrak{q}_z irgendein zu \mathfrak{p}_z ge-

²⁾ Oder allgemeiner, wenn \mathfrak{K} der Bewertungsring eines bewerteten Körpers mit beliebiger Wertgruppe ist.

³⁾ Die gewählte Bezeichnung soll den unmittelbaren Anschluß an die älteren Untersuchungen in G. Th. herstellen.

höriges Primärideal, so ist \tilde{p} in \mathfrak{S} das einzige $q_{\mathfrak{S}}$ enthaltende Primideal, und es muß daher $q_{\mathfrak{S}}$ ein zu \tilde{p} gehöriges Primärideal sein. Für $q_{\mathfrak{S}}$ bedeutet also die in G. Th. Satz 1 b) geforderte Existenz eines der Gleichung $q \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}} = q_{\mathfrak{S}}$ genügenden, zu \tilde{p} gehörigen Primärideals \tilde{q} soviel wie die Permanenz von $q_{\mathfrak{S}}$ hinsichtlich \mathfrak{S} . — b) Ist q ein beliebiges zu p gehöriges Primärideal, so besitzt $q \mathfrak{S}$ eine Komponentenzerlegung $q \mathfrak{S} = \tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_n = \tilde{q}_1 \cap \dots \cap \tilde{q}_n$, wobei \tilde{q}_i jeweils ein zu \tilde{p}_i gehöriges Primärideal bedeutet ($\tilde{p}_i = \tilde{p}$, $\tilde{q}_i = \tilde{q}$). (Man beachte, daß die \tilde{p}_i , die in ihrer Gesamtheit die Menge aller maximalen \mathfrak{S} -Primideale bilden, die einzigen Primoberideale von $q \cdot \mathfrak{S}$ sind.) Da $q \mathfrak{S}$ gegenüber den Automorphismen von \mathfrak{G} invariant ist, sind die \tilde{q}_i untereinander konjugiert, und es wird infolgedessen: $\tilde{q}_1 \cap \mathfrak{H} = \dots = \tilde{q}_n \cap \mathfrak{H} = (\tilde{q}_1 \cap \dots \cap \tilde{q}_n) \cap \mathfrak{H} = q \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$. Ist also q hinsichtlich \mathfrak{S} permanent, so gibt es stets ein zu \tilde{p} gehöriges, der Gleichung $\tilde{q} \cap \mathfrak{H} = q$ genügendes Primärideal \tilde{q} . — c) Ist q hinsichtlich \mathfrak{S} permanent, \tilde{q} die zu \tilde{p} gehörige Primärkomponente von $q \mathfrak{S}$, so wird $q_{\mathfrak{S}} = \tilde{q} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}$ ein zu $p_{\mathfrak{S}}$ gehöriges Primärideal, das mit \mathfrak{H} den Durchschnitt q besitzt [vgl. b)]. — d) Es sei $q_{\mathfrak{S}}$ hinsichtlich \mathfrak{S} permanent, $q = q_{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{H}$. Dann ist q ein zu p gehöriges Primärideal und man hat: $q \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \supseteq q$; $q \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} = (q \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}) \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \subseteq q_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} = (q_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}) \cap \mathfrak{H} = q_{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{H} = q$. Es ist also q hinsichtlich \mathfrak{S} permanent. — e) Sind $q_z^{(i)}$ hinsichtlich \mathfrak{S} permanent, $\tilde{q}^{(i)} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}} = q_z^{(i)}$, ($q_z^{(i)} \mathfrak{S} = \tilde{q}^{(i)}$; $i = 1, 2$), so haben wir $(\tilde{q}^{(1)} \cap \tilde{q}^{(2)}) \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}} = (q^{(1)} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}) \cap (\tilde{q}^{(2)} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}) = q_z^{(1)} \cap q_z^{(2)}$, es ist also auch das (ebenso wie die $q_z^{(i)}$) zu $p_{\mathfrak{S}}$ gehörige Primärideal $q_z^{(1)} \cap q_z^{(2)}$ hinsichtlich \mathfrak{S} permanent. Ferner folgt aus $q_z^{(1)} \cap \mathfrak{H} = q_z^{(2)} \cap \mathfrak{H} = q$ sofort $(q_z^{(1)} \cap q_z^{(2)}) \cap \mathfrak{H} = q$. Diese beiden Bemerkungen zeigen: Ergibt sich für zwei hinsichtlich \mathfrak{S} permanente, zu $p_{\mathfrak{S}}$ gehörige Primärideale $q_z^{(1)}$, $q_z^{(2)}$ aus $q_z^{(1)} \subseteq q_z^{(2)}$, $q_z^{(1)} \cap \mathfrak{H} = q_z^{(2)} \cap \mathfrak{H}$ stets $q_z^{(1)} = q_z^{(2)}$, so haben allgemein zwei verschiedene, hinsichtlich \mathfrak{S} permanente, zu $p_{\mathfrak{S}}$ gehörige Primärideale stets verschiedene Durchschnitte mit \mathfrak{H} . — f) Es seien $q_z^{(1)}$ und $q_z^{(2)} \supseteq q_z^{(1)}$ hinsichtlich \mathfrak{S} permanent und $q_z^{(1)} \cap \mathfrak{H} = q_z^{(2)} \cap \mathfrak{H} = q$. Dann gibt es einen natürlichen Homomorphismus H , der $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}/q_z^{(1)}$ auf $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}/q_z^{(2)}$ abbildet, und dieser Homomorphismus ordnet zwei verschiedenen Klassen \bar{a}_1, \bar{a}_2 aus $\mathfrak{S}/q_z^{(1)}$ verschiedene Bilder zu, falls \bar{a}_1 und \bar{a}_2 zwei Elemente a_1, a_2 aus \mathfrak{H} enthalten, die in \mathfrak{H}/q verschiedene Klassen \bar{a}_1, \bar{a}_2 definieren ($q_z^{(2)} \cap \mathfrak{H} = q$ beachten!). Andererseits enthalten nach a) und G. Th. Satz 1 b) zwei Klassen \bar{a}_1, \bar{a}_2 aus $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}/q_z^{(1)}$ stets Elemente a_1, a_2 aus \mathfrak{H} , und es ist wegen $q_z^{(1)} \cap \mathfrak{H} = q$ dann und nur dann $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$, wenn a_1 und a_2 die gleiche Klasse in \mathfrak{H}/q erzeugen. Der Homomorphismus H muß also der identische Automorphismus von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}}/q_z^{(1)}$ sein, und das bedeutet so viel wie $q_z^{(1)} = q_z^{(2)}$. — Aus c), d), f) folgt unmittelbar G. Th., Satz 1 c). Denn nach c) und d) wird durch die Zuordnung $q_{\mathfrak{S}} \rightarrow q_{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{H} = q$ die Menge aller zu $p_{\mathfrak{S}}$ gehörigen, hinsichtlich \mathfrak{S} permanenten Primärideale auf die volle Menge aller zu p gehörigen, hinsichtlich \mathfrak{S} permanenten Primärideale abgebildet, und nach f) ist diese Abbildung eindeutig umkehrbar. Der wesentliche Punkt des Beweises ist natürlich, abgesehen von der Konjugiertenbetrachtung unter b), der Schluß von f), der sich wesentlich auf G. Th., Satz 1 b) stützt. In gewissem Sinne ist also Satz 1 c) eine Folgerung aus dem schon in

G. Th. bewiesenen Satz 1 b). — Satz 1 c) kann offenbar als eine zufriedenstellende und mehr anschauliche Verallgemeinerung der bei den endlichen algebraischen Zahlkörpern gültigen Behauptung 2. angesehen werden. Fragen wir nach der Verallgemeinerung der in 2. mit enthaltenen Feststellung, daß bei den endlichen algebraischen Zahlkörpern immer $p \mathfrak{S}_z = p_z \tau_z$ mit zu p_z teilerfremden τ_z wird, so erhalten wir:

1. Korollar zu G. Th., Satz 1 c). *Ist q_z^* die zu p_z gehörige Primärkomponente von $p \mathfrak{S}_z$, so wird stets $q_z^* \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_z = p_z$.*

Zum Beweis hat man zu beachten, daß sowohl $q_z^* \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_z$ als auch p_z ein hinsichtlich \mathfrak{S} permanentes, zu p_z gehöriges Primärideal ist, das mit \mathfrak{H} den Durchschnitt p hat. Um über das erste Korollar hinauszukommen und die plausible Gleichung $q_z^* = p_z$ allgemein zu beweisen, müßte man (falls die Vermutung überhaupt richtig ist), jedenfalls über die in G. Th. benutzten Methoden hinaus wesentlich neue Hilfsmittel heranziehen. In einem wichtigen Fall allerdings gelingt die wörtliche Übertragung der Behauptung 2. der algebraischen Zahlkörper auf beliebige arithmetische Körper.

2. Korollar zu G. Th., Satz 1 c): *Ist \mathfrak{S} im Sinne der Diskriminantentheorie über \mathfrak{H} unverzweigt, d. h. ist \mathfrak{H} gleich dem Trägheitskörper \mathfrak{H}_1 von \tilde{p} über \mathfrak{H}^4), so werden durch die Zuordnung $q_z \rightarrow \mathfrak{H} \cap q_z = q$ die zu p_z gehörigen Primärideale umkehrbar eindeutig auf die zu p gehörigen Primärideale abgebildet, und es ist stets p_z die zu p_z gehörige Primärkomponente von $p \mathfrak{S}_z$.*

Ist nämlich \mathfrak{S} über \mathfrak{H} unverzweigt, so ist es auch \mathfrak{S} über \mathfrak{S}_z und \mathfrak{S}_z über \mathfrak{H} . Aus der Unverzweigtheit von \mathfrak{S} über \mathfrak{H} und \mathfrak{S}_z folgt dann zunächst, daß alle \mathfrak{H} - und \mathfrak{S}_z -Ideale hinsichtlich \mathfrak{S} permanent sind, und daraus ergibt sich sofort nach Satz 1 c) die erste Behauptung des 2. Korollars. Weiter muß $p \mathfrak{S}_z$ wegen der Unverzweigtheit von \mathfrak{S}_z über \mathfrak{H} Durchschnitt von gegenseitig primen Primidealen sein, d. h. es muß auch die zweite Behauptung des zweiten Korollars gelten⁵⁾.

§ 2. Der Trägheitsring.

Wir wenden uns jetzt, nachdem hinsichtlich des Zerlegungskörpers ein befriedigendes Resultat gewonnen ist, noch kurz zum Aufbau des Trägheitskörpers über dem Zerlegungskörper. Es sei also $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_z$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z$, $p = p_z$;

⁴⁾ Zur Diskriminantentheorie vgl. etwa: W. KRULL, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VI, Math. Zeitachr. 45, 1—19 (1939); zitiert mit *Diskr.* . . Daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_z$ mit der Unverzweigtheit von \mathfrak{S} über \mathfrak{H} gleichwertig ist, folgt angesichts des Hauptsatzes der Diskriminantentheorie (Diskr. Satz 5, S. 11) sofort aus dem Umstand, daß \mathfrak{H}_1 über \mathfrak{H} den Grad $n g$ hat, falls n die Anzahl der über p liegenden Primideale \tilde{p}_i und g den reduzierten Grad von \mathfrak{S}/\tilde{p} über \mathfrak{H}/p bedeutet. (Man beachte, daß angesichts der gruppentheoretischen Definition \mathfrak{K}_z über \mathfrak{H} den Grad n haben muß sowie G. Th., Satz 2 a).

⁵⁾ Zu den benutzten Tatsachen vgl.: Diskr. § 6 (Unverzweigtheit von \mathfrak{S} über \mathfrak{S}_z und von \mathfrak{S}_z über \mathfrak{H}); Diskr. Satz 7, S. 13 ($a \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} = a$ für jedes \mathfrak{H} -Ideal a); Diskr. Satz 9, S. 13 (Zerfallen von $p \mathfrak{S}_z$).

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_i$, $\tilde{p} = p_i$; auch sei p das einzige maximale Primideal von \mathfrak{R} ⁶⁾. Wir wissen dann, daß \tilde{p} das einzige maximale Primideal von \mathfrak{S} ist, daß \mathfrak{S}/\tilde{p} einen separablen Normaloberkörper von \mathfrak{R}/p darstellt, daß die Gruppe von \mathfrak{R} über \mathfrak{R} zur Gruppe von \mathfrak{S}/\tilde{p} über \mathfrak{R}/p isomorph ist, und daß $p\mathfrak{S} = \tilde{p}$ wird (vgl. G. Th., Satz 2). Außerdem folgt aus der Unverzweigtheit von \mathfrak{R} über \mathfrak{R} die Gültigkeit der Gleichung $a\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = a$ für jedes \mathfrak{R} -Ideal a . Man könnte unter diesen Umständen vermuten, daß die zu p gehörigen Primärideale immer umkehrbar eindeutig den zu \tilde{p} gehörigen entsprechen; daß aber diese Vermutung falsch ist, zeigt folgende Überlegung: Es sei q ein bestimmtes, zu p gehöriges Primärideal, $\tilde{q} = q\mathfrak{S}$; dann ist \tilde{q} ein zu \tilde{p} gehöriges Primärideal, und zwar das (mengentheoretisch) kleinste, das mit \mathfrak{R} den Durchschnitt q hat.

Die Menge aller der zu \tilde{p} gehörigen Primärideale \tilde{q}' , für die $\tilde{q}' \cap \mathfrak{R} = q$ ist, wird durch die Zuordnung $\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}'/\tilde{q}$ umkehrbar eindeutig auf die Menge aller der Ideale aus dem Ringe \mathfrak{S}/\tilde{q} abgebildet, die mit \mathfrak{R}/q nur die Nullklasse gemein haben;

(dabei ist \mathfrak{S}/\tilde{q} in üblicher Weise als Oberring von \mathfrak{R}/q aufzufassen). Über die Menge der genannten Ideale aus \mathfrak{S}/\tilde{q} aber gewinnt man leicht einen gewissen Überblick auf Grund eines Theorems, das G. Th., Satz 2 c) verallgemeinert und das infolgedessen als G. Th., Satz 2 d) bezeichnet werden soll. Zur bequemen Formulierung von Satz 2 d) führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Ein Ring Ω (mit Einheitsselement) soll *primär* heißen, wenn Ω nur ein einziges Primideal m enthält, so daß das Nullideal ein zu m gehöriges Primärideal und Ω/m ein Körper wird⁷⁾. Eine einfache Ringerweiterung $\Omega[\xi]$ von Ω soll *regulär algebraische* Erweiterung genannt werden, wenn $\Omega[\xi]$ zum Restklassenring des Polynomrings $\Omega[x]$ nach einem Primhauptideal $(p(x))$ isomorph ist, dessen Basispolynom $p(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n$ in ein über dem Körper $\Omega/m = K$ irreduzibles Polynom übergeht, wenn man die Koeffizienten q_i durch die entsprechenden Restklassen aus Ω/m ersetzt; der Grad n von $p(x)$ wird dabei auch als der Grad von $\Omega[\xi]$ über Ω bezeichnet. Man sieht leicht: Die einfache Ringerweiterung $\Omega[\xi]$ von Ω ist dann und nur dann regulär algebraisch, wenn $\Omega[\xi]$ über Ω eine endliche Modulbasis von linear

⁶⁾ Der Ring \mathfrak{S}_z von § 1 enthält für $\mathfrak{R}_z \neq \mathfrak{R}$ mehrere maximale Primideale. Wenn wir aber \mathfrak{R}_z als Ausgangspunkt wählen, so können wir \mathfrak{S}_z durch den Ring $\mathfrak{R}' = (\mathfrak{S}_z)_{p_z}$ aller Quotienten α/β ($\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_z$, $\beta \notin p_z$) mit dem einzigen maximalen Primideal $p' = p_z \mathfrak{R}'$ und \mathfrak{S} durch den Ring $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \mathfrak{R}'$ aller von \mathfrak{R}' ganz abhängigen Elemente aus \mathfrak{R} mit dem einzigen über p' liegenden Primideal $\tilde{p}' = \tilde{p} \mathfrak{S}'$ ersetzen. Die Annahme des Textes ist also statthaft.

⁷⁾ Die Theorie der primären Ringe wurde von W. KRULL entwickelt. [Algebraische Theorie der Ringe I u. II, Math. Annalen 88, 80–122 (1923) bzw. 91, 1–46 (1924).] Eine Neudarstellung der Theorie und eine Weiterführung entsprechend dem heute erreichten Standpunkt der Algebra verdankt man E. SNAPPER [Completely primary rings I–IV, Annals of Math. 52, 666–693 (1950) bzw. 53, 125–142 (1951) bzw. 53, 207–234 bzw. 55, 46–64 (1952)].

unabhängigen Elementen besitzt und selbst einen primären Ring mit dem Primideal $m \cdot \Omega[\xi]$ darstellt^{*)}. — Wir formulieren jetzt:

G. Th. Satz 2 d). *Bedeutet q ein zu $p = p_x$ gehöriges Primärideal aus $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_x$, so genügt das zu $\tilde{p} = p_x$ gehörige Primärideal $\tilde{q} = q \subseteq \mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_t$ der Gleichung $\tilde{q} \cap \mathfrak{R} = q$ und es wird der primäre Ring $\Sigma = \mathfrak{S}/\tilde{q}$ eine einfache, regulär algebraische Erweiterung des primären Ringes $P = \mathfrak{R}/q$, wobei der Grad von Σ über P gleich dem Grade von $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_t$ über $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_x$ ist.* Die Gültigkeit von $\tilde{q} \cap \mathfrak{R} = q$ wurde schon oben festgestellt. Daß P und Σ primäre Ringe sind, ist klar, da p bzw. \tilde{p} das einzige Primoberideal von q bzw. \tilde{q} darstellt. Ist ferner t der Grad von $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_t$ über $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_x$, so gibt es nach dem Beweis von Satz 2 in G. Th. ein Element $\alpha \in \mathfrak{S}$ derart, daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha]$ wird und daß α über \mathfrak{R} Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $p(x) = x^t + q_1 x^{t-1} + \dots + q_t$ mit Koeffizienten q_i aus \mathfrak{S} ist, das in ein über \mathfrak{R}/p irreduzibles Polynom übergeht, wenn man die q_i durch ihre Restklassen modulo p ersetzt. Daraus folgt sofort: Bezeichnet man mit $\bar{\alpha}$ die durch α definierte Restklasse aus Σ , so wird $\Sigma = P[\bar{\alpha}]$ und es stellt Σ eine regulär algebraische Erweiterung t -ten Grades von P dar, wenn sich für $\bar{\alpha}$ aus $\bar{r}_m \bar{\alpha}^m + \bar{r}_{m-1} \bar{\alpha}^{m-1} + \dots + \bar{r}_0 = \bar{0}$ ($\bar{r}_i \in P$, $m < t$) stets $\bar{r}_i = \bar{0}$ ($i = 0, \dots, m$) ergibt. Bedeutet aber r_i jeweils einen zu \mathfrak{R} gehörigen Repräsentanten von \bar{r}_i , so folgt aus $\bar{r}_m \bar{\alpha}^m + \dots + \bar{r}_0 = \bar{0}$ wegen $\bar{q} = q \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha]$, $\alpha^t = -q_1 \alpha^{t-1} - \dots - q_t$ eine Gleichung $r_m \alpha^m + \dots + r_0 = s_{t-1} \alpha^{t-1} + \dots + s_0$ ($s_i \in q$), und da α über \mathfrak{R} keiner Gleichung niedrigeren als t -ten Grades genügt, haben wir: $s_{t-1} = s_{t-2} = \dots = s_{m+1} = 0$; $s_i = r_i$, $\bar{s}_i = \bar{r}_i = \bar{0}$ ($i = 1, \dots, m$). — Auf Grund von G. Th., Satz 2 d) können wir nun leicht die Vermutung widerlegen, die den Ausgangspunkt unserer Überlegungen gebildet hatte. Wir betrachten einen primären Ring P , dessen Primideal m eine endliche Basis w_1, \dots, w_m besitzt und der Gleichung $m^2 = (0)$ genügt. Dann ist jedes $w \in m$ eine Linearform $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$, und wenn wir m minimal wählen, ist $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$

) Da die Beweise für die uns interessierenden Sätze bei KRULL und SNAPPER ziemlich mühsam zusammengesucht werden müssen, seien sie hier kurz skizziert: Im Polynomring $\Omega[x]$ ist ein Polynom $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots + a_{n+m} x^{n+m}$ ($a_n \notin m$; $(a_{n+1}, \dots, a_{n+m}) \subseteq m$) stets zu einem eindeutig bestimmten Polynom $a^(x) = a_n^* + \dots + a_{n-1}^* x^{n-1} + x^n$ assoziiert. — (Vgl. § 4 der Arbeit „Algebraische Theorie der Ringe I“ von ¹⁾; die dort gemachte Voraussetzung „ $m^e = (0)$ für großes e “ wird beim Beweise unseres Satzes nicht benutzt.) — Daraus folgt sofort, daß $a(x)$ und $b(x)$ in $\Omega[x]$ teilerfremd sein müssen, falls es im Polynomring $K[x]$ die zugehörigen Restklassenpolynome $\bar{a}(x)$ und $\bar{b}(x)$ sind. Das wiederum zeigt, daß bei einer regulär-algebraischen Erweiterung $\Omega[\xi]$ von Ω stets $\Omega[\xi]/m \cdot \Omega[\xi]$ zu dem Oberkörper $K[x]/(p(x)) \cdot K[x]$ von $K[x]$ isomorph wird und daß entsprechend in $\Omega[\xi]$ das einzige Primideal von $\Omega[\xi]$ ist. Daß ferner $1, \xi, \dots, \xi^{n-2}$ eine Modulbasis von linear unabhängigen Elementen für $\Omega[\xi]$ über Ω bilden, ist klar. — Besitzt umgekehrt $\Omega[\eta]$ über Ω eine Modulbasis von n linear unabhängigen Elementen, so sieht man zunächst mühelos, daß für η eine Gleichung $p(\eta) = \eta^n + q_1 \eta^{n-1} + \dots + q_n = 0$ gelten muß, wobei $1, \eta, \dots, \eta^{n-1}$ über Ω linear unabhängig sind, so daß $\Omega[\eta]$ zu $\Omega[x]/p(x) \cdot \Omega[x]$ isomorph wird. Weiter zeigt man un schwer: Besitzt in $K[x]$ das Restklassenpolynom $\bar{p}(x)$ mindestens zwei verschiedene irreduzible Faktoren, so gibt es in $\Omega[\eta]$ mindestens zwei verschiedene Primideale; wird $\bar{p}(x) = \bar{q}(x)^e$ ($e > 1$) und ist $s(x)$ ein der Restklasse $\bar{s}(x)$ angehöriges Polynom aus $\Omega[x]$, so ist $s(\eta)$ ein nicht in $m \cdot \Omega[\eta]$ liegender Nullteiler. Damit ist alles bewiesen.

gleichwertig mit $\alpha_i - \beta_i \in \mathfrak{m}$ ($i = 1, \dots, m$). Daraus folgt, immer unter Benutzung von $\mathfrak{m}^2 = (0)$: Die Unterideale von \mathfrak{m} entsprechen umkehrbar eindeutig den Unterräumen eines mit m Basisvektoren e_1, \dots, e_m gebildeten m -dimensionalen Vektorraumes \mathfrak{R}_m über $K = P/\mathfrak{m}$, derart, daß $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$ dann und nur dann in dem dem Vektorraum \mathfrak{B} zugeordneten Ideale \mathfrak{a} liegt, wenn $\bar{\alpha}_1 e_1 + \dots + \bar{\alpha}_m e_m$ zu \mathfrak{B} gehört, falls $\bar{\alpha}_i$ die durch α_i in K definierte Restklasse bedeutet. — Es sei jetzt weiter $\tilde{P} = P[\xi]$ eine echte, regulär algebraische Erweiterung von P , $\tilde{\xi}$ sei die durch ξ in $\tilde{K} = \tilde{P}/\tilde{\mathfrak{m}}$ definierte Restklasse. Dann ist $\tilde{K} = K(\tilde{\xi})$, und es stellen w_1, \dots, w_m auch eine Minimalbasis von $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \tilde{P}$ dar. Die Unterideale von $\tilde{\mathfrak{m}}$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den Unterräumen des aus \mathfrak{B}_m durch Übergang zum Grundkörper \tilde{K} entstehenden Vektorraumes $\tilde{\mathfrak{B}}_m$. Ist nun $m \geq 2$ und bedeutet η ein beliebiges, nicht zu K gehöriges Element aus \tilde{K} , so sieht man sofort, daß der eindimensionale Vektorraum mit dem Basisvektor $e_1 + \eta e_2$ mit \mathfrak{B}_m nur den Nullvektor gemein hat, und das besagt für \tilde{P} : Ist $m \geq 2$, so gibt es immer \tilde{P} -Ideale, die mit P nur das Nullelement gemein haben. Mit Hilfe dieser Bemerkung zeigen wir jetzt:

1. Korollar zu G. Th., Satz 2 d). Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\lambda$ ein NOETHERScher Ring (Ring mit Maximalbedingung) und ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i$ von $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\lambda$ verschieden, so entsprechen die in $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_i$ zu $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_i$ gehörigen Primär-ideale dann und nur dann umkehrbar eindeutig den zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\lambda$ gehörigen, wenn \mathfrak{R} ein diskreter Bewertungsring ist.

Zum Beweis beachte man: a) Ist \mathfrak{R} ein diskreter Bewertungsring, so ist es auch \mathfrak{S} . Es sind also die Potenzen von \mathfrak{p} bzw. $\tilde{\mathfrak{p}}$ die einzigen Ideale ($\neq (0)$) in \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{S} , und aus $\mathfrak{p} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}$ [vgl. G. Th., Satz 2 c)] folgt $\tilde{\mathfrak{p}}^m \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}^m$ für jedes m . — b) Da \mathfrak{R} als NOETHERScher Ring angenommen wurde, ist $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$, und es wird $P = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}^2$ ein primärer Ring von dem oben betrachteten speziellen Typus (mit $m = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$). Ferner ist $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}^2$ gleichwertig mit $\tilde{\mathfrak{q}} \supseteq \mathfrak{p}^2 \mathfrak{S}$, $(\tilde{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}^2 \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{R}/\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{p}^2/\mathfrak{p}^2$ (vgl. den ersten Abschnitt von § 2). Aus unserem für spezielle primäre Ringe gewonnenen Resultat ergibt sich also: Sollen die zu $\tilde{\mathfrak{p}}$ gehörigen Primär-ideale umkehrbar eindeutig den zu \mathfrak{p} gehörigen entsprechen, so muß $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ Hauptideal werden, d. h. es muß in \mathfrak{R} ein Element p geben, derart, daß $\mathfrak{p} = (p) + \mathfrak{p}^2$. Ist aber $\mathfrak{p} = (p) + \mathfrak{p}^2$, so ist auch $\mathfrak{p} = (p) + \mathfrak{p}^m$ für jedes m und daraus folgt nach einem bekannten Satz über „Stellenringe“: $\mathfrak{p} = (p)$.⁹⁾ — c) Ist in dem NOETHERSchen Ringe \mathfrak{R} das einzige vorhandene maximale Primideal \mathfrak{p} ein Hauptideal, so ist \mathfrak{R} notwendig ein diskreter Bewertungsring.

Lassen wir die Maximalbedingung bei \mathfrak{R} fallen, so wissen wir, daß immer die Zuordnung $\tilde{\mathfrak{q}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R}$ die zu $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_i$ gehörigen Primär-ideale umkehrbar eindeutig auf die zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\lambda$ gehörigen abbildet, wenn \mathfrak{R} ein ganz beliebiger Bewertungsring (mit reellzahliger oder auch mit nichtarchimedisch geordneter

⁹⁾ Vgl.: W. KRULL, Dimensionstheorie in Stellenringen, J. reine u. angew. Math. 179, 204—226 (1938), § 1, Satz 2.

Wertgruppe) ist¹⁰⁾. Aber es scheint nicht mehr so leicht zu beweisen zu sein, daß dies der *einzig* Fall der eindeutig umkehrbaren Zuordnung ist, vor allem dann nicht, wenn $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ wird. Indessen können wir diese Frage als sekundär ansehen; die Hauptsache war zu zeigen, daß das umkehrbar eindeutige Entsprechen gewissermaßen als Ausnahmefall anzusehen ist, und das wird durch das erste Korollar zu G. Th., Satz 2 d) geleistet. Im übrigen wird der positive Inhalt von G. Th., Satz 2 d) vielleicht noch besser verdeutlicht durch:

2. Korollar zu G. Th., Satz 2 d). Für ein zu $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_s$ gehöriges Primärideal \tilde{q} wird dann und nur dann $(\tilde{q} \cap \mathfrak{R}) \mathfrak{S} = \tilde{q} (\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_s)$, wenn \mathfrak{S}/\tilde{q} eine regulär algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}/(\tilde{q} \cap \mathfrak{R})$ darstellt.

Nach G. Th., Satz 2 d) selbst braucht allein das „dann“ bewiesen zu werden, d. h. man hat (mit $\tilde{q} \cap \mathfrak{R} = q$) zu zeigen: Ist \tilde{q} ein *echtes* Oberideal von $q \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}/\tilde{q} = \Sigma$ keine regulär algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}/q = P$. Es sei nun α die beim Beweis von Satz 2 d) eingeführte Nullstelle von $x^t + q_1 x^{t-1} + \dots + q_t = p(x)$; $\bar{\alpha}$ bzw. \bar{q}_i sei das durch α bzw. q_i definierte Element aus Σ bzw. P . Dann ist $\Sigma = P[\bar{\alpha}]$; $\bar{\alpha}^t + \bar{q}_1 \bar{\alpha}^{t-1} + \dots + \bar{q}_t = \bar{0}$, und es gilt außerdem noch mindestens eine weitere Gleichung $\bar{r}_m \bar{\alpha}^m + \dots + \bar{r}_0 = \bar{0}$ ($\bar{r}_i \in P, m < t$). Wäre dabei ein \bar{r}_i eine Einheit aus P , so müßten wegen der Irreduzibilität von $x^t + q_1 x^{t-1} + \dots + q_t$ modulo \mathfrak{p} die Polynome $x^t + \bar{q}_1 x^{t-1} + \dots + \bar{q}_t$ und $\bar{r}_m x^m + \dots + \bar{r}_0$ aus $P[x]$ modulo $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}/q$ teilerfremd sein, sie könnten daher nicht die gemeinsame Nullstelle $\bar{\alpha}$ haben. Es sind also bei jedem Polynom niedrigeren als t -ten Grades mit der Nullstelle $\bar{\alpha}$ aus $P[x]$ alle Koeffizienten in \mathfrak{p}/q enthalten, d. h. die Elemente $\bar{1}, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha}^{t-1}$, die eine Basis von Σ über P bilden, sind zwar linear abhängig, es läßt sich aber keines von ihnen linear über P durch die übrigen ausdrücken. Σ besitzt demnach über P keine Modulbasis von linear unabhängigen Elementen, wie es bei einer regulär algebraischen Erweiterung der Fall sein müßte.

§ 3. Höhere Verzweigungsgruppen.

Für die Verzweigungsgruppe \mathfrak{G} , ergab sich aus G. Th. und einer im Archiv der Mathematik erschienene Note¹¹⁾: Hat $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ die Charakteristik 0, so ist stets \mathfrak{G}_s gleich der nur aus dem identischen Automorphismus E bestehenden Gruppe \mathfrak{E} . Hat dagegen $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ Primzahlcharakteristik p , so ist \mathfrak{G}_s gleich der größten invarianten p -Untergruppe der Trägheitsgruppe \mathfrak{G}_t . Ein Automorphismus $A \in \mathfrak{G}_t$ gehört dann und nur dann zu \mathfrak{G}_s , wenn A bei allen irreduziblen Darstellungen $\Delta(a, a_m)$ von \mathfrak{G}_t , die durch die endlichen, invarianten \mathfrak{S} -Ideale a und ihre maximalen Unterideale a_m erzeugt werden, auf die jeweilige Einheitsmatrix abgebildet wird. Ist \mathfrak{R} und damit auch \mathfrak{S} ein NOETHERscher Ring, so braucht man nicht *alle* irreduziblen Darstellungen $\Delta(a, a_m)$ zu betrachten, sondern nur die, die bei der Ausreduzierung der (i. a. reduziblen) Darstellung $\Delta(\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}^2)$ auftreten. [Zur Definition der Darstellungen $\Delta(a, a_m)$

¹⁰⁾ Vgl. etwa die in G. Th., Anm. 1 zitierten Arbeiten.

¹¹⁾ W. KRULL, Die Verzweigungsgruppe in der GALOISschen Theorie der arithmetischen Körper, Bd. 2, S. 295–299 (1949).

bzw. $\Delta(a, a\tilde{p})$ vgl. G. Th., § 2.] — Es sei nun bei Charakteristik p von $\mathfrak{K}/\mathfrak{p}$ bereits $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_p$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_p$; soll dann ohne weitere Annahmen über die Struktur von \mathfrak{K} der Aufbau von \mathfrak{K} über \mathfrak{K} näher untersucht werden, so liegt es nahe, als p -Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_{p,p}$ diejenige Gruppe einzuführen, die in G. Th., § 1 und § 4 als $\mathfrak{G}_{p,1}$ bezeichnet wurde, also unter $\mathfrak{G}_{p,p}$ die Gruppe aller der $\Delta \in \mathfrak{G}$, zu verstehen, deren Bild bei allen Darstellungen $\Delta(a, a\tilde{p})$ die Einheitsmatrix ist. Nach G. Th. (§ 2, Satz 8) gilt dann: $\mathfrak{G}_{p,p}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_p$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_p/\mathfrak{G}_{p,p}$ ist die größte Faktorgruppe von \mathfrak{G}_p , die eine vollisomorphe Darstellung $\prod_{k=1}^n \Delta(a_k, a_k\tilde{p})$ besitzt.

Was die Struktur von $\mathfrak{G}_{p,p}$ angeht, so weiß man, daß jedenfalls $\mathfrak{G}_{p,p} = \mathfrak{G}_p$ werden muß, wenn $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}_p = \mathfrak{B}$ und damit auch $\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathfrak{B}}$ ein Bewertungsring (mit beliebiger Wertgruppe) ist. Denn da jede einzelne Darstellung $\Delta(a, a\tilde{p})$ eine Darstellung einer p -Gruppe über einem Körper der Charakteristik p ist, muß sie bei geeigneter Normierung \mathfrak{G}_p auf eine Gruppe von Matrizen der speziellen Form (α_{ik}) ($\alpha_{ik} = 0$ ($k > i$) $\alpha_{ii} = 1$) abbilden¹²⁾, und da bei einem Bewertungsring $\tilde{\mathfrak{B}}$ alle Ideale \mathfrak{a} Hauptideale sind, also alle Darstellungen eingradig werden, ist bei ihm jede Darstellung $\Delta(a, a\tilde{p})$ die identische. — Die Gültigkeit der Gleichung $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_{p,p}$ bei Bewertungsringen zeigt, daß das Auseinanderfallen von \mathfrak{G}_p und $\mathfrak{G}_{p,p}$ in der klassischen Theorie der endlichen algebraischen Zahlkörper kein Gegenstück hat. Man sieht sich also bei der Untersuchung von \mathfrak{G}_p bzw. beim Studium des Aufbaues von \mathfrak{K} über $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_p$ im allgemeinen Fall nicht einer, sondern zwei Aufgaben gegenüber: a) Es sind genauere Aussagen über $\mathfrak{G}_{p,p}$ bzw. die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_p/\mathfrak{G}_{p,p}$ herzuleiten. b) Es ist zu $\mathfrak{G}_{p,p}$ eine Untergruppenkette $\mathfrak{G}_{p,p} = \mathfrak{G}_0 > \mathfrak{G}_1 > \dots > \mathfrak{G}_p = \mathfrak{E}$ zu konstruieren, die als Verallgemeinerung der von HILBERT bei den endlichen algebraischen Zahlkörpern eingeführten Kette der höheren Verzweigungsgruppen angesehen werden kann.

Bei dem Problem dürfte es zweckmäßig sein, sich bei einer vorläufigen Orientierung auf den Fall zu beschränken, daß \mathfrak{K} und damit auch \mathfrak{S} einen NOETHERschen Ring darstellt. Denn einerseits dürfte eine nähere Untersuchung von $\mathfrak{G}_p/\mathfrak{G}_{p,p}$ nur dann möglich sein, wenn es gelingt, endlich viele ausgezeichnete Ideale $\mathfrak{a}_1^*, \dots, \mathfrak{a}_m^*$ zu finden, derart, daß $\mathfrak{G}_{p,p}$ bereits durch die endlich vielen Darstellungen $\Delta(\mathfrak{a}_i^*, \mathfrak{a}_i^*\tilde{p})$ festgelegt ist. Wie aber eine solche Reduktion ohne eine Endlichkeitsannahme über \mathfrak{K} auch nur versucht werden könnte, ist nicht zu sehen. Andererseits ist schon im Spezialfall, daß $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}_p = \mathfrak{B}$ und damit auch $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{B}}$ ein Bewertungsring ist, also gewissermaßen im einfachsten von Endlichkeitsannahmen freien Fall, das Problem der Konstruktion von „höheren Verzweigungsgruppen“ anscheinend nur dann ungekünstelt und in allgemein brauchbarer Weise lösbar, wenn \mathfrak{K} über $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_p$ „vollverzweigt“ ist, d. h. wenn der Grad von \mathfrak{K} über \mathfrak{K} und der Index der zu \mathfrak{B}

¹²⁾ Vgl. z. B. R. KOCHENDÖRFER, Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen, Math. Nachrichten, Bd. 1, 40–61 (1948), Abschn. II, Satz 6.

gehörigen Wertgruppe Γ in der zu $\tilde{\mathfrak{S}}$ gehörigen Wertgruppe $\tilde{\Gamma}$ den gleichen Wert haben¹³⁾.

Es seien also \mathfrak{R} und \mathfrak{S} NOETHERSCHE Ringe. Dann könnte man auf den ersten Blick vermuten, daß $\mathfrak{G}_{r,p}$ ebenso wie \mathfrak{G}_r allein mit Hilfe der Darstellung $\Delta(\tilde{p}, \tilde{p}^2)$ bestimmt werden kann. Indessen wird diese Annahme schon durch das Beispiel von G. Th., § 4 widerlegt, durch das in der dortigen Terminologie gezeigt wurde, daß die (ebenso wie $\mathfrak{G}_{r,2} = \mathfrak{G}_{r,p}$ in \mathfrak{G}_r enthaltene) Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$ u. U. eine echte Obergruppe von $\mathfrak{G}_{r,p}$ darstellt. Darüber hinaus dürfte es, auch ohne daß ein Beispiel explizit vorliegt, nicht zu bezweifeln sein, daß Fälle existieren, wo alle Automorphismen aus \mathfrak{G}_r (für beliebig groß vorgegebenes r) sämtliche Elemente von \tilde{p} modulo \tilde{p}^r in sich überführen, während gleichzeitig $\Delta(a, a\tilde{p})$ für ein passendes a von der identischen Darstellung verschieden ausfällt. Unter diesen Umständen scheint es aber auch bei den NOETHERSCHEN Ringen \mathfrak{S} aussichtslos zu sein, in einer allgemein verbindlichen Weise die Bestimmung von $\mathfrak{G}_{r,p}$ auf die Betrachtung von endlich vielen Darstellungen $\Delta(a_i, a_i\tilde{p})$ zurückzuführen; die oben gestellte Aufgabe a) dürfte also selbst im NOETHERSCHEN Spezialfall keine befriedigende Lösung besitzen.

Als Ausweg bietet sich nun die Möglichkeit dar, bei den NOETHERSCHEN Ringen gar nicht mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{r,p} = \mathfrak{G}_{r,2}$ zu arbeiten, sondern mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$, und sich überhaupt bei der Definition der höheren Verzweigungsgruppen so eng wie möglich an das Vorbild der endlichen algebraischen Zahlkörper anzuschließen. Wir wollen diesen Gedanken von zunächst unter der Zusatzvoraussetzung durchführen, daß \mathfrak{S}/\tilde{p} eine separable Erweiterung von \mathfrak{R}/p darstellt, d. h. (wegen $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p$), daß $\mathfrak{S}/\tilde{p} = \mathfrak{R}/p$ wird. Man darf sich dann bei der Betrachtung des Verhaltens der \mathfrak{S} -Elemente gegenüber den $A \in \mathfrak{G}_r$ auf die Elemente aus \tilde{p} beschränken, und man erhält sofort den

Satz: Ist $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{K} = \mathfrak{R}_r$, so ist sicher $p \in \mathfrak{S} \subset \tilde{p}$.

Ist nämlich $p \in \mathfrak{S} = \tilde{p}$, so folgt aus $\mathfrak{S}/\tilde{p} = \mathfrak{R}/p$ sofort $\mathfrak{S}/\tilde{p}^r = \mathfrak{R}/p^r$ für jedes r . Daraus ergibt sich aber für $a \in \mathfrak{S}$, $A \in \mathfrak{G}_r$ stets $a^A - a \in \tilde{p}^r$, falls a^A wie üblich das Bildelement von a hinsichtlich A bedeutet. Da aber wegen der für \mathfrak{S} gültigen Maximalbedingung $\cap_r \tilde{p}^r = (0)$ ist¹⁴⁾, bedeutet unser Resultat, daß jedes a durch jedes A in sich übergeführt wird, d. h. man hat $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Wir definieren jetzt: Unter der i -ten höheren Verzweigungsgruppe $\mathfrak{G}_{r,i}$ (von \tilde{p} hinsichtlich \mathfrak{R}) soll die Gruppe aller der $A \in \mathfrak{G}_r$ verstanden werden, die für

¹³⁾ Zu den voll verzweigten Körpern vgl.: M. DEURING, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann. 105, 277—307 (1931). — Allerdings ist es auch bei ganz beliebigen Bewertungsringen möglich, in invarianter (also z. B. von der Auswahl spezieller Elemente unabhängiger) Weise Ketten von „höheren Verzweigungsgruppen“ $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r,1} \supset \mathfrak{G}_{r,2} \supset \dots \supset \mathfrak{G}_{r,r} = (E)$ einzuführen, derart, daß wie in der klassischen HILBERTSCHEN Theorie die Quotientengruppen $\mathfrak{G}_{r,i}/\mathfrak{G}_{r,i+1}$ alle direkte Produkte von Gruppen der Ordnung p werden. Aber es kommen hier verschiedene Ketten in Betracht, von denen keine vor der anderen ausgezeichnet ist und die alle mit irgendeinem Mangel behaftet sind. Vor allem ist es nicht ohne weiteres zu sehen, ob die eingeführten Gruppen $\mathfrak{G}_{r,i}$ im vollverzweigten Spezialfall stets in die DEURINGschen höheren Verzweigungsgruppen übergehen.

¹⁴⁾ Vgl. Satz 1 der in *) zitierten Arbeit.

jedes $a \in \tilde{\mathfrak{p}}$ (und damit wegen $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{K}/\mathfrak{p}$ für jedes $a \in \mathfrak{S}$) der Bedingung $a^A - a \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+1}$ genügen¹⁵⁾. Es ist dann jede der Gruppen \mathfrak{G}_i in $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r,0}$ invariant, und man hat $\mathfrak{G}_{r,0} \supseteq \mathfrak{G}_{r,1} \supseteq \mathfrak{G}_{r,2} \supseteq \dots$. Ist ferner ξ ein zu $\tilde{\mathfrak{p}}$ gehöriges primitives Element von \mathfrak{K} über \mathfrak{K} , so muß für jedes $A \neq E$ wegen $\cap_r \tilde{\mathfrak{p}}^r = (0)$ ein r_A existieren, derart, daß $\xi^A - \xi \in \tilde{\mathfrak{p}}^{r_A}$. Setzt man $r = \max(r_A)$, so wird $\mathfrak{G}_r = (E)$; die Kette der \mathfrak{G}_i bricht also im Endlichen mit (E) ab. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$ (die ebenso wie $\mathfrak{G}_{r,p}$ und aus den gleichen Gründen) bei einem Bewertungsring $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{B}}$ stets mit \mathfrak{G}_i zusammenfällt, ist mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$ von G. Th. identisch.

Es definiert also $\Delta(\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}^2)$ eine vollisomorphe (nicht nur homomorphe) Darstellung von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$. Für die Gruppen $\mathfrak{G}_{r,i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$) dagegen ergibt sich leicht durch grundsätzlich geläufige Rechnungen: Ist $\mathfrak{G}_{r,i} \supset \mathfrak{G}_{r,i+1}$, so ist $\mathfrak{G}_{r,i}/\mathfrak{G}_{r,i+1}$ abelsch und direktes Produkt von Gruppen der Ordnung p . Ist nämlich zunächst $A \in \mathfrak{G}_{r,i}$; $a_k \in \tilde{\mathfrak{p}}$ ($k = 1, 2$), so ist $a_k^A - a_k = b_k \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+1}$; $(a_1 a_2)^A - a_1 a_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2 \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$. Für $c \in \tilde{\mathfrak{p}}^2$, $A \in \mathfrak{G}_{r,i}$ wird also immer $c^A - c \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$.

Sind ferner $A_1, A_2 \in \mathfrak{G}_{r,i}$; $a \in \tilde{\mathfrak{p}}$, so wird $a^{A_1 A_2} - a = b_k \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+1}$; $a^{A_1 A_2^{-1}} = a = a^{A_2^{-1}} + b_k^{A_2^{-1}}$; $b_k^{A_2^{-1}} - b_k = c_k \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$; $a^{A_1} - a + b_k \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i-2}$. In entsprechender Weise ergibt sich $a^{A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}} - a \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$, und diese letzte Relation bedeutet soviel wie $A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \in \mathfrak{G}_{r,i+1}$. Damit erweist sich $\mathfrak{G}_{r,i}/\mathfrak{G}_{r,i+1}$ als Abelsch. Ebenso leicht erhält man: $a^{A^n} - a - ((n+1)a^{A^{n-1}} - a) \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$ ($A \in \mathfrak{G}_{r,i}$, $a \in \tilde{\mathfrak{p}}$; 1 Einheits-Element von \mathfrak{S}), und daraus folgt $A^p \in \mathfrak{G}_{r,i+1}$ wegen $p \in \tilde{\mathfrak{p}}$. — Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Die Verzweigungsgruppen $\mathfrak{G}_{r,i}$, — die bei einem endlichen algebraischen Zahlkörper oder allgemeiner bei einem diskreten Bewertungsring mit den Verzweigungsgruppen im Sinne HILBERTS identisch sind (wobei insbesondere stets $\mathfrak{G}_{r,1} = \mathfrak{G}_r$ wird) — besitzen also bei einem beliebigen NOETHERSchen Ringe \mathfrak{S} jedenfalls die Haupteigenschaft, die man vom klassischen Spezialfall her erwarten konnte. Es liegt nun noch nahe zu fragen, ob sich etwa für die Ordnungen der Quotientengruppen $\mathfrak{G}_{r,i}/\mathfrak{G}_{r,i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$) eine einfache idealtheoretische Deutung finden läßt. Indessen ist hier auf den ersten Blick wenigstens keine Antwort zu sehen, und es erscheint zweifelhaft, ob eine Untersuchung in dieser Richtung überhaupt lohnt. Handelt es sich doch — im Gegensatz zu der darstellungstheoretischen Deutung der Gruppe \mathfrak{G}_r in G. Th. — bei der Einführung der Gruppen $\mathfrak{G}_{r,i}$ um eine rein formale Nachbildung der höheren Verzweigungstheorie der endlichen algebraischen Zahlkörper, wobei noch die Tatsache, daß man anstelle der ohne jede Endlichkeitsannahme definierbaren Gruppe $\mathfrak{G}_{r,p}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$ setzen muß, als ein zwar unvermeidbarer, aber doch störender Schönheitsfehler anzusehen ist.

Ist $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{p}}$ über $\mathfrak{K}/\mathfrak{p}$ echt algebraisch (natürlich total inseparabel), so kann man nicht mehr behaupten, daß für $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{K}$ immer $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S} \neq \tilde{\mathfrak{p}}$ sein muß. Dagegen bleiben die für die Gruppen $\mathfrak{G}_{r,i}$ und die Faktorgruppen $\mathfrak{G}_r/\mathfrak{G}_{r,1}$, $\mathfrak{G}_{r,i}/\mathfrak{G}_{r,i+1}$ hergeleiteten Sätze einschließlich ihrer Beweise unverändert gültig. Ein neues

¹⁵⁾ Die Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$ der eingeführten Reihe ist von der Gruppe $\mathfrak{G}_{r,1}$ von G. Th. verschieden!

Moment kommt nur dadurch herein, daß jetzt die Gruppe \mathfrak{H}_i aller der $A \in \mathfrak{G}$, die für jedes $a \in \mathfrak{S}$ der Bedingung $a^4 - a \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+1}$ genügen, u. U. eine echte Untergruppe von \mathfrak{G}_i sein wird. Da die Frage, wie sich die \mathfrak{H}_i in die höhere Verzweigungstheorie einordnen lassen, schon bei den diskreten Bewertungsringen von Interesse ist, beschränken wir uns bei den weiteren Betrachtungen, abgesehen von einigen wenigen grundsätzlichen Bemerkungen, auf diesen Spezialfall.

§ 4. Diskrete Bewertungsringe mit unvollkommenem Restklassenkörper.

Es sei jetzt $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$ und ebenso $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{B}}$ ein diskreter Bewertungsring, und es sei $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{p}}$ eine total inseparable Erweiterung von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$, so daß jedenfalls wie in § 3 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_r$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_r$ wird; wegen der Beschränkung auf Bewertungsringe haben wir dann außerdem $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r,1}$. Dagegen kann $\mathfrak{H}_{r,1}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r,1}$ werden, wie das folgende triviale Beispiel zeigt: Es sei \mathfrak{R} der Körper aller ganzzahligen Polynomquotienten in einer Unbestimmten u , \mathfrak{R} der Unterring aller Quotienten, bei denen nicht sämtliche Nennerkoeffizienten durch 2 teilbar sind. Ferner werde $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}[\sqrt{u}]$ gesetzt. Dann ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\sqrt{u}]$ der Ring aller von \mathfrak{R} ganz abhängigen Elemente aus \mathfrak{R} , und es sind \mathfrak{R} und \mathfrak{S} beide diskrete Bewertungsringe mit dem Primelement 2. $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{p}}$ ist eine inseparable Erweiterung 2. Grades von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ durch die der Gleichung $(\sqrt{u})^2 = \bar{u}$ genügende Restklasse \sqrt{u}^{10} . Die Gruppe \mathfrak{G} mit dem (in leicht verständlicher Symbolik geschriebenen) erzeugenden Automorphismus $A = \{\sqrt{u} \rightarrow -\sqrt{u}\}$ fällt also jedenfalls mit $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r,1}$ zusammen. Andererseits besteht $\mathfrak{H}_{r,1}$ nur aus dem identischen Automorphismus E ; denn man hat: $(\sqrt{u})^4 - \sqrt{u} = -2\sqrt{u} \notin \tilde{\mathfrak{p}}^2 = (4) \cdot \mathfrak{S}$. Es ist also bei den diskreten Bewertungsringen mit unvollkommenem Restklassenkörper nicht zulässig, $\mathfrak{H}_{r,1}$ anstelle von $\mathfrak{G}_{r,1}$, also die Verzweigungsgruppe schlechthin einzuführen, obwohl die Bevorzugung von $\mathfrak{H}_{r,1}$ vor $\mathfrak{G}_{r,1}$ angesichts des Vorbilds der endlichen algebraischen Zahlkörper an sich naheläge. — Wir zeigen jetzt zunächst:

Es wird stets $\mathfrak{G}_{r,i+1} \subseteq \mathfrak{H}_{r,i}$, d. h. man hat

$$\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r,1} \supseteq \mathfrak{H}_{r,1} \supseteq \mathfrak{G}_{r,2} \supseteq \mathfrak{H}_{r,2} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{H}_{r,n} \supseteq \mathfrak{G}_{r,n+1} \cdots$$

Es sei nämlich π ein Primelement aus $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{B}}$, q beliebig aus \mathfrak{S} . Dann hat man für $A \in \mathfrak{G}_{r,i+1}$: $\pi^4 = \pi \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$; $(\pi a)^4 - \pi a \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$; $\pi(a^4 - a) \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$; $a^4 - a \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+1}$. — Wäre \mathfrak{S} kein Bewertungsring, sondern ein beliebiger NOETHERscher Ring, so könnte man auf entsprechende Weise nur zeigen: Ist $A \in \mathfrak{G}_{r,i+1}$ und a beliebig aus \mathfrak{S} , so wird $\tilde{\mathfrak{p}}(a^4 - a) \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+2}$; aber daraus braucht nicht immer $a^4 - a \in \tilde{\mathfrak{p}}^{i+1}$ zu folgen. Es ist also nicht sicher, ob sich bei einem beliebigen NOETHERschen Ringe \mathfrak{S} die $\mathfrak{H}_{r,i}$ ebenso einfach zwischen die $\mathfrak{G}_{r,i}$ einordnen lassen wie bei einem diskreten Bewertungsring $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}$. — Es handelt sich nun darum, Klarheit darüber zu gewinnen, was durch die Einführung der $\mathfrak{H}_{r,i}$ neben den $\mathfrak{G}_{r,i}$ möglicherweise erreicht werden kann. Hierzu zunächst einige grundsätzliche Bemerkungen:

¹⁰⁾ Durch den Querstrich kennzeichnen wir den Übergang vom Element aus \mathfrak{S} zur Restklasse modulo $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Es seien \mathfrak{K}_1 und $\mathfrak{K}_2 > \mathfrak{K}_1$ zwei über \mathfrak{K} normale Körper zwischen \mathfrak{K} und \mathfrak{K} , und es werde $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{K}_k$, $\mathfrak{p}_k = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{K}_k$ ($k = 1, 2$) gesetzt. Dann kann einerseits a) ein Primelement des Bewertungsringes \mathfrak{S}_1 im Bewertungsring \mathfrak{S}_2 seinen Primelementcharakter verlieren („Verzweigung“), andererseits kann b) $\mathfrak{S}_2/\mathfrak{p}_2$ ein echter Oberkörper von $\mathfrak{S}_1/\mathfrak{p}_1$ werden („Resterweiterung“). Tritt nur a) bzw. nur b) ein, so sprechen wir von einer „reinen Verzweigung“ bzw. „reinen Resterweiterung“ (beim Übergang von \mathfrak{K}_1 zu \mathfrak{K}_2). Als wünschenswert erscheint es offenbar, in allgemeinverbindlicher Weise eine Körperkette

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\tau = \mathfrak{K}_0 < \mathfrak{K}_1 < \mathfrak{K}_2 < \dots < \mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}$$

so festzulegen, daß alle \mathfrak{K}_i über \mathfrak{K} normal sind und daß beim Übergang von \mathfrak{K}_i zu \mathfrak{K}_{i+1} stets entweder eine reine Verzweigung oder eine reine Resterweiterung stattfindet. Bezeichnet weiter \mathfrak{K}_i bzw. \mathfrak{M}_i den zu \mathfrak{G}_i bzw. \mathfrak{H}_i im Sinne der GALOISSchen Theorie gehörigen Körper, so liegt die Vermutung nahe, daß möglicherweise bereits die Kette $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{\tau 1} \subseteq \mathfrak{M}_{\tau 1} \subseteq \mathfrak{K}_{\tau 2} \subseteq \mathfrak{M}_{\tau 2} \subseteq \dots$ (abgesehen von der unvermeidlichen Zulassung der Gleichheitszeichen) eine Körperkette der gewünschten Art darstellt. Daß aber die Verhältnisse in Wirklichkeit nicht so einfach liegen, zeigen die folgenden beiden Beispiele:

Es mögen \mathfrak{K} und \mathfrak{K} die gleiche Bedeutung haben wie in dem oben konstruierten Beispiel für $\mathfrak{H}_{\tau 1} \subset \mathfrak{G}_{\tau 1}$. Ferner sei $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, schließlich bedeute w eine Nullstelle des über \mathfrak{K}' irreduziblen Polynoms $x^2 - u$ („Beispiel 1“) bzw. des gleichfalls über \mathfrak{K}' irreduziblen Polynoms $x^2 - (1+\varepsilon)x - u$ („Beispiel 2“), und es werde $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'(w)$ gesetzt. Dann verifiziert man mühelos: Es ist $\mathfrak{S}' = \mathfrak{K}[\varepsilon]$ bzw. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'[w] = \mathfrak{K}[\varepsilon, w]$ der Ring aller von \mathfrak{K} ganz abhängigen Elemente aus \mathfrak{S}' bzw. \mathfrak{S} . Sowohl \mathfrak{S}' als \mathfrak{S} sind diskrete Bewertungsringe mit dem Primelement $\tilde{\pi} = 1 + \varepsilon$, das den Gleichungen $\tilde{\pi}^2 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon \cdot (1 + \sqrt{2})$, $\tilde{\pi}^4 = 2i(1 + \sqrt{2})^2$ genügt. (Beachte, daß außer ε und $\varepsilon^2 = i$ auch $1 + \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{-1}$ in \mathfrak{S} Einheit.) Weiter wird $\mathfrak{S}'/\tilde{\mathfrak{p}}' = \mathfrak{K}/\mathfrak{p}$, während $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{p}}$ eine inseparable Erweiterung von $\mathfrak{K}/\mathfrak{p}$ durch eine Nullstelle \tilde{w} des Polynoms $x^2 - \tilde{u}$ ist¹⁹⁾ ($\tilde{\mathfrak{p}} = (1 + \varepsilon)$, $\tilde{\mathfrak{p}}' = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{S}'$). Der Körper \mathfrak{K} ist über \mathfrak{K} normal vom Grade 8. Seine Gruppe \mathfrak{G} , die die Verzweigungsgruppe von $\tilde{\mathfrak{p}}$ hinsichtlich \mathfrak{K} darstellt, ist abelsch und direktes Produkt von Gruppen der Ordnung 2. Erzeugende von \mathfrak{G} sind die Automorphismen

$$A = \{\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}, i \rightarrow -i, w \rightarrow w\},$$

$$B = \{\sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2}, i \rightarrow i, w \rightarrow w\} \quad \text{sowie}$$

$$P = \{\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}, i \rightarrow i, w \rightarrow -w\} \quad (\text{Beispiel 1}) \text{ bzw.}$$

$$P = \{\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}, i \rightarrow i, w \rightarrow 1 + \varepsilon - w\} \quad (\text{Beispiel 2}).$$

Zur Bestimmung der Gruppen $\mathfrak{G}_{\tau i}$ und $\mathfrak{H}_{\tau i}$ genügt es offenbar, das Verhalten von $1 + \varepsilon$ gegenüber A, B , sowie das von w gegenüber P festzustellen. Für $1 + \varepsilon$ erhält man gleichmäßig in beiden Beispielen: $(1 + \varepsilon)^4 - (1 + \varepsilon) = -i\sqrt{2} \in \tilde{\mathfrak{p}}^3$; $(1 + \varepsilon)^2 - (1 + \varepsilon) = -(1 + i)\sqrt{2} = -2\varepsilon \in \tilde{\mathfrak{p}}^4, \notin \tilde{\mathfrak{p}}^5$. Für w dagegen findet man je nach seiner Definition:

$$w^P - w = 2 w \in \tilde{p}^4, \notin \tilde{p}^5 \quad (\text{Beispiel 1})$$

$$w^P - w = (1 + \varepsilon) - 2 w \in \tilde{p}, \notin \tilde{p}^2 \quad (\text{Beispiel 2}).$$

Bezeichnen wir nun die durch A und B erzeugte Gruppe mit (A, B) usw., so folgt aus den gewonnenen Relationen mühelos:

Beispiel 1: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{r,1} = \mathfrak{H}_{r,1}$; $(B, P) = \mathfrak{G}_{r,2} = \mathfrak{H}_{r,2} = \mathfrak{G}_{r,3} = \mathfrak{H}_{r,3}$; $(E) = \mathfrak{G}_{r,4}$.

Beispiel 2: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{r,1}$; $(A, B) = \mathfrak{H}_{r,1}$; $(B) = \mathfrak{G}_{r,2} = \mathfrak{H}_{r,2} = \mathfrak{G}_{r,3} = \mathfrak{H}_{r,3}$; $(E) = \mathfrak{G}_{r,4}$.

Bedeutet also $\mathfrak{K}_{(A, B)}$ den zur Gruppe (A, B) gehörigen Körper usw., so liefern die Gruppen $\mathfrak{G}_{r,i}$, $\mathfrak{H}_{r,i}$ in den beiden Beispielen folgende Normalkörperketten: $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_{(E, P)} = \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2$ (Beispiel 1). $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_{(A, B)} = \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_{(B)} = \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_3$ (Beispiel 2). Unter Berücksichtigung der Gleichungen $\mathfrak{K}_{(B, P)} = \mathfrak{K}(i)$, $\mathfrak{K}_{(A, B)} = \mathfrak{K}(w)$, $\mathfrak{K}_{(B)} = \mathfrak{K}(w, i)$ verifiziert man nun sofort: In Beispiel 2 ist die Kette $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_3$ eine Körperkette der von uns gewünschten Art; beim Übergang von \mathfrak{K}_0 zu \mathfrak{K}_1 hat man eine reine Resterweiterung; bei den Übergängen von \mathfrak{K}_1 zu \mathfrak{K}_2 und von \mathfrak{K}_2 zu \mathfrak{K}_3 dagegen je eine reine Verzweigung. In Beispiel 1. aber entspricht die Kette $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$ unseren Wünschen *nicht*; denn beim Übergang von \mathfrak{K}_1 zu \mathfrak{K}_2 erfolgt gleichzeitig eine Resterweiterung und eine Verzweigung.

Die Bilanz unserer Betrachtungen kann kurz so gezogen werden: In der Verzweigungstheorie der diskreten Bewertungsringe mit unvollkommenem Restklassenkörper sind die Gruppen $\mathfrak{G}_{r,i}$ unentbehrlich. Die Gruppen $\mathfrak{H}_{r,i}$ können zur Not entbehrt werden, doch bedeutet ihre Zwischenschaltung unbedingt eine wünschenswerte Verfeinerung. Allerdings liefern auch die $\mathfrak{G}_{r,i}$ und die $\mathfrak{H}_{r,i}$ zusammen nicht immer für den Endkörper über dem Verzweigungskörper eine Zwischenkörperkette, bei der inseparable Resterweiterungen und Verzweigungen getrennt sind. — Weiter auf die Verzweigungstheorie der diskreten Bewertungsringe mit unvollkommenen Restklassenkörper einzugehen, besteht im Rahmen der vorliegenden Note kein Anlaß.

(Eingegangen am 19. Dezember 1952.)

On Some Approximate Methods Concerning the Operators T^*T .

By
TOSIO KATO in Tokyo.

There are certain kinds of problems of the calculus of variations in which one is able to obtain upper and lower bounds of the quantity in question, even if the problem is not explicitly soluble¹⁾. The first example of this sort was perhaps the calculation by LORD RAYLEIGH of the end correction for acoustic resonators²⁾. Recently GREENBERG and DIAZ³⁾ have succeeded in obtaining upper and lower bounds of the value, at each preassigned point, of the solution of the Dirichlet problem and the first biharmonic boundary value problem⁴⁾.

The object of the first part of the present paper is to generalize their results to linear operators of Hilbert spaces. It turns out that the problems considered by them are special cases of the general operational equation $T^*Tu = f$, where T is a closed linear operator with domain in a Hilbert space \mathfrak{H} and with range in a second Hilbert space \mathfrak{H}' , and T^* is the adjoint of T . As is well known⁵⁾, T^*T is then a self-adjoint operator of \mathfrak{H} . Instead of dealing directly with the solution $u = u_0 = (T^*T)^{-1}f$, however, we shall consider the complex number $\xi = (u_0, g)$, where g is another given vector of \mathfrak{H} , and deduce a formula determining an approximate value of ξ with a rigorous estimate of the error. In particular if \mathfrak{H} is a function space and g is the Dirac delta-function with its singularity at a preassigned point, ξ will reduce to the value of u_0 at the point (though the use of the delta-function requires a later justification). In this way our formula is seen to comprise those of GREENBERG and DIAZ, and indeed with some essential improvements as we shall show below⁶⁾.

Since it is known that a large class of operators appearing in applications can be reduced to the form T^*T by a suitable choice of the spaces \mathfrak{H} , \mathfrak{H}' and the operator T , our formula has a wide range of application. These applications will be dealt with elsewhere.

The second part of the present paper is devoted to the approximate solution of the eigenvalue problem for the operator T^*T . Some years ago the writer proved the following theorem⁷⁾.

¹⁾ Cf. COURANT and HILBERT [1], FRIEDRICHS [3].

²⁾ RAYLEIGH [10].

³⁾ GREENBERG [5], DIAZ and GREENBERG [2].

⁴⁾ It should be noted that the first attempt for such an estimation was made by TREFFTZ [11] who, however, did not give explicit formulas.

⁵⁾ For the theory of the operator T^* and T^*T etc., see v. NEUMANN [9] and MURRAY [8]. Cf. also FRIEDRICHS [4], WEYL [12].

⁶⁾ See the footnote ¹⁴⁾.

⁷⁾ KATO [6]. Eq. (2) is proved in KATO [7], Lemma 4.

Theorem A. Let H be any self-adjoint operator of a Hilbert space, and let (α, β) be an open interval containing at most a non-degenerate eigenvalue of H but no other point of its spectrum. Let w be any vector of \mathfrak{D}_H^8 with $\|w\| = 1$ and set $\eta = (Hw, w)$, $\varepsilon^2 = \|(H - \eta)w\|^2 = \|Hw\|^2 - \eta^2$ ($\varepsilon \geq 0$). If $\varepsilon^2 < (\eta - \alpha)(\beta - \eta)$, then there is certainly an eigenvalue λ_0 of H in (α, β) and satisfies the inequalities

$$(1) \quad -\frac{\varepsilon^2}{\beta - \eta} \leq \lambda_0 - \eta \leq \frac{\varepsilon^2}{\eta - \alpha}.$$

Let w_0 be the eigenvector of H associated with the eigenvalue λ_0 normalized as $\|w_0\| = 1$ and $(w_0, w) \geq 0$. If $\varepsilon < \delta \equiv \text{Min}(\eta - \alpha, \beta - \eta)$, then we have

$$(2) \quad \|w_0 - w\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

This theorem is true for every self-adjoint operator H . In order that it be applicable, however, it is necessary that the "trial vector" w belong to \mathfrak{D}_H . This is often a considerable inconvenience in practice. For instance, if H is a differential operator of second order, w is required to have second-order derivatives at least in a certain generalized sense. But it occurs very often that one is obliged to do with trial functions which have only first-order derivatives.

Thus it is desirable to have a formula requiring less of the trial vector. Such a formula will be deduced in the present paper under the assumption that H has the form T^*T . Here we make use of two trial vectors u and u' belonging to \mathfrak{D}_T and \mathfrak{D}_{T^*} , respectively. When H is a differential operator of second order, this means that u and u' need to have only first-order derivatives. Applications of the formula will be given elsewhere.

§ 1. On the operator T^*T .

For later use we collect here some important properties of the operator T^*T^5 . Let \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' be two Hilbert spaces which may possibly coincide, and let T be a closed linear operator with \mathfrak{D}_T dense in \mathfrak{H} and with $\mathfrak{R}_T \subset \mathfrak{H}'^6$. Then its adjoint T^* exists and is a closed linear operator such that \mathfrak{D}_{T^*} is dense in \mathfrak{H}' and $\mathfrak{R}_{T^*} \subset \mathfrak{H}$. \mathfrak{R}_T^8 and \mathfrak{R}_{T^*} are closed linear manifolds in \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' respectively, and the following relations hold⁹:

$$(3) \quad \mathfrak{R}_T = \mathfrak{H} \ominus \bar{\mathfrak{R}}_{T^*}, \quad \mathfrak{R}_{T^*} = \mathfrak{H}' \ominus \bar{\mathfrak{R}}_T.$$

T^*T and TT^* are positive definite, self-adjoint operators of \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' respectively. Set $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ and $C = (TT^*)^{\frac{1}{2}}$. Then we have¹⁰)

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_C = \mathfrak{D}_{T^*}, \|Bx\| = \|Tx\|, \|Cx'\| = \|T^*x'\|, \\ \mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_{T^*}, \mathfrak{R}_C = \mathfrak{R}_T, \mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_T, \mathfrak{R}_C = \mathfrak{R}_{T^*}. \end{cases}$$

Let E and E' be the projections of \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' on $\bar{\mathfrak{R}}_{T^*}$ and $\bar{\mathfrak{R}}_T$ respectively. There is a bounded linear operator W with the following properties:

⁵) Throughout this paper we denote by \mathfrak{D}_A and \mathfrak{R}_A respectively the domain and range of the operator A , and by \mathfrak{N}_A the zero of A , that is, the set of all $x \in \mathfrak{D}_A$ such that $Ax = 0$.

⁶) $\bar{\mathfrak{R}}$ means the closure of the set \mathfrak{R} .

¹⁰) It seems that $\mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_{T^*}$ and $\mathfrak{R}_C = \mathfrak{R}_T$ are not stated explicitly in v. NEUMANN [9] or MURRAY [8]. But these are direct consequences of (6) below. In fact, $T^* = BW^*$ implies $\mathfrak{R}_{T^*} \subset \mathfrak{R}_B$ and $B = T^*W$ implies $\mathfrak{R}_B \subset \mathfrak{R}_{T^*}$, so that we have $\mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_{T^*}$, and similarly $\mathfrak{R}_C = \mathfrak{R}_T$.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_W = \mathfrak{H}, \mathfrak{R}_W = \overline{\mathfrak{R}}_T, \mathfrak{D}_{W^*} = \mathfrak{H}', \mathfrak{R}_{W^*} = \overline{\mathfrak{R}}_{T^*}, \\ W^*W = E, WW^* = E', \|W\| \leq 1. \end{array} \right. \\
 (6) \quad & \left\{ \begin{array}{l} T = WB = CW, \quad B = W^*T = T^*W, \\ T^* = W^*C = BW^*, \quad C = TW^* = WT^*, \\ B = W^*CW, \quad C = WBW^*. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

It will be noted that, when the operator T is given, the self-adjoint operators B and C are defined in a very complicated manner, so that they cannot be regarded as "known" operators from the practical point of view.

For later reference we cite some examples of the operator T^*T .

Example 1. Let \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' be two unitary spaces of dimensions n and n' respectively, and let T be a linear transformation of \mathfrak{H} into \mathfrak{H}' with rank r . Then $\dim \mathfrak{R}_T = n - r$, $\dim \mathfrak{R}_{T^*} = n' - r$. If in particular $r = n$, then $\dim \mathfrak{R}_B = \dim \mathfrak{R}_T = 0$ and B and $T^*T = B^2$ have inverses B^{-1} and $(T^*T)^{-1}$. But $\dim \mathfrak{R}_C = \dim \mathfrak{R}_{T^*}$ need not be zero.

*Example 2*¹¹⁾. Let D be a bounded domain of the plane with rectangular coordinates x, y and let C be the boundary of D assumed to be sufficiently regular. Let \mathfrak{H} be the Hilbert space consisting of complex-valued functions $u(x, y)$ with the inner product $(u, v) = \iint_D u \bar{v} dx dy$. Let $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ be the set of two-component vector functions $u'(x, y) = \{u_1(x, y), u_2(x, y)\}$ with the inner product $(u', v') = \iint_D (u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2) dx dy$. Let \mathfrak{D} be the set of all functions which are continuous in $D + C$ and which have piecewise continuous derivatives of first order, and let \mathfrak{D} be the subset of \mathfrak{D} consisting of functions which vanish on C . Let T_2 be the linear operator with $\mathfrak{D}_{T_2} = \mathfrak{D}$ and $\mathfrak{R}_{T_2} \subset \mathfrak{H}'$ such that $T_2 u = \text{grad } u = \{\partial u / \partial x, \partial u / \partial y\}$. Then T_1 has a closed extension. Let T be the closure of T_2 and let $T^* = T_2^*$ be its adjoint. It is easily seen that \mathfrak{D}_{T^*} contains at least all $u' \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, that is, all $u' = \{u_1, u_2\} \in \mathfrak{H}'$ such that $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}$, and that $T^*u' = -\text{div } u' = -(\partial u_1 / \partial x + \partial u_2 / \partial y)$. Thus we have $T^*T u = -\Delta u = -(\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2)$ at least if u has continuous derivatives of first order and piecewise continuous derivatives of second order and vanishes on C . Also we have $\mathfrak{R}_T = \{0\}$ so that $(T^*T)^{-1}$ exists [$(T^*T)^{-1}$ is even bounded]. But $\mathfrak{R}_{T^*} \neq \{0\}$, for $\text{div } u' = 0$ admits of infinitely many independent solutions.

Example 3. Let \mathfrak{H} be as in Ex. 2 and let $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ be the set of three-component vector functions $u'(x, y) = \{u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)\}$. Let $\mathfrak{D}_{T_1} = \mathfrak{D}$ be as above and set $T_1 u = \{\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, q(x, y)^{\frac{1}{2}} u\}$, where $q(x, y) \geq 0$ is a given function. Let T be the closure of T_1 . Then T^* is given by $T^*u' = -\partial u_1 / \partial x - \partial u_2 / \partial y + q^{\frac{1}{2}} u_3$, and we have $T^*T u = -\Delta u + q u$ with the boundary condition $u = 0$ on C .

§ 2. On the equation $T^*T u = f$.

1. As we have explained in the introduction, we consider the problem of calculating the complex quantity $\xi = (u_0, g)$, where u_0 is the solution of the linear equation $T^*T u = f$ and $f, g \in \mathfrak{H}$. Since $T^*T = B^2$, we can write

¹¹⁾ Cf. FRIEDRICHS [4].

$\xi = (B^{-2}f, g)$ or, in a more symmetric form, $\xi = (B^{-1}f, B^{-1}g)$. Our main theorem now reads:

Theorem 1. Let T, T^* and $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ be as in § 1, and let $\mathfrak{R}_T = \{0\}$. Then B^{-1} exists. Let f, g be two given vectors of \mathfrak{H} belonging to $\mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_{T^*}$ and set $\xi = (B^{-1}f, B^{-1}g)$. Let u, v be any two vectors of \mathfrak{D}_T and let u', v' be any two vectors of \mathfrak{D}_{T^*} satisfying the subsidiary conditions $T^*u' = f, T^*v' = g$. Then the following inequality holds:

$$(7) \quad |\xi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon\delta,$$

where

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = (u, g) + (f, v) - (Tu, Tv), & \beta = (u', v'), \\ \varepsilon = \|Tu - u'\|, & \delta = \|Tv - v'\|. \end{cases}$$

Before giving the proof of the theorem, we shall make some remarks.

Remark 1. Since $\mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_{T^*} = \{0\}$ by (4), B^{-1} exists. Since $f, g \in \mathfrak{R}_{T^*}$ by hypothesis, u' and v' satisfying the subsidiary conditions certainly exist. In general, however, they are not uniquely determined thereby, for \mathfrak{R}_{T^*} is not necessarily $\{0\}$. Rather it is in such indeterminate cases that the theorem is of practical use.

Remark 2. A good approximation is obtained when ε and δ are small. In particular if one of them is zero, we have the exact value of ξ . Now $\varepsilon = 0$ implies $Tu = u', T^*Tu = T^*u' = f$. Thus $\varepsilon = 0$ occurs if and only if u is the correct solution of $T^*Tu = f$ and $u' = Tu$, and this is possible only if $f \in \mathfrak{R}_{T^*T} = \mathfrak{R}_B$. Even if f does not belong to \mathfrak{R}_B , however, it is easily shown that ε can be made arbitrarily small by a suitable choice of u and u' . Also it should be noted that

$$(9) \quad \varepsilon^2 = \|Tu\|^2 - 2 \operatorname{Re}(u, f) + \|u'\|^2,$$

where the trial vectors u and u' are separated. In order to make ε small, therefore, it is sufficient to choose u and u' such that $\|Tu\|^2 - 2 \operatorname{Re}(u, f)$ and $\|u'\|^2$ are small separately. The same holds for δ .

Remark 3. As we shall show below, (7) implies

$$(10) \quad |\xi - \alpha| \leq \varepsilon\delta, \quad |\xi - \beta| \leq \varepsilon\delta.$$

These inequalities are somewhat simpler, but less sharp, than (7).

Remark 4. In the particular case $g=f$, we can take $v' = u'$ and (7) reduces to

$$(11) \quad 2 \operatorname{Re}(u, f) - \|Tu\|^2 \leq \|B^{-1}f\|^2 \leq \|u'\|^2.$$

Remark 5. In most important cases $B^{-2} = (T^*T)^{-1}$ and B^{-1} are bounded. Then f, g may be any vectors of \mathfrak{H} and

$$(12) \quad \xi = ((T^*T)^{-1}f, g) = (f, (T^*T)^{-1}g).$$

2. *Proof of Theorem 1.* First we note that $\overline{\mathfrak{R}_{T^*}} = \mathfrak{H}$ by hypothesis and (3), so that $W^*W = I =$ identity operator of \mathfrak{H} by (5). Thus we have

$$(13) \quad (Wx, Wy) = (x, y)$$

for every $x, y \in \mathfrak{H}$. Set now

$$(14) \quad \begin{cases} u'_1 = Tu - WB^{-1}f, & u'_2 = WB^{-1}f - u', \\ v'_1 = Tv - WB^{-1}g, & v'_2 = WB^{-1}g - v'. \end{cases}$$

Since $\mathfrak{R}_W = \overline{\mathfrak{R}_T}$ by (5), we have $u'_1, v'_1 \in \overline{\mathfrak{R}_T}$. Furthermore, noting that $T^*W = B$

by (6), we have $T^*u'_2 = B B^{-1}f - T^*u' = f - f = 0$ and similarly $T^*v'_2 = 0$. In other words, $u'_2, v'_2 \in \mathfrak{N}_{T^*}$. Since $\overline{\mathfrak{R}}_T$ and \mathfrak{N}_{T^*} are orthogonal by (3), we have therefore

$$(15) \quad (u'_1, u'_2) = 0, (v'_1, v'_2) = 0.$$

Next we calculate (u'_1, v'_1) and (u'_2, v'_2) . We have by (14) $(u'_1, v'_1) = (Tu, Tv) - (Tu, WB^{-1}g) - (WB^{-1}f, Tv) + (WB^{-1}f, WB^{-1}g)$.

Noting (13) and $T^*W = B$ by (6), we obtain

$$(u'_1, v'_1) = (Tu, Tv) - (u, g) - (f, v) + (B^{-1}f, B^{-1}g) = -\alpha + \xi,$$

where we have substituted (8). Thus we have

$$(16) \quad |\xi - \alpha| \leq \|u'_1\| \|v'_1\|.$$

Also we have

$$(u'_2, v'_2) = (WB^{-1}f, WB^{-1}g) - (WB^{-1}f, v') - (u', WB^{-1}g) + (u', v').$$

We note that $W^*u' = B^{-1}f$, for $f = T^*u' = BW^*u'$ by (6), and similarly $W^*v' = B^{-1}g$. Thus, again using (13),

$$(u'_2, v'_2) = (B^{-1}f, B^{-1}g) - 2(B^{-1}f, B^{-1}g) + (u', v') = -\xi + \beta,$$

whence follows

$$(17) \quad |\xi - \beta| \leq \|u'_2\| \|v'_2\|.$$

It follows from (16) and (17) that

$$\begin{aligned} |\xi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)| &\leq \frac{1}{2}|\xi - \alpha| + \frac{1}{2}|\xi - \beta| \leq \frac{1}{2}(\|u'_1\| \|v'_1\| + \|u'_2\| \|v'_2\|) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|u'_1\|^2 + \|u'_2\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|v'_1\|^2 + \|v'_2\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Noting the orthogonality relations (15), we obtain

$$\begin{aligned} |\xi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)| &\leq \frac{1}{2}\|u'_1 + u'_2\| \|v'_1 + v'_2\| \\ &= \frac{1}{2}\|Tu - u'\| \|Tv - v'\| = \frac{1}{2}\varepsilon\delta \end{aligned}$$

which proves (7).

Finally we note that

$$(Tu - u', Tv - v') = (Tu, Tv) - (u, g) - (f, v) + (u', v') = -\alpha + \beta$$

and hence

$$(18) \quad |\beta - \alpha| \leq \|Tu - u'\| \|Tv - v'\| = \varepsilon\delta.$$

It follows from (7) and (18) that

$$|\xi - \alpha| \leq |\xi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)| + \frac{1}{2}|\beta - \alpha| \leq \varepsilon\delta$$

and similarly $|\xi - \beta| \leq \varepsilon\delta$, proving (10) of Remark 3. At the same time it is clear that the inequalities (10) are less sharp than (7), for they are derived from the latter by making use of (18).

3. Examples. By way of illustration let us consider the examples introduced in § 1.

Example 1. We assume that the rank of T is equal to n (this implies that $n' \leq n$). Then $\mathfrak{N}_T = \{0\}$ and the hypothesis of Theorem 1 is satisfied. If $n' > n$, then the subsidiary conditions $T^*u' = f$, $T^*v' = g$ do not determine u' , v' uniquely, and we have some freedom in choosing u' , v' . If we take a complete orthonormal system $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ of \mathfrak{H} and take $f = \varphi_j$, $g = \varphi_k$, then the quantity ξ becomes $\xi = ((T^*T)^{-1}\varphi_j, \varphi_k)$. Thus ξ is a matrix element of the operator $(T^*T)^{-1}$, and Theorem 1 gives a means for calculating such a quantity.

Example 2. As we have stated in § 1, the operator $B^{-2} = (T^*T)^{-1}$ is bounded, so that $\xi = ((T^*T)^{-1}f, g)$ by Remark 5. As the trial functions u, v

we can take any functions belonging to $\dot{\mathfrak{D}}$. If the functions f, g are piecewise continuous, the trial functions u', v' , which are two-component vector functions in this case, have only to belong to $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ and satisfy the subsidiary conditions $\operatorname{div} u' = -f$, $\operatorname{div} v' = -g$. Of course there is a large freedom in choosing such functions. If f, g are two functions of a complete orthonormal system of functions, then ξ is a matrix element of the operator $(T^* T)^{-1}$ as in Ex. 1.

Suppose now that $g(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$, where δ is the Dirac delta-function. Of course such a function does not exist, but we use it only for a heuristic purpose. Then $\xi = ((T^* T)^{-1} f, g)$ is equal to the value, at the point x_0, y_0 , of the function $u_0 = (T^* T)^{-1} f$. On the other hand, the condition $\operatorname{div} v' = -g$ is satisfied if the vector v' has the singularity

$$(19) \quad v' = \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right) + w', \quad \operatorname{div} w' = 0 \quad (w' \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}),$$

where $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Then it is necessary to choose v in such a way that

$$(20) \quad v = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} + w, \quad w \in \mathfrak{D}, \quad v = 0 \text{ on } C,$$

for otherwise the quantity $\|Tv - v'\|^2 = \iint |\operatorname{grad} v - v'|^2 dx dy$ would be infinite. In this (non-rigorous) way we are lead to the formula (7), where¹²⁾

$$(21) \quad \begin{cases} \xi = u_0(x_0, y_0) & (u_0 = (T^* T)^{-1} f), \\ \alpha = u(x_0, y_0) + \iint_D \bar{v} dx dy - \iint_D \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \bar{v} dx dy, \\ \beta = \iint_D u' \cdot \bar{v}' dx dy, \\ \epsilon^2 = \iint_D |\operatorname{grad} u - u'|^2 dx dy, \\ \delta^2 = \iint_D |\operatorname{grad} w - w'|^2 dx dy, \end{cases}$$

and the trial functions are assumed to satisfy the following conditions:

$$\begin{cases} u \in \dot{\mathfrak{D}}, & u' \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}, \quad \operatorname{div} u' = -f, \\ v, v', w, w' & \text{as in (19) and (20)}. \end{cases}$$

These results are essentially in agreement with those of GREENBERG³⁾. The use of the delta-function may be justified by a certain limiting process. Once we have found the formula, however, it is easier to establish its validity directly by making use of GREEN's theorem and following an argument similar to that used by GREENBERG¹³⁾. Since there is no difficulty and since our main interest lies in the abstract formulation, we shall not enter into the proof here¹⁴⁾.

Next we consider the Dirichlet problem

$$\Delta u_0 = 0 \text{ in } D, \quad u_0 = \varphi \text{ on } C.$$

¹²⁾ These results can be extended to problems of three or more dimensions with trivial modifications.

¹³⁾ Or we may follow the argument of the proof of Theorem 1 in terms of concrete functions instead of abstract vectors, by making use of GREEN's theorem to avoid the use of the delta-function. (Note that $W B^{-1} f = W B B^{-1} f = T u_0$, etc.).

¹⁴⁾ Only it will be pointed out that the formulas of GREENBERG [5] correspond to (10) rather than to (7), so that they are somewhat less accurate than ours. (The same remark applies to the results of DIAZ and GREENBERG [2] for the biharmonic equation). Furthermore, he assumes that the functions u, w , etc. have continuous derivatives of second order. But this is not necessary, as will be inferred from our results. It can be shown that considerable improvement is attained in the numerical example of GREENBERG by using a trial function w which has only piecewise continuous derivatives of first order.

As is well known, this problem is reducible to the problem of the type hitherto considered, and our formula (21) can be transformed so as to apply to the Dirichlet problem. The result has again the form (7), where¹⁵⁾

$$(22) \quad \begin{cases} \xi = u_0(x_0, y_0), \\ \alpha = u(x_0, y_0) - \iint_D \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} \, dx \, dy, \\ \beta = \iint_D u' \cdot \bar{v} \, dx \, dy - \int_C \varphi \bar{v}'_n \, ds, \end{cases}$$

and v'_n is the outward normal component of v' and ds is the line element on C . ε^2 , δ^2 have the same form as in (21). The trial functions v , v' are again assumed to have the forms (19), (20), and u , u' are assumed to satisfy the conditions

$$\begin{cases} u \in \mathfrak{D}, & u \in \varphi \text{ on } C, \\ u' \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}, & \text{div } u' = 0. \end{cases}$$

§ 3. On the eigenvalue problem of T^*T .

1. Let T , T^* etc. be as in § 1. In this section we consider the problem of estimating the eigenvalues and eigenvectors of the self-adjoint operator T^*T or, what comes to the same thing, those of the operator $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ by making use of trial vectors *which do not necessarily belong to \mathfrak{D}_{T^*T}* . This would be possible if we could apply Theorem A of the introduction to the operator B . But this is impossible, for B is in general not a "known" operator (see § 1) and we cannot calculate such a quantity as (Bw, w) .

To avoid this difficulty, we introduce the following device. We construct the product space $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ consisting of all pairs $\{u, u'\}$ with $u \in \mathfrak{H}$ and $u' \in \mathfrak{H}'$. $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ is a Hilbert space with the inner product $(\{u, u'\}, \{v, v'\}) = (u, v) + (u', v')$. In $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ we consider the operator H defined by

$$(23) \quad H\{u, u'\} = \{T^*u', Tu\}.$$

The domain of H is by definition $\mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_T \times \mathfrak{D}_{T^*}$, that is, the set of all $\{u, u'\}$ such that $u \in \mathfrak{D}_T$, $u' \in \mathfrak{D}_{T^*}$.

It can easily be verified¹⁶⁾ that H is a self-adjoint operator and that for $u \in \mathfrak{D}_{T^*T}$ and $u' \in \mathfrak{D}_{TT^*}$,

$$(24) \quad H^2\{u, u'\} = \{T^*Tu, TT^*u'\}.$$

This shows that H^2 is reduced by \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' regarded as closed linear manifolds of $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$, and that the parts of H^2 in \mathfrak{H} and \mathfrak{H}' coincide with T^*T and TT^* respectively.

If we introduce an operator U of $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ by $U\{u, u'\} = \{u, -u'\}$, U is a unitary operator and satisfies $U^2 = I$. It follows easily that $U^{-1}HU = -H$ so that H and $-H$ are isomorphic and the spectrum of H is symmetric with respect to the point $\lambda = 0$.

¹⁵⁾ Also these results are essentially in agreement with, but somewhat more accurate than, those of GREENBERG [5], which again correspond to (10) rather than to (7).

¹⁶⁾ Here and in what follows we use, for brevity, the results of v. NEUMANN [9] and MURRAY [8]. It will be remarked, however, that the entire theory of the operators T , T^* , T^*T , etc. can be constructed on the consideration of the operator H .

Lemma 1. *If the interval $0 \leq \alpha < \lambda < \beta$ contains at most a non-degenerate eigenvalue λ_0 of the operator $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ but no other point of its spectrum, then the same holds for the operator H with the same eigenvalue λ_0 .*

Proof. Since T^*T and TT^* are isomorphic⁵⁾ except in their zeros \mathfrak{N}_T and \mathfrak{N}_{T^*} , it follows from (24) that the interval (α^2, β^2) contains at most a doubly degenerate eigenvalue λ_0^2 of H^2 . Since H and $-H$ are isomorphic, it follows that each of the intervals (α, β) and $(-\beta, -\alpha)$ contains at most a non-degenerate eigenvalue λ_0 or $-\lambda_0$ of H .

2. Contrary to $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, H is a "known" operator and thus we can apply to it Theorem A. For this purpose, we introduce two trial vectors $u \in \mathfrak{D}_T$ and $u' \in \mathfrak{D}_{T^*}$ such that $\|u\| = \|u'\| = 1$ and construct a trial vector $w \in \mathfrak{D}_H$ by setting $w = \{\theta u, \theta' u'\}$ with two complex numbers θ, θ' . The condition $\|w\| = 1$ is fulfilled if $|\theta|^2 + |\theta'|^2 = 1$, and we have

$$\eta = (Hw, w) = (\{\theta' T^* u', \theta T u\}, \{\theta u, \theta' u'\}) = 2 \operatorname{Re} \theta \bar{\theta}' (Tu, u'),$$

$$\varepsilon^2 = \|Hw\|^2 - \eta^2 = |\theta|^2 \|Tu\|^2 + |\theta'|^2 \|T^* u'\|^2 - \eta^2.$$

In applying Theorem A, it is advantageous to make ε small. If $u, u', |\theta|$ and $|\theta'|$ are given, this is attained by making η large. Hence we assume that u and u' are already normalized in such a manner that $(Tu, u') \geq 0$ ¹⁷⁾ and choose θ, θ' as $\theta \geq 0, \theta' \geq 0$. Then it is convenient to write

$$(25) \quad \theta = \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta' = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (-1 \leq \nu \leq 1).$$

Writing η_ν and ε_ν in place of η and ε respectively, we have

$$(26) \quad \eta_\nu = (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} \eta_0, \quad \eta_0 = (Tu, u') \geq 0,$$

$$(27) \quad \varepsilon_\nu^2 = \frac{1+\nu}{2} \|Tu\|^2 + \frac{1-\nu}{2} \|T^* u'\|^2 - \eta_\nu^2, \quad \varepsilon_\nu \geq 0.$$

It is easily verified that ε_ν^2 can also be written as

$$(27') \quad \varepsilon_\nu^2 = \frac{1+\nu}{2} \|Tu - \eta_0 u'\|^2 + \frac{1-\nu}{2} \|T^* u' - \eta_0 u\|^2 + \nu^2 \eta_0^2.$$

We can now prove our main theorem.

Theorem 2. *Let T, T^* and $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ be as in § 1. Let $0 \leq \alpha < \lambda < \beta$ be an interval containing at most a non-degenerate eigenvalue of B but no other point of its spectrum. Let $u \in \mathfrak{D}_T$ and $u' \in \mathfrak{D}_{T^*}$ be normalized as $\|u\| = \|u'\| = 1$, $(Tu, u') \geq 0$. Let $-1 \leq \nu \leq 1$ and let η_ν and ε_ν be given by (26) and (27) or (27'). Then, if $\varepsilon_\nu^2 < (\eta_\nu - \alpha)(\beta - \eta_\nu)$, there is certainly an eigenvalue λ_0 of B in the interval (α, β) and satisfies the inequalities:*

$$(28) \quad -\frac{\varepsilon_\nu^2}{\beta - \eta_\nu} \leq \lambda_0 - \eta_\nu \leq \frac{\varepsilon_\nu^2}{\eta_\nu - \alpha}.$$

Let u_0 be the eigenvector of B associated with the eigenvalue λ_0 and normalized as $\|u_0\| = 1, (u_0, u) \geq 0$. Then $u'_0 = \text{const.}$ $T u_0$ is an eigenvector of $C = (T T^*)^{\frac{1}{2}}$ with the same eigenvalue λ_0 . If u'_0 is normalized as $\|u'_0\| = 1$ and $(u'_0, u') \geq 0$, we have

$$(29) \quad \|u_0 - (1 + \nu)^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|u'_0 - (1 - \nu)^{\frac{1}{2}} u'\|^2 \leq 2 \frac{\varepsilon_\nu^2}{\delta_\nu^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu^2}{\delta_\nu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

provided that $\varepsilon_\nu < \delta_\nu = \min(\eta_\nu - \alpha, \beta - \eta_\nu)$.

¹⁷⁾ This is no essential restriction.

Proof. If we note Lemma 1, Theorem A is applicable to the operator H with the trial vector w stated above, and since $\|w\| = 1$, $\eta_r = (Hw, w)$, $\varepsilon_r^2 = \|Hw\|^2 - \eta_r^2$, we obtain by (1) at once the inequalities (28). Next we consider the eigenvector u_0 for which we assume only $\|u_0\| = 1$ at present. Since $T^*T^*Tu_0 = TB^2u_0 = \lambda_0^2 Tu_0$, Tu_0 is an eigenvector of $T^*T^* = C^2$ with the eigenvalue λ_0^2 , that is, an eigenvector of C with the eigenvalue λ_0 . If we set $w_0 = 2^{-\frac{1}{2}}\{u_0, \lambda_0^{-1}Tu_0\}$, we see immediately that $\|w_0\| = 1$ and $Hw_0 = \lambda_0 w_0$. Hence (2) is applicable and we have

$$\|w_0 - w\|^2 \leq \frac{\varepsilon_r^2}{\delta_r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_r^2}{\delta_r^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

if u_0 is normalized in such a manner that $(w_0, w) \geq 0$. Now we have

$$2\|w_0 - w\|^2 = \|u_0 - (1 + \nu)^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|\lambda_0^{-1}Tu_0 - (1 - \nu)^{\frac{1}{2}}u'\|^2.$$

But the first term on the right is not increased if we re-normalize u_0 in such a manner that $(u_0, u) \geq 0$. Similarly the second term is not increased if we replace $\lambda_0^{-1}Tu_0$ by u'_0 stated in the theorem. This proves (29).

3. We add some remarks to the preceding theorem.

Remark 1. The above results are particularly simple if we take $\nu = 0$.

Remark 2. When the five quantities $\alpha, \beta, \eta_0, \|Tu\|, \|T^*u'\|$ are given, it is most advantageous to determine once ν in such a way that the lower bound of λ_0 given by (28) is a maximum, and then that the upper bound is a minimum. But this is in general rather complicated. An alternative procedure is to determine ν so as to make ε_r^2 a minimum. This is easily performed and yields

$$(30) \quad \begin{cases} \eta_r = \left[1 - \frac{1}{16\eta_0^2} (\|Tu\|^2 - \|T^*u'\|^2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \eta_0, \\ \varepsilon_r^2 = \left[1 - \frac{1}{4\eta_0^2} (\|Tu\| - \|T^*u'\|)^2\right] \left[\frac{1}{4} (\|Tu\| + \|T^*u'\|)^2 - \eta_0^2\right], \end{cases}$$

for

$$(31) \quad \nu = \frac{1}{4\eta_0^2} (\|T^*u'\|^2 - \|Tu\|^2),$$

provided that the value of (31) lies between -1 and 1 .

Remark 3. If λ_0 is the smallest eigenvalue of B , RAYLEIGH'S principle shows that $\lambda_0 \leq \|Tu\|$, and this is more convenient than the right inequality of (28) in most cases.

Remark 4. If $u \in \mathfrak{D}_{T^*T}$ we could take $u' = \|Tu\|^{-1}Tu$. Then our formula (28) reduces to a form which is similar to (1) of Theorem A applied to T^*T , but somewhat less accurate than the latter. This should have been expected, for we have in this case only four quantities $\alpha, \beta, \eta_0 = \|Tu\|$ and $\|T^*u'\| = \|T^*Tu\|/\eta_0$, and it is known that (1) is the best possible estimate¹⁰⁾ with these quantities.

4. As a simple example, let us consider the equation

$$(32) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

¹⁰⁾ KATO [6].

Let \mathfrak{H} be the set of square-integrable functions defined on $(0, 1)$ and let $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$. Set $Ty = dy/dx$ with the boundary condition $y(0) = y(1) = 0$. Then $T^* = -d/dx$ with no boundary condition and (32) can be written as $T^*Ty = \lambda^2 y$. Thus Theorem 2 is applicable. Let us estimate the smallest eigenvalue of $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$. For this purpose, we take as simple trial functions

$$u = \|v\|^{-1} v, \quad u' = \|v'\|^{-1} v',$$

$$v(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1/3), \\ 1/3 & (1/3 \leq x \leq 2/3), \\ 1 - x & (2/3 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad v'(x) = \begin{cases} 1/3 & (0 \leq x \leq 1/3), \\ 1/2 - x & (1/3 \leq x \leq 2/3), \\ -1/3 & (2/3 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

These functions have piecewise continuous derivatives of first order, and hence belong to \mathfrak{D}_T and \mathfrak{D}_{T^*} respectively. It will be noted that $u'(x)$ is obtained by translation of $u(x)$ by the distance $1/3$, after having extended $u(x)$ as an odd periodic function with period 2. We obtain

$$\eta_0 = 3.150, \quad \|Tu\|^2 = \|T^*u'\|^2 = 10.80, \quad \varepsilon_0^2 = 0.88.$$

As the quantity β we can take any rough lower bound of the third eigenvalue of $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, for the subset of $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ consisting of all pairs $\{u, u'\}$ such that $u(x)$ is symmetric and $u'(x)$ is anti-symmetric with respect to the point $x = 1/2$ reduces the operator H . If we take as β the exact value, 3π , of the third eigenvalue, we obtain by (28) with $v = 0$

$$\lambda_0 \geq 3.150 - 0.88 (3\pi - 3.15)^{-1} = 3.01.$$

An upper bound is given by RAYLEIGH's principle as $\lambda_0 \leq \|Tu\| = 3.29$. The correct value is $\lambda_0 = \pi$. It will be noted that Theorem A applied to T^*T is useless for our trial function u , for u does not belong to the domain of T^*T and hence ε^2 is not finite.

Bibliography.

- [1] COURANT, R., und HILBERT, D.: Methoden der Mathematischen Physik, I, 2. Aufl., Berlin 1931, pp. 199—209. — [2] DIAZ, J. B., and GREENBERG, H. J.: Upper and lower bounds for the solution of the first biharmonic boundary value problem, J. Math. Phys. **27**, 193—201 (1948). — [3] FRIEDRICHS, K.: Ein Verfahren der Variationsrechnung, Göttinger Nachr. 1929, 13—20. — [4] FRIEDRICHS, K.: On differential operators in Hilbert spaces, Amer. J. Math. **61**, 523—544 (1939). — [5] GREENBERG, H. J.: The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem, J. Math. Phys. **27**, 161—182 (1948). — [6] KATO, T.: On the upper and lower bounds of eigenvalues, J. Phys. Soc. Japan **4**, 334—339 (1949). — [7] KATO, T.: Perturbation theory of semi-bounded operators, Math. Ann. **125**, 435—447 (1953). — [8] MURRAY, F. J.: Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 301—338 (1935). — [9] NEUMANN, J. VON: Über adjungierte Funktionaloperatoren, Ann. of Math. **33**, 294—310 (1932). — [10] RAYLEIGH, LORD: On the theory of resonance, Phil. Trans. **161**, 77—118 (1870); Scientific Papers, Vol. I, pp. 33—75; Theory of Sound, Vol. II, §§ 305—308. — [11] TREFFTZ, E.: Konvergenz und Fehlerschätzung beim Ritzschen Verfahren, Math. Ann. **100**, 503—521 (1928). — [12] WEYL, H.: The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J. **7**, 411—444 (1940).

(Eingegangen am 28. Oktober 1952.)

Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen.

Von

REINHOLD REMMERT und KARL STEIN in Münster (Westf.).

Die Gestalt der Singularitätenmenge einer analytischen Funktion in einem Gebiete G des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen ($n > 1$) unterliegt bekanntlich speziellen einschränkenden Bedingungen. Nach F. HARTOGS und E. E. LEVI¹⁾ kann eine solche Singularitätenmenge \mathfrak{M} , falls sie in G analytisch, d. h. dort lokal durch analytische Gleichungen beschreibbar und abgeschlossen ist, niemals Komponenten von kleinerer als $(n-1)$ -ter Dimension²⁾ enthalten. Insbesondere gibt es im C^n keine isolierten Singularitäten analytischer Funktionen. Es ist bemerkenswert, daß entsprechende Aussagen auch für die wesentlichen Singularitäten von $(n-1)$ -dimensionalen Nullstellenflächen analytischer Funktionen und von allgemeineren analytischen Mengen im C^n gelten.

VON P. THULLEN wurde im Jahre 1934 in einer wichtigen Arbeit bewiesen³⁾: *Ist eine rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge \mathfrak{M}^{n-1} in einer Umgebung einer irreduziblen $(n-1)$ -dimensionalen analytischen Menge \mathfrak{F}^{n-1} außerhalb \mathfrak{F}^{n-1} gegeben, so ist \mathfrak{M}^{n-1} entweder in alle Punkte von \mathfrak{F}^{n-1} oder in keinen Punkt von \mathfrak{F}^{n-1} hinein analytisch fortsetzbar.* Entweder ist also jeder Punkt oder kein Punkt von \mathfrak{F}^{n-1} wesentlich singulärer Randpunkt von \mathfrak{M}^{n-1} . Daraus folgt, daß die Punkte einer nirgends $(n-1)$ -dimensionalen analytischen Menge \mathfrak{F} höchstens unwesentliche Randpunkte einer außerhalb von \mathfrak{F} gegebenen rein $(n-1)$ -dimensionalen analytischen Menge sein können⁴⁾.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die THULLENSchen Ergebnisse auf analytische Mengen beliebiger Dimension erweitert werden können. Als Hauptresultat (das wir hier zwecks einfacher Formulierung etwas spezialisiert wiedergeben) erhalten wir: *Ist \mathfrak{F}^k ($k < n$) eine k -dimensionale irreduzible analytische Menge im Gebiete G des C^n und \mathfrak{M}^k eine rein k -dimensionale analytische*

¹⁾ Vgl. hierzu: H. BEHNKE und P. THULLEN, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen; Ergeb. der Math. 3, 3 (1934), insbesondere Kap. IV sowie die dort angegebenen Hinweise auf die Originalliteratur.

²⁾ Die Dimension d einer nichtleeren analytischen Menge \mathfrak{M} im C^n ist eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., n (vgl. Abschn. 1); die topologische Dimension d' ist gleich $2d$.

³⁾ P. THULLEN, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen; Math. Ann. 111, 137—157 (1935).

⁴⁾ Weitere Resultate über die Fortsetzung analytischer Mengen und die Verteilung ihrer wesentlichen Singularitäten wurden von W. ROTHSTEIN erzielt: Die Existenz irreduzibler analytischer Flächen, welche sich über den Rand eines gegebenen Regularitätsbereiches nicht fortsetzen lassen; Arch. d. Math. 1, 205—211 (1948/49), ferner: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R_{2n} ($n \geq 3$); Math. Ann. 121, 340—355 (1950).

Menge in $G - \mathfrak{F}^k$, so ist entweder die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}^k}$ von \mathfrak{M}^k in G eine im Gesamtgebiet G rein k -dimensionale analytische Menge, oder \mathfrak{M}^k besitzt jeden Punkt von \mathfrak{F}^k als wesentlich singulären Randpunkt.

Zum Beweise dieser Aussage sind verhältnismäßig umfangreiche Vorbereitungen erforderlich. In zwei Abschnitten stellen wir zunächst Begriffe und später benötigte Sätze allgemeiner und spezieller Art über analytische Mengen zusammen. Wir sind bestrebt, uns nur auf solche Aussagen zu stützen, deren Beweise vollständig durchgeführt sind. Soweit wir uns nicht auf die Literatur beziehen können (was nur zum Teil möglich ist), werden ausführliche Begründungen gegeben. — Abschnitt 1 enthält Sätze über die lokale Darstellung und die Dimension einer analytischen Menge. Zugrunde gelegt ist eine für unsere Zwecke besonders bequeme Erklärung des Dimensionsbegriffes für analytische Mengen. Abschnitt 2 behandelt globale Eigenschaften analytischer Mengen. Im 3. Abschnitt wird als Hauptsatz die Erweiterung des THULLENSCHEN Satzes bewiesen. Einige Folgerungen werden angeschlossen. Es wird ferner eine Bedingung angegeben, unter der eine analytische Menge \mathfrak{M} in einen Punkt P einer analytischen Ausnahmemenge \mathfrak{F} hinein analytisch fortsetzbar ist.

Nach dem Hauptsatz kann eine analytische Menge ohne nulldimensionale Bestandteile keine isolierten Punkte als wesentliche Singularitäten besitzen. Daraus ergibt sich nach H. CARTAN ein einfacher Beweis des Satzes von W. L. CHOW⁵⁾, daß eine analytische Menge \mathfrak{M} des komplex-projektiven Raumes stets eine algebraische Menge ist. Dies wird im Abschnitt 4, der Anwendungen auf analytische Kegelmengen enthält, durchgeführt; es wird dort ferner ein von H. CARTAN⁶⁾ herrührender Beweis eines Satzes über homogene Ideale analytischer Funktionen angegeben.

1. Dimension und lokale Eigenschaften analytischer Mengen. — Eine Punktmenge \mathfrak{M} eines Gebietes G des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen heißt *analytische Menge im Punkte $P \in G$* , wenn es eine Umgebung $U(P) \subset G$ und endlich viele in $U(P)$ reguläre Funktionen f_1, \dots, f_s gibt, so daß $\mathfrak{M} \cap U(P)$ genau aus den gemeinsamen Nullstellen der Funktionen f_1, \dots, f_s besteht.

Eine Punktmenge \mathfrak{M} eines Gebietes G des C^n heißt *analytische Menge in G* , wenn sie in jedem Punkt $P \in G$ analytisch ist.

Eine analytische Menge besteht also im kleinen aus der Nullstellengesamtheit endlich vieler regulärer Funktionen. Dabei ist unwesentlich, daß man sich

⁵⁾ W. L. CHOW, On compact analytic varieties; Amer. Journ. Math. 71, 893—914 (1949); ferner: H. KNESER, Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum; Math. Nachr. 4, 382—391 (1950/51), wo ein weiterer Beweis für den CHOWschen Satz gegeben wird; und H. CARTAN, Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes; Proc. Intern. Congr. of Math. 1950, vol. 1, 152 bis 164. — Auf die Möglichkeit, zum Beweise des Satzes von CHOW die in der vorliegenden Arbeit bewiesene Verallgemeinerung des Satzes von THULLEN heranzuziehen, wurden wir von Herrn H. CARTAN in einem Briefe vom 14. 2. 1950 aufmerksam gemacht.

⁶⁾ Nach einer brieflichen Mitteilung vom 11. 1. 1952, auf die wir uns mit freundlicher Erlaubnis von Herrn H. CARTAN stützen.

auf endlich viele Funktionen beschränkt, denn nach dem RÜCKERT-CARTAN-schen Idealbasissatz^{6a)} kann jedes im kleinen gegebene System regulärer Funktionen durch ein endliches System regulärer Funktionen ersetzt werden, welches dieselben Nullstellen hat.

Um anzudeuten, daß die analytische Menge \mathfrak{M} im Gebiete G des C^n betrachtet wird, schreiben wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_G$. Interessiert uns \mathfrak{M} nur hinsichtlich seiner Analytizität im Punkte $P \in G$, so schreiben wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_P$.

Eine in einem Punkt P analytische Menge ist stets in einer ganzen Umgebung $U(P)$ analytisch. Eine analytische Menge \mathfrak{M}_G ist stets abgeschlossen in G . \mathfrak{M}_G kann leer sein.

Es ist zweckmäßig, die Menge aller in einem Punkt $P \in C^n$ analytischen Mengen \mathfrak{M}_P zu Klassen, den analytischen Keimen, zusammenzufassen.

Der Begriff des Keimes kann in jedem topologischen Raum R erklärt werden, indem man folgende Äquivalenzrelation in der Menge aller Teilmengen von R einführt:

Ist $P \in R$ ein fester Punkt, so heißen die Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ von R äquivalent in bezug auf P , wenn es eine Umgebung $U(P)$ gibt, so daß gilt:

$$\mathfrak{M}_1 \cap U(P) = \mathfrak{M}_2 \cap U(P).$$

Damit ist eine Äquivalenzrelation und mithin eine Klasseneinteilung in der Menge aller Teilmengen von R erklärt. Die Klassen dieser Einteilung heißen *Keime in P* .

Die Mengenkeime in P bilden einen Verband, wenn man die Vereinigung \cup bzw. den Durchschnitt \cap zweier solcher Keime als Klasse der Vereinigung bzw. Klasse des Durchschnitts beliebiger Repräsentanten der Keime erklärt. Die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der Repräsentanten ist trivial.

Ein Keim im Punkte P des C^n heißt *analytischer Keim in P* , wenn es einen Repräsentanten des Keimes gibt, der in P analytisch ist. Offenbar erzeugt jede in einem Gebiete G des C^n analytische Menge \mathfrak{M}_G in jedem Punkt $P \in G$ einen (evtl. leeren) analytischen Keim.

An den Begriff der analytischen Menge schließen sich unmittelbar folgende Begriffsbildungen an:

Die analytische Menge \mathfrak{M}_G heißt *reduzibel im Gebiete G* , wenn es zwei nicht-leere, von \mathfrak{M}_G verschiedene analytische Mengen \mathfrak{M}'_G und \mathfrak{M}''_G gibt, deren Vereinigung \mathfrak{M}_G ist. Andernfalls heißt \mathfrak{M}_G *irreduzibel im Gebiete G* .

Die analytische Menge \mathfrak{M}_G heißt *reduzibel im Punkte $P \in G$* , wenn es eine Umgebung $U(P) \subseteq G$ gibt mit folgender Eigenschaft: Die Menge $\mathfrak{M}_G \cap U(P)$ ist die Vereinigung zweier in $U(P)$ analytischer, den Punkt P enthaltenden

^{6a)} W. RÜCKERT, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, Math. Ann. 107, 259–281 (1933); H. CARTAN, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 61, 179–197 (1944), Appendice I.

⁷⁾ Zum Begriff des Keimes vergleiche: H. HERMES, Analytische Mannigfaltigkeiten in RIEMANNschen Bereichen, Math. Ann. 120, 539–562 (1947/49); H. CARTAN, a. a. O.^{6a)}, Appendice II; H. KNESER, Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum, Math. Nachr. 4, 382–391 (1950/51) sowie: Séminaire H. CARTAN, Paris 1951–52, Exposé XIII.

Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, derart, daß in keiner Umgebung $V(P) \subseteq U(P)$ die Menge $\mathfrak{M}_G \cap V(P)$ mit $\mathfrak{M}_1 \cap V(P)$ oder $\mathfrak{M}_2 \cap V(P)$ übereinstimmt. Andernfalls heißt \mathfrak{M}_G *irreduzibel* in $P \in G$.

Ein in P analytischer Keim heißt *reduzibel* bzw. *irreduzibel*, wenn es einen analytischen Repräsentanten gibt, der in P reduzibel bzw. irreduzibel ist. Irreduzible analytische Keime heißen *analytische Primkeime*.

Eine in G irreduzible analytische Menge \mathfrak{M}_G kann sehr wohl in einem Punkte $P \in G$ reduzibel sein.

Aus der Gültigkeit des Idealbasissatzes im Ringe der in einem Punkt regulären Funktionen folgt in bekannter Weise der

Satz über die lokale Zerlegung analytischer Mengen: Zu jedem Punkte P einer analytischen Menge \mathfrak{M}_G gibt es eine Umgebung $U(P) \subseteq G$, derart, daß $\mathfrak{M}_G \cap U(P)$ darstellbar ist als Vereinigung von endlich vielen, in $U(P)$ analytischen, in P irreduziblen Mengen \mathfrak{M}_μ ($\mu = 1, \dots, m$). Dabei ist für jede Umgebung $V(P) \subseteq U(P)$ niemals ein $\mathfrak{M}_{\mu_0} \cap V(P)$ ($\mu_0 = 1, \dots, m$) im Durchschnitt von $V(P)$ mit der Vereinigung der übrigen \mathfrak{M}_μ enthalten.

Ist in einer Umgebung $U'(P) \subseteq G$ eine zweite Zerlegung von $\mathfrak{M}_G \cap U'(P)$ in analytische Mengen \mathfrak{M}'_ρ ($\rho = 1, \dots, r$) mit den entsprechenden Eigenschaften gegeben, so ist $r = m$, und es gibt eine Umgebung $W(P) \subseteq U(P) \cap U'(P)$, derart, daß in $W(P)$ jedes \mathfrak{M}_μ mit einem \mathfrak{M}'_ρ identisch ist.

Für analytische Keime läßt sich dieser Zerlegungssatz einfacher formulieren:

Jeder analytische Keim ist eindeutig darstellbar als unverkürzbare Vereinigung von analytischen Primkeimen.

Ein Punkt P_0 einer analytischen Menge \mathfrak{M}_G heißt *gewöhnlicher Punkt* von \mathfrak{M}_G , wenn es eine Umgebung $U(P_0)$ und eine in $U(P_0)$ reguläre Koordinatentransformation gibt, so daß $\mathfrak{M}_G \cap U(P_0)$ in bezug auf die neuen Koordinaten gleich dem Durchschnitt von $U(P_0)$ mit einer analytischen Ebene ist.

Eine analytische Menge \mathfrak{M}_G ist in jedem gewöhnlichen Punkte irreduzibel.

Für die folgenden Überlegungen ist es bequem, den Begriff der *Dimension* einer analytischen Menge \mathfrak{M}_G in einem Punkte $P \in G$ — in Zeichen: $\dim_P(\mathfrak{M}_G)$ — wie folgt zu fassen:

Ist $P \notin \mathfrak{M}_G$, so sei: $\dim_P(\mathfrak{M}_G) = -1$.

Ist $P \in \mathfrak{M}_G$, so betrachte man die Gesamtheit aller analytischen Ebenen des C^n , welche in einer Umgebung von P nur den Punkt P mit \mathfrak{M}_G gemeinsam haben.

Ist k das Maximum der Dimensionen aller dieser Ebenen^{*)}, so sei:

$$\dim_P(\mathfrak{M}_G) = n - k.$$

^{*)} Die Dimension einer analytischen Ebene \mathfrak{E} des C^n sei wie üblich erklärt: Wird \mathfrak{E} durch das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} z_\nu = b_\mu, \quad \mu = 1, \dots, m; \quad m \leq n$$

beschrieben, dessen Koeffizientenmatrix $(a_{\mu\nu})$ den Rang ϱ hat, so heißt $n - \varrho$ die Dimension von \mathfrak{E} . Insbesondere ist eine analytische Ebene der Dimension 0 ein Punkt.

Die Dimension einer analytischen Menge \mathfrak{M}_G schlechthin wird erklärt durch

$$\dim(\mathfrak{M}_G) = \max_{P \in G} (\dim_P(\mathfrak{M}_G))^9).$$

\mathfrak{M}_G heißt *rein-dimensional* in G , wenn \mathfrak{M}_G in allen Punkten $P \in \mathfrak{M}_G$ dieselbe Dimension hat.

Ein in P analytischer Keim heißt *k-dimensional*, wenn ein analytischer Repräsentant des Keimes in P *k-dimensional* ist.

Die Invarianz der Dimension einer analytischen Menge \mathfrak{M}_G in einem Punkte P gegenüber eindeutigen linearen Transformationen ist offensichtlich; zum Nachweis der Invarianz gegenüber beliebigen in P regulären eindeutigen Transformationen sind Vorbereitungen erforderlich.

Wir beweisen zunächst

Satz 1 (Einbettungssatz): \mathfrak{M} sei eine analytische Menge im Gebiete G des C^n ; der Punkt $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ liege auf \mathfrak{M} . Die analytische Ebene

$$\mathbb{E}^{n-k}: \{z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}\} \quad (1 \leq k < n)$$

habe in einer Umgebung von P_0 nur den Punkt P_0 mit \mathfrak{M} gemeinsam. Dann gibt es eine in G enthaltene Umgebung

$$U(P_0): \{|z_v - z_v^{(0)}| < \varepsilon_v \quad (v = 1, \dots, n)\}$$

und in $U(P_0)$ eine analytische Menge \mathfrak{M}' (Einbettungsmenge von \mathfrak{M} in $U(P_0)$) mit folgenden Eigenschaften:

1. \mathfrak{M}' gestattet in $U(P_0)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= (z_{k+1} - z_{k+1}^{(0)})^{j_{k+1}} + \\ &\vdots + A_{k+1}^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) \cdot (z_{k+1} - z_{k+1}^{(0)})^{j_{k+1}-1} + \dots + A_0^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) &= (z_n - z_n^{(0)})^{j_n} + \\ &+ A_{n-1}^{(n)}(z_1, \dots, z_k) \cdot (z_n - z_n^{(0)})^{j_n-1} + \dots + A_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_1(z_1, \dots, z_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_r(z_1, \dots, z_k) = 0.$$

Dabei sind die Funktionen $A_{\lambda_n - \sigma}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_k)$ ($\sigma = 1, \dots, \lambda_n$; $\alpha = k+1, \dots, n$) und $\varphi_\varrho(z_1, \dots, z_k)$ ($\varrho = 1, \dots, r$) im Polyzylinder

$$Z^k: \{|z_\mu - z_\mu^{(0)}| < \varepsilon_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k)\}$$

des Raumes der Veränderlichen z_1, \dots, z_k regulär, und es ist stets

$$A_{\lambda_n - \sigma}^{(\alpha)}(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) = 0, \quad \varphi_\varrho(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) = 0.$$

Die Pseudopolynome $\omega_\alpha(z_\alpha; z_1, \dots, z_k)$ besitzen in P_0 keine mehrfachen Faktoren. Alle Wurzeln $z_\alpha(z_1, \dots, z_k)$ von $\omega_\alpha(z_\alpha; z_1, \dots, z_k) = 0$ liegen für $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k$ in $|z_\alpha - z_\alpha^{(0)}| < \varepsilon_\alpha$.

⁹⁾ Es ist klar, daß diese Erklärung für analytische Ebenen wieder die Dimension im Sinne von ⁸⁾ liefert. — Die Definition ist selbstverständlich nur für *analytische*, nicht aber für beliebige Mengen im C^n brauchbar.

2. Es gilt

$$\mathfrak{M} \cap U(P_0) \subseteq \mathfrak{M}'.$$

3. Zu jedem Lösungs- k -Tupel (z'_1, \dots, z'_k) mit $|z'_\mu - z_\mu^{(0)}| < \varepsilon_\mu$ ($\mu = 1, \dots, k$) des Gleichungssystems

$$\varphi_1(z_1, \dots, z_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_r(z_1, \dots, z_k) = 0$$

gehört wenigstens ein Punkt $\tilde{P}(z_1, \dots, \tilde{z}_n)$ von \mathfrak{M} aus $U(P_0)$ mit $\tilde{z}_1 = z'_1, \dots, \tilde{z}_k = z'_k$.

Beweis: Wir wenden vollständige Induktion nach der Variablenzahl n an.

Angenommen, die Richtigkeit des Satzes stehe für $n-1$ bereits fest. (Der Induktionsbeginn wird sich im folgenden mitergeben.) \mathfrak{M} sei in einer Umgebung $V(P_0)$ gegeben durch die Gleichungen

$$(I) \quad f_j(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, s).$$

In einer geeigneten Umgebung $V'(P_0)$, die in $V(P_0)$ enthalten ist, hat \mathfrak{M} mit der Ebene $z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}$ nur den Punkt P_0 gemeinsam. Die Gleichungen

$$\psi_j(z_{k+1}, \dots, z_n) = f_j(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}, z_{k+1}, \dots, z_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, s)$$

haben also in $V'(P_0)$ nur $z_{k+1} = z_{k+1}^{(0)}, \dots, z_n = z_n^{(0)}$ als gemeinsame Lösung. Mithin können die Funktionen

$$\Psi_j(z_n) = f_j(z_1^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)}, z_n) \quad (j = 1, \dots, s)$$

nicht alle identisch verschwinden. Sei etwa $f_1(z_1^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)}, z_n) \not\equiv 0$. Nach dem WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz¹⁰⁾ läßt sich dann in einer geeigneten Umgebung von P_0 die Gleichung $f_1(z_1, \dots, z_n) = 0$ im Gleichungssystem (I) ersetzen durch eine Gleichung

$$\Omega(z_n; z_1, \dots, z_{n-1}) = (z_n - z_n^{(0)})^l + \sum_{i=1}^{\lambda} B_{l-i}(z_1, \dots, z_{n-1}) (z_n - z_n^{(0)})^{l-i} = 0;$$

dabei ist $B_{l-i}(z_1^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)}) = 0$ ($l = 1, \dots, \lambda$); ferner darf angenommen werden, daß in der für eine geeignete Umgebung

$$\tilde{V}(P_0) : \{|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta_\nu, \nu = 1, \dots, n\} \quad (\tilde{V}(P_0) \subseteq V'(P_0))$$

gültigen Primfaktorzerlegung $\Omega = \Omega_1 \cdot \dots \cdot \Omega_m$ von Ω , wo

$$\Omega_\mu = (z_n - z_n^{(0)})^{\lambda_\mu} + \sum_{i=1}^{\lambda_\mu} C_{i,\mu}^{(\lambda_\mu)}(z_1, \dots, z_{n-1}) \cdot (z_n - z_n^{(0)})^{\lambda_\mu-i} \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

alle Faktoren voneinander verschieden sind und daß für

$$\{|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta_\nu, \nu = 1, \dots, n-1\}$$

alle Wurzeln $z_n^{(l)}(z_1, \dots, z_{n-1})$ ($l = 1, \dots, \lambda$) von $\Omega(z_n; z_1, \dots, z_{n-1}) = 0$ in $|z_n - z_n^{(0)}| < \delta_n$ liegen.

Sei nun Z^{n-1} der $(n-1)$ -dimensionale Polyzylinder

$$\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \delta_1, \dots, |z_{n-1} - z_{n-1}^{(0)}| < \delta_{n-1}\}$$

¹⁰⁾ Vgl. W. F. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1 (1929), S. 86.

im Raume der Veränderlichen z_1, \dots, z_{n-1} und \mathfrak{D} die Diskriminantenfläche von Ω , d. h. die Menge der Nullstellen der Diskriminante D von Ω in Z^{n-1} . (Wegen unserer Voraussetzung über Ω ist sicher $D \not\equiv 0$).

Wird dann (z_1, \dots, z_{n-1}) beliebig in $Z^{n-1} - \mathfrak{D}$ gewählt, so sind alle Wurzeln $z_n^{(l)}(z_1, \dots, z_{n-1})$ voneinander verschieden. Die $z_n^{(l)}(z_1, \dots, z_{n-1})$ hängen in $Z^{n-1} - \mathfrak{D}$ ferner regulär analytisch von z_1, \dots, z_{n-1} ab; sie lassen sich innerhalb $Z^{n-1} - \mathfrak{D}$ uneingeschränkt regulär fortsetzen und bleiben bei Annäherung an \mathfrak{D} beschränkt.

Wir führen nun Unbestimmte u_2, \dots, u_s ein und bilden

$$\zeta^{(l)} = \sum_{j=2}^s u_j \cdot f_j(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n^{(l)}(z_1, \dots, z_{n-1}))$$

und weiter

$$H(u_2, \dots, u_s; z_1, \dots, z_{n-1}) = \prod_{l=1}^{\lambda} \zeta^{(l)}.$$

H ist ein homogenes Polynom in u_2, \dots, u_s , dessen Koeffizienten $g_1(z_1, \dots, z_{n-1}), \dots, g_t(z_1, \dots, z_{n-1})$ in $Z^{n-1} - \mathfrak{D}$ reguläre Funktionen von z_1, \dots, z_{n-1} sind.

Die g_1, \dots, g_t bleiben darüber hinaus in $Z^{n-1} - \mathfrak{D}$ eindeutig und lassen sich regulär in ganz Z^{n-1} hinein fortsetzen. Denn $H(u_2, \dots, u_s; z_1, \dots, z_{n-1})$ bleibt in $Z^{n-1} - \mathfrak{D}$ eindeutig, da sich bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges die $\zeta^{(l)}$ höchstens untereinander vertauschen; ferner bleiben die $f_j(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n^{(l)}(z_1, \dots, z_{n-1}))$ und damit auch die g_1, \dots, g_t bei Annäherung an \mathfrak{D} beschränkt. Nach einem RIEMANNschen Satze über hebbare Singularitäten¹¹⁾ lassen sich daher die g_1, \dots, g_t in alle Punkte von \mathfrak{D} hinein eindeutig regulär fortsetzen.

Wir betrachten jetzt in Z^{n-1} das Gleichungssystem

$$(II) \quad g_1(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0, \dots, g_t(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0.$$

Es hat folgende Eigenschaften:

a) Ist (z'_1, \dots, z'_n) eine Lösung des Systems (I) mit $|z'_v - z_v^{(0)}| < \delta_v$ ($v = 1, \dots, n$), so ist (z'_1, \dots, z'_{n-1}) eine Lösung von (II). — Denn sicher verschwindet

$\zeta' = \sum_{j=2}^s u_j \cdot f_j(z'_1, \dots, z'_{n-1}, z'_n)$, also verschwindet $H(u_2, \dots, u_s; z_1, \dots, z'_{n-1})$ und damit verschwinden auch alle $g_t(z'_1, \dots, z'_{n-1})$.

b) Jede Lösung $(z'_1, \dots, z'_{n-1}) \in Z^{n-1}$ von (II) kann durch Hinzunahme eines geeigneten z'_n mit $|z'_n - z_n^{(0)}| < \delta_n$ zu einer Lösung von (I) ergänzt werden. Sind nämlich $z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(\lambda)}$ die (nicht notwendig sämtlich untereinander verschiedenen) Lösungen von $\Omega(z_n; z'_1, \dots, z'_{n-1}) = 0$ (es gilt $|z_n^{(l)} - z_n^{(0)}| < \delta_n$ für $l = 1, \dots, \lambda$), so muß wegen $H(u_2, \dots, u_s; z'_1, \dots, z'_{n-1}) = 0$ wenigstens ein $\zeta^{(l)} = \sum_{j=2}^s u_j \cdot f_j(z'_1, \dots, z'_{n-1}, z_n^{(l)})$ verschwinden. Daher verschwinden alle $f_j(z'_1, \dots, z'_{n-1}, z_n^{(l)})$ für wenigstens ein l .

¹¹⁾ Vgl. W. F. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie II, I (1929), S. 186.

Ist nun $n = 2$ (Induktionsbeginn) oder $n > 2$, $k = n - 1$, so ist die durch das Gleichungssystem

$$(III) \quad \begin{aligned} \Omega(z_n; z_1, \dots, z_{n-1}) &= 0 \\ g_1(z_1, \dots, z_{n-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ g_t(z_1, \dots, z_{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$

in $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) gegebene analytische Menge ein \mathfrak{M}' von der gesuchten Art.

Ist aber $n > 2$ und $1 \leq k < n - 1$, so erfüllt die im Gebiete Z^{n-1} des Raumes der Veränderlichen z_1, \dots, z_{n-1} durch

$$(IV) \quad \begin{aligned} g_1(z_1, \dots, z_{n-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ g_t(z_1, \dots, z_{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$

gegebene analytische Menge $\ast\mathfrak{M}$ dort die Voraussetzung unseres Satzes: Die Ebene $z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}$ schneidet $\ast\mathfrak{M}$ innerhalb Z^{n-1} nur in $\ast P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher in einer geeigneten Umgebung

$$\tilde{Z}^{n-1} : \{|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \varepsilon_\nu, \nu = 1, \dots, n-1\} \quad (\varepsilon_\nu \leq \delta_\nu)$$

von $(z_1^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)})$ eine analytische Menge $\ast\mathfrak{M}'$, die dort in bezug auf $\ast\mathfrak{M}$ der Aussage unseres Satzes genügt. $\ast\mathfrak{M}'$ werde in \tilde{Z}^{n-1} gegeben durch Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ \omega_{n-1}(z_{n-1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \varphi_1(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi_r(z_1, \dots, z_k) &= 0, \end{aligned}$$

wo die $\omega_\alpha(z_\alpha; z_1, \dots, z_k)$ in $Z^k: \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\}$ reguläre Pseudopolynome sind, die für $(z_\alpha^{(0)}; z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)})$ verschwinden, dort keine mehrfachen Faktoren besitzen und deren sämtliche Wurzeln für $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k$ in $|z_\alpha - z_\alpha^{(0)}| < \varepsilon_\alpha$ liegen.

Die (nicht notwendig sämtlich voneinander verschiedenen) Wurzeln von $\omega_\alpha(z_\alpha; z_1, \dots, z_k) = 0$ ($\alpha = k+1, \dots, n-1$) für $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k$ seien $z_\alpha^{(\sigma_\alpha)}(z_1, \dots, z_k)$. Wir bilden

$$\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = \prod_{\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n-1}} \Omega(z_n; z_1, \dots, z_k, z_{k+1}^{(\sigma_{k+1})}, \dots, z_{n-1}^{(\sigma_{n-1})}),$$

wo das Produkt über alle Kombinationen der $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n-1}$ zu erstrecken ist. ω_n ist ein Pseudopolynom in bezug auf z_n ; wie oben ergibt sich, daß seine Koeffizienten eindeutig reguläre Funktionen von z_1, \dots, z_k in Z^k sind. Alle Wurzeln von $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$ für $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k$ liegen ferner in $|z_n - z_n^{(0)}| < \delta_n$, denn entsprechendes gilt für die Nullstellen von $\Omega(z_n; z_1, \dots, z_k, z_{k+1}^{(\sigma_{k+1})}, \dots, z_{n-1}^{(\sigma_{n-1})})$.

Wie unmittelbar ersichtlich, ist nun die durch

$$\begin{aligned}\omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \varphi_1(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ \varphi_r(z_1, \dots, z_k) &= 0\end{aligned}$$

in $\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n (= \delta_n)\}$ gegebene analytische Menge eine Menge \mathfrak{M}' der beschriebenen Art.

Bemerkung: Ist \mathfrak{M} in P_0 irreduzibel, so können die Pseudopolynome ω_n zusätzlich als in P_0 irreduzibel gewählt werden. — Bestehen nämlich für zunächst vorliegende ω_n in einer in $U(P_0)$ enthaltenen Polyzylinderumgebung $U'(P_0)$ die Zerlegungen

$$\omega_n = \omega_n^{(1)} \cdot \dots \cdot \omega_n^{(r_n)} \quad (n = k+1, \dots, n),$$

mit in $U'(P_0)$ regulären, in P_0 irreduziblen ausgezeichneten Pseudopolynomen $\omega_n^{(r_n)}$, so ist $\mathfrak{M}' \cap U'(P_0)$ die Vereinigung der durch

$$\omega_{k+1}^{(j_{k+1})} = 0, \dots, \omega_n^{(j_n)} = 0, \quad \varphi_1 = 0, \dots, \varphi_r = 0$$

in $U'(P_0)$ gegebenen analytischen Mengen $\mathfrak{M}_{j_{k+1}, \dots, j_n}$, wo j_{k+1}, \dots, j_n alle möglichen Indexkombinationen durchläuft. Da \mathfrak{M} in P_0 irreduzibel ist, so gibt es eine in $U'(P_0)$ enthaltene Polyzylinderumgebung

$$U^*(P_0) : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1^*, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n^*\}$$

und eine Indexkombination j_{k+1}', \dots, j_n' , derart, daß $\mathfrak{M} \cap U^*(P_0)$ in $\mathfrak{M}_{j_{k+1}', \dots, j_n'} \cap U^*(P_0)$ enthalten ist. Dabei können die ε_n^* insbesondere noch so gewählt werden, daß für $U^*(P_0)$ und $\mathfrak{M}_{j_{k+1}', \dots, j_n'} \cap U^*(P_0)$ an Stelle von $U(P_0)$ und \mathfrak{M}' die Aussagen des Satzes 1 gelten.

Zusatz I: Ist \mathfrak{M} in P_0 k -dimensional, so gilt zusätzlich:

4. Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ verschwinden identisch. Allgemeiner gilt: Umfaßt irgendeine in $U(P_0)$ durch Gleichungen der Gestalt

$$\tilde{\omega}_n(z_n; z_1, \dots, z_k) \equiv (z_n - z_n^{(0)})^{\tilde{\lambda}_n} + \sum_{l=1}^{\tilde{\lambda}_n} E_{\tilde{\lambda}_n - l}^{(-n)}(z_1, \dots, z_k) \cdot (z_n - z_n^{(0)})^{\tilde{\lambda}_n - l} = 0$$

($n = k+1, \dots, n$)

$$\psi_\tau(z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (\tau = 1, \dots, t)$$

mit in $Z^k : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\}$ regulären Funktionen $E_{\tilde{\lambda}_n}^{(-n)}(z_1, \dots, z_k)$, $\psi_\tau(z_1, \dots, z_k)$ dargestellte analytische Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ in $U(P_0)$ eine in $U(P_0)$ analytische und in P_0 k -dimensionale Menge $^*\mathfrak{M}$, so verschwinden die Funktionen $\psi_\tau(z_1, \dots, z_k)$ ($\tau = 1, \dots, t$) identisch.

5. Ist (z_1^*, \dots, z_k^*) irgendein k -Tupel aus Z^k , das nicht der Vereinigung \mathfrak{B} der Diskriminantenflächen der (die Einbettungsmenge \mathfrak{M}' beschreibenden) Pseudopolynome $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ im Raum O^k der Veränderlichen z_1, \dots, z_k ange-

hört, so gibt es in $U(P_0)$ stets wenigstens einen auf \mathfrak{M} liegenden Punkt $P^*(z_1^*, \dots, z_k^*, z_{k+1}^*, \dots, z_n^*)$ sowie eine in $U(P_0)$ enthaltene Umgebung $U(P^*)$, derart, daß gilt: $\mathfrak{M} \cap U(P^*) = \mathfrak{M}' \cap U(P^*)$.

Beweis: Zu 4. Es genügt, die zweite Behauptung zu beweisen: Aus $*\mathfrak{M} \cap U(P_0) \subseteq \tilde{\mathfrak{M}} \cap U(P_0)$ folgt zunächst $\dim_{P_0}(*\mathfrak{M}) \leq \dim_{P_0}(\tilde{\mathfrak{M}})$. Würden nun die Funktionen $\psi_\tau(z_1, \dots, z_k)$ ($\tau = 1, \dots, t$) nicht sämtlich identisch verschwinden, so gäbe es in jeder Umgebung des Punktes $\bar{P}_0(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)})$ im Raum C^k der Veränderlichen z_1, \dots, z_k Punkte $Q'(z'_1, \dots, z'_k)$, so daß für wenigstens ein τ_0 $\psi_{\tau_0}(z'_1, \dots, z'_k) \neq 0$ wäre. Die durch \bar{P}_0 und die Q' laufenden 1-dimensionalen Verbindungsebenen haben dann jeweils in einer Umgebung von \bar{P}_0 nur den Punkt \bar{P}_0 selbst mit der durch

$$\psi_\tau(z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (\tau = 1, \dots, t)$$

bestimmten analytischen Menge \mathfrak{M} im C^k gemeinsam. Wir dürfen annehmen, daß eine solche Ebene durch

$$(V) \quad z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_{k-1} = z_{k-1}^{(0)}$$

im C^k gegeben wird (nötigenfalls ist eine lineare Transformation in den z_1, \dots, z_k durchzuführen). Fassen wir (V) andererseits als Gleichungssystem einer $(n - k + 1)$ -dimensionalen analytischen Ebene \mathfrak{E}^{n-k+1} im C^n auf, so folgt, daß $\tilde{\mathfrak{E}}^{n-k+1}$ in einer Nachbarschaft von P_0 lediglich den Punkt P_0 mit $\tilde{\mathfrak{M}}$ gemeinsam hat. Mithin wäre $\dim_{P_0}(\tilde{\mathfrak{M}}) \leq k - 1$, also erst recht $\dim_{P_0}(*\mathfrak{M}) \leq k - 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\dim_{P_0}(*\mathfrak{M}) = k$.

Zu 5. Es genügt, die Aussage 5. für ein einziges k -Tupel $Q^*(z_1^*, \dots, z_k^*)$ aus dem Polyzylinder

$$Z^k: \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\},$$

das \mathfrak{B} nicht angehört, nachzuweisen. Ist nämlich $P^*(z_1^*, \dots, z_k^*, z_{k+1}^*, \dots, z_n^*)$ ein zugehöriger Punkt im C^n , für den 5. zutrifft, so werden \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' in der geeignet gewählten Umgebung $U(P^*)$ gegeben durch

$$(VI) \quad \begin{aligned} z_{k+1} + B_{k+1}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ z_n + B_n(z_1, \dots, z_k) &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktionen $-B_n(z_1, \dots, z_k)$ stellen Wurzeln von $\omega_n(z_n, z_1, \dots, z_k)$ dar, die in jeden Punkt $Q'(z'_1, \dots, z'_k) \in Z^k - \mathfrak{B}$ regulär fortsetzbar sind. Bei dieser Fortsetzung entstehen stets Punkte $Q(z'_1, \dots, z'_k, -B_{k+1}(z'_1, \dots, z'_k), \dots, -B_n(z'_1, \dots, z'_k))$ von \mathfrak{M}' und \mathfrak{M} , und andere Punkte von \mathfrak{M}' oder \mathfrak{M} außer den so gewonnenen gibt es in der Nähe dieser Punkte nicht. Da überdies stets $|-B_n(z_1, \dots, z_k) - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n$ ($n = k+1, \dots, n$), so gilt also 5. für jedes nicht zu $Z^k - \mathfrak{B}$ gehörende k -Tupel, wenn 5. für Q^* gilt.

Ein Q^* mit zugehörigem P^* , so daß 5. erfüllt ist, existiert sicher: Sei $Q'(z'_1, \dots, z'_k)$ irgendein Punkt aus $Z^k - \mathfrak{B}$. Es gibt endlich viele Punkte $P^{(\tau)}(z'_1, \dots, z'_k, z_{k+1}^{(\tau)}, \dots, z_n^{(\tau)})$ ($\tau = 1, \dots, t$) mit $|z_n^{(\tau)} - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n$ ($n = k+1, \dots, n$),

die zu \mathfrak{M}' gehören; \mathfrak{M}' werde dort etwa durch

$$(VII) \quad \begin{aligned} z_{k+1} + B_{k+1}^{(r)}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ z_n + B_n^{(r)}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben, wobei angenommen werden darf, daß die $B_\nu^{(r)}$ sämtlich in einem festen in $Z^k - \mathfrak{B}$ enthaltenen Polyzylinder

$$'Z^k: \{|z_1 - z'_1| < \varepsilon', \dots, |z_k - z'_k| < \varepsilon'\}$$

regulär sind. Die durch (VII) in

$$''Z^n: \{|z_1 - z'_1| < \varepsilon', \dots, |z_k - z'_k| < \varepsilon' \mid |z_{k+1} - z_{k+1}^{(0)}| < \varepsilon_{k+1}, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$$

gegebenen Teile von \mathfrak{M}' seien mit \mathfrak{M}'_r bezeichnet; sie sind untereinander punktfremd, und ihre Vereinigung ist $\mathfrak{M}' \cap ''Z^n$. Zu jedem $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ aus $'Z^k$ gehört nach 3. wenigstens ein Punkt $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_n)$ von \mathfrak{M} , der zugleich einem \mathfrak{M}'_r angehört. Da die Anzahl der \mathfrak{M}'_r endlich ist, folgt, daß es ein τ_0 und ein Teilgebiet $'G^k$ von $'Z^k$ gibt, derart, daß diejenigen $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ aus $'G^k$, zu denen ein Punkt $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_n)$ von \mathfrak{M} auf \mathfrak{M}'_{τ_0} gehört, eine in $'G^k$ dichtliegende Menge $*G$ bilden. Wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{M} müssen dann $'G^k$ und $*G$ identisch sein. Jeder Punkt von $'G^k$ ist also ein gesuchter Punkt Q^* .

Wir führen folgende Sprechweisen ein:

Ein Punkt $P'(z'_1, \dots, z'_n)$ des Raumes C^n der Veränderlichen z_1, \dots, z_n heißt über dem Punkt $P(z_1, \dots, z_l)$ des Teilraumes C^l der Veränderlichen z_1, \dots, z_l ($l < n$) gelegen, wenn gilt: $z'_1 = z_1, \dots, z'_l = z_l$. — Unter der Projektion \mathfrak{A} einer Menge \mathfrak{M} des Raumes C^n der Veränderlichen z_1, \dots, z_n in die Menge \mathfrak{A} des Teilraumes C^l der Veränderlichen z_1, \dots, z_l ($l < n$) verstehen wir die Gesamtheit aller Punkte von \mathfrak{A} , über denen Punkte von C^n liegen.

Zusatz II: \mathfrak{M} sei in einer Umgebung von P_0 rein k -dimensional. Dann lassen sich $U(P_0)$ und die die Einbettungsmenge \mathfrak{M}' definierenden Pseudopolynome $\omega_\nu(z_n; z_1, \dots, z_k)$ ($\nu = k+1, \dots, n$) so wählen, daß außer 1.—5. folgendes zusätzlich gilt:

6. Die Projektion der analytisch \sim Menge $\mathfrak{M} \cap U(P_0)$ in den Raum C_n^{k+1} der Veränderlichen z_1, \dots, z_k, z_n stimmt genau mit der Nullstellenmenge \mathfrak{N}_n des Pseudopolynoms $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ im Gebiete

$$Z_n^{k+1}: \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$$

des Raumes C_n^{k+1} überein. Die ω_ν und \mathfrak{M}' sind durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

7. Ist $\tilde{P}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ irgendein Punkt von \mathfrak{M} in $U(P_0)$, der nicht über der Vereinigung \mathfrak{B} der Diskriminantenflächen der Pseudopolynome $\omega_\nu(z_n; z_1, \dots, z_k)$ im Raume C^k der Variablen z_1, \dots, z_k liegt, so gibt es eine in $U(P_0)$ enthaltene Umgebung $U(\tilde{P})$, so daß gilt: $\mathfrak{M} \cap U(\tilde{P}) = \mathfrak{M}' \cap U(\tilde{P})$.

Beweis: Wir können uns $U(P_0): \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$ von vornherein so gewählt denken, daß \mathfrak{M} dort rein k -dimensional ist und daß in

$U(P_0)$ die oben gewonnenen $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ in Primfaktoren zerlegt werden können:

$$\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = \omega_n^{(1)}(z_n; z_1, \dots, z_k) \cdot \dots \cdot \omega_n^{(g_n)}(z_n; z_1, \dots, z_k),$$

wobei jeweils $\omega_n^{(i)}(z_n; z_1, \dots, z_k)$ in bezug auf den Punkt $P_0^{(0)}(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}, z_n^{(0)})$ des Raumes C_n^{k+1} der Variablen z_1, \dots, z_k, z_n ein irreduzibles ausgezeichnetes Pseudopolynom ist, dessen Koeffizienten im Polyzylinder

$$Z^k: \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\}$$

reguläre Funktionen von z_1, \dots, z_k sind. Ist jetzt $\tilde{P}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_n)$ ein gemäß der Voraussetzung von 7. gewählter Punkt von \mathfrak{M} aus $U(P_0)$, so gilt für jedes $(k+1)$ -Tupel $(\tilde{z}_n, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k): \omega_n^{(\mu_n)}(\tilde{z}_n; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k) = 0$ für genau ein μ_n ($1 \leq \mu_n \leq g_n$). Jedem Punkte \tilde{P} der angegebenen Art ist so eindeutig ein Faktor von $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ zugeordnet. Es seien $\omega_n^{(i_1)}, \dots, \omega_n^{(i_s)}$ diejenigen Faktoren von ω_n , die wenigstens einem Punkte \tilde{P} , der wie angegeben gewählt ist, zugeordnet sind; sei

$$' \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = \omega_n^{(i_1)}(z_n; z_1, \dots, z_k) \cdot \dots \cdot \omega_n^{(i_s)}(z_n; z_1, \dots, z_k)$$

ihr Produkt; ferner \mathfrak{M}'' die durch

$$\begin{aligned} & \omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) = 0 \\ & \vdots \\ & \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0 \end{aligned}$$

in $U(P_0)$ bestimmte analytische Menge. Wir behaupten, daß \mathfrak{M}'' und die $' \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ an Stelle von \mathfrak{M}' und den $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ der Aussage des Zusatzes II in $U(P_0)$ genügen. Daß \mathfrak{M}'' die im Satz I und Zusatz I für \mathfrak{M}' angegebenen Eigenschaften 1., 3., 4. und 5. hat, ist unmittelbar ersichtlich. Zum Nachweis von 2. ($\mathfrak{M} \cap U(P_0) \subseteq \mathfrak{M}''$) sei $P^*(z_1^*, \dots, z_n^*)$ irgendein Punkt von \mathfrak{M} innerhalb $U(P_0)$. Die $(n-k)$ -dimensionale analytische Ebene $z_1 = z_1^*, \dots, z_k = z_k^*$ schneidet \mathfrak{M}' , also auch \mathfrak{M} , in der Nähe von P^* nur in P^* . Da \mathfrak{M} in P^* k -dimensional ist, so folgt, wenn wir Satz I und Zusatz I auf \mathfrak{M} in P^* anstatt in P_0 anwenden, daß zu jedem k -Tupel (z'_1, \dots, z'_k) in genügender Nähe von (z_1^*, \dots, z_k^*) wenigstens ein Punkt $P'(z'_1, \dots, z'_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ von \mathfrak{M} in der Nähe von P^* gehört. Alle diese P' gehören zu \mathfrak{M}' ; sie gehören sogar zu \mathfrak{M}'' , wenn (z'_1, \dots, z'_k) nicht der Menge \mathfrak{B} angehört. In beliebiger Nähe von (z_1^*, \dots, z_k^*) lassen sich aber solche k -Tupel (z'_1, \dots, z'_k) wählen. P^* ist daher Häufungspunkt von Punkten auf \mathfrak{M}'' , liegt also wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{M}'' selbst auf \mathfrak{M}'' .

Folglich gilt $\mathfrak{M} \cap U(P_0) \subseteq \mathfrak{M}''$.

Zum Nachweis von 7. sei $\tilde{P}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ ein gemäß 7. gewählter Punkt von \mathfrak{M} . In einer Nachbarschaft von \tilde{P} ist \mathfrak{M}'' gegeben durch

$$\begin{aligned} & z_{k+1} + C_0^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \\ & \vdots \\ & z_n + C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k) = 0, \end{aligned} \quad \text{(VIII)}$$

wobei jeweils $z_n + C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ Linearfaktor eines bestimmten Faktors $\omega_n^{(j_n)}(z_n; z_1, \dots, z_k)$ von $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ ist. Da, wie soeben nachgewiesen, $\mathfrak{M} \cap U(P_0) \subseteq \mathfrak{M}''$ gilt und zu jedem k -Tupel (z'_1, \dots, z'_k) in genügender Nähe von $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ wenigstens ein Punkt $P'(z'_1, \dots, z'_k, z'_{k+1}, \dots, z'_n)$ von \mathfrak{M} in der Nähe von \tilde{P} gehört, muß notwendig auch \mathfrak{M} in der Nähe von \tilde{P} genau durch (VIII) dargestellt werden. Folglich stimmen \mathfrak{M} und \mathfrak{M}'' in einer Umgebung von \tilde{P} überein, und es gilt 7.

Die Funktionen $C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ sind für $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k - \mathfrak{B}$ uneingeschränkt regulär fortsetzbar (ohne dort notwendig eindeutig zu bleiben), und $z_n + C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ bleibt Linearfaktor von $\omega_n^{(j_n)}(z_n; z_1, \dots, z_k)$. Die durch (VIII) dargestellten Punkte $(z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ sind also stets Punkte von \mathfrak{M}'' ; sie sind aber auch Punkte von \mathfrak{M} , denn die \mathfrak{M} in $U(P_0)$ darstellenden Gleichungen $f_1(z_1, \dots, z_n) = 0, \dots, f_s(z_1, \dots, z_n) = 0$ werden durch die Einsetzungen

$$z_n = -C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k) \quad (n = k+1, \dots, n)$$

in einer Nachbarschaft von $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ identisch erfüllt, also verschwinden alle $f_n(z_1, \dots, z_k, -C_0^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k), \dots, -C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k))$ für beliebige $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k - \mathfrak{B}$ identisch. Wir setzen nun die Funktionen $C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ beliebig innerhalb $Z^k - \mathfrak{B}$ fort. Dabei gelangen wir zu jedem k -Tupel $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k - \mathfrak{B}$, denn \mathfrak{B} zerlegt Z^k als Nullstellenmenge einer einzigen nicht identisch verschwindenden in Z^k regulären Funktion $D(z_1, \dots, z_k)$ (Produkt der Diskriminanten der ω_n) nicht. Da $\omega_n^{(j_n)}(z_n; z_1, \dots, z_k)$ irreduzibel ist, so durchlaufen $z_1, \dots, z_k, z_n = -C_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ sogar alle Lösungs- $(k+1)$ -Tupel von $\omega_n^{(j_n)}(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$ mit $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k - \mathfrak{B}$, und zu jedem solchen $(k+1)$ -Tupel $(z'_1, \dots, z'_k, z'_n)$ gehört wenigstens ein Punkt (z_1, \dots, z_n) mit $z_1 = z'_1, \dots, z_k = z'_k, z_n = z'_n$ von \mathfrak{M} .

Wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{M} gehört dann aber auch zu jedem Lösungs- $(k+1)$ -Tupel $(z'_n, z'_1, \dots, z'_k)$ von $\omega_n^{(j_n)}(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$, falls (z'_1, \dots, z'_k) auf \mathfrak{B} liegt, ein Punkt (z_1, \dots, z_n) von \mathfrak{M} . Entsprechendes gilt für jedes Lösungs- $(k+1)$ -Tupel (z_n, z_1, \dots, z_k) jeder weiteren Gleichung $\omega_n^{(i)}(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$ ($i = i_1, \dots, i_n$), $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k - \mathfrak{B}$. Hierzu hat man nur an Stelle von \tilde{P} von einem Punkte $P^*(z'_1, \dots, z'_n)$ auszugehen, für den $\omega_n^{(i)}(z'_n; z'_1, \dots, z'_k) = 0$ ist. Die Nullstellenmenge \mathfrak{N}_n des Pseudopolynoms $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ im Gebiet

$$Z_n^{k+1}: \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$$

des Raumes C_n^{k+1} der Variablen z_1, \dots, z_k, z_n ist mithin genau die Projektion von $\mathfrak{M} \cap U(P_0)$ in den C_n^{k+1} . — Angenommen, es gäbe in einer zweiten Polyzylinderumgebung $U^*(P_0): \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1^*, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n^*\}$ eine durch Gleichungen

$$\begin{aligned} &^*\omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) = 0 \\ &\vdots \\ &^*\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0 \end{aligned}$$

dargestellte analytische Menge \mathfrak{M}'' , so daß \mathfrak{M}'' und die ω_ν in $U^*(P_0)$ (ebenso wie \mathfrak{M}'' und die ω_ν in $U(P_0)$) die in 6. angegebene Eigenschaft haben. Die Nullstellenmenge \mathfrak{N}_n^* von $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ stimmt dann in

$$*Z_n^{k+1} : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1^*, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k^*, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n^*\}$$

überein mit der Projektion von $\mathfrak{M} \cap U^*(P_0)$ in den C_n^{k+1} . Die ausgezeichneten Pseudopolynome $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ und $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ mit der Spitze in $Q_n^{(0)}(z_n^{(0)}, z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)})$ haben also in der Nähe von $Q_n^{(0)}$ die gleichen Nullstellen. Da ω_n keinen irreduziblen Faktor mehrfach enthält und gleiches von ω_n vorauszusetzen ist, müssen ω_n und ω_n nach bekannten Sätzen über Pseudopolynome identisch sein. Es ist demnach auch $\mathfrak{M}'' \cap U(P_0) \cap U^*(P_0) = \mathfrak{M}'' \cap U(P_0) \cap U^*(P_0)$, und Zusatz II ist vollständig bewiesen.

Bemerkung: Ist \mathfrak{M}_G in der Umgebung $U(P_0)$ rein $(n-1)$ -dimensional, so stimmt \mathfrak{M}_G in $U(P_0)$ mit der in Zusatz II konstruierten Einbettungsmenge, die in diesem Falle durch eine einzige Gleichung $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_{n-1}) = 0$ gegeben wird, wegen 6. überein.

Die folgende Aussage betrifft Eigenschaften von Einbettungsmengen.

Satz 2: \mathfrak{M}' sei eine nichtleere, analytische Menge im Punkte $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$, die in einer Polyzylinderumgebung

$$U(P_0) : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$$

durch die Pseudopolynomgleichungen

$$\omega_\kappa(z_\kappa; z_1, \dots, z_k) \equiv (z_\kappa - z_\kappa^{(0)})^{\lambda_\kappa} + \sum_{l=1}^{\lambda_\kappa} A_{\kappa-n-l}^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k) \cdot (z_\kappa - z_\kappa^{(0)})^l = 0$$

($\kappa = k+1, \dots, n$) gegeben ist. Die Funktionen $A_{\kappa-n-l}^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k)$ ($l = 1, \dots, \lambda_\kappa$; $\kappa = k+1, \dots, n$) seien im Polyzylinder $Z^k : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\}$ regulär, und es gelte stets $A_{\kappa-n-l}^{(\kappa)}(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) = 0$; ferner mögen die $\omega_\kappa(z_\kappa; z_1, \dots, z_k)$ in P_0 keine mehrfachen Faktoren haben, und für ihre Wurzeln $z_\kappa(z_1, \dots, z_k)$ gelte $|z_\kappa(z_1, \dots, z_k) - z_\kappa^{(0)}| < \varepsilon_\kappa$, falls $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k$.

Dann gibt es innerhalb einer jeden Umgebung $V(P_0)$ einen Polyzylinder

$$\tilde{U}(P_0) : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \tilde{\varepsilon}_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \tilde{\varepsilon}_n\}^{11a),}$$

derart, daß in $\tilde{U}(P_0)$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0) = \mathfrak{M}'_1 \cup \dots \cup \mathfrak{M}'_l$$

von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ in Mengen \mathfrak{M}'_λ ($\lambda = 1, \dots, l$) gilt, die in $\tilde{U}(P_0)$ analytisch und irreduzibel sind. Jede der Mengen \mathfrak{M}'_λ enthält eine maximale, zusammenhängende Teilmenge \mathfrak{M}_λ^* , die keinen Punkt über der Vereinigung \mathfrak{B} der Diskriminantenflächen der $\omega_\kappa(z_\kappa; z_1, \dots, z_k)$ im Raume C^k der Veränderlichen z_1, \dots, z_k besitzt (und folglich nur aus gewöhnlichen Punkten von \mathfrak{M}' besteht), derart, daß die abgeschlossene Hülle von \mathfrak{M}_λ^* in $\tilde{U}(P_0)$ mit \mathfrak{M}'_λ identisch ist. Die Mengen \mathfrak{M}_λ^* sind untereinander punktfremd. (Der Polyzylinder $\tilde{U}(P_0)$ heißt ein ausge-

^{11a)} Es ist $\tilde{U}(P_0) \subseteq U(P_0)$, und für die Wurzeln der ω_κ gilt in $\tilde{U}(P_0)$ das Entsprechende wie in $U(P_0)$.

zeichneter Polyzylinder bzgl. \mathfrak{M}' ; die Mengen \mathfrak{M}'_λ heißen die Komponenten von \mathfrak{M}' bzgl. $\tilde{U}(P_0)$). Man kann einen ausgezeichneten Polyzylinder $\tilde{U}(P_0)$ so wählen, daß für jeden in $\tilde{U}(P_0)$ enthaltenen ausgezeichneten Polyzylinder $U^*(P_0)$ bzgl. \mathfrak{M}' die Komponenten von \mathfrak{M}' bzgl. $U^*(P_0)$ gleich dem Durchschnitt der Komponenten von \mathfrak{M}' bzgl. $\tilde{U}(P_0)$ mit $U^*(P_0)$ sind.

Beweis: Sei $Z': \{|z_\nu - z_\nu'| < \varepsilon'_\nu, \nu = 1, \dots, n\}$ ein in $V(P_0)$ enthaltener Polyzylinder. Da die Wurzeln der ω_μ stetig von den Koeffizienten $A_{\mu-l}^{(\infty)}$ abhängen, gibt es im Raum C^k der Veränderlichen z_1, \dots, z_k einen Polyzylinder $\tilde{Z}^k: \{|z_\mu - z_\mu^{(0)}| < \tilde{\varepsilon}_\mu, \tilde{\varepsilon}_\mu \leq \varepsilon'_\mu, \mu = 1, \dots, k\}$, derart, daß die Wurzeln $z_\mu(z_1, \dots, z_k)$ von ω_μ für $(z_1, \dots, z_k) \in \tilde{Z}^k$ stets in $|z_\mu - z_\mu^{(0)}| < \varepsilon'_\mu$ liegen ($\mu = k+1, \dots, n$). Wir behaupten, daß

$\tilde{U}(P_0):$

$$\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \tilde{\varepsilon}_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \tilde{\varepsilon}_k, |z_{k+1} - z_{k+1}^{(0)}| < \varepsilon'_{k+1}, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon'_n\}$$

ein Polyzylinder mit den in Satz 2 angegebenen Eigenschaften ist.

Es gilt $\tilde{U}(P_0) \subseteq V(P_0)$ nach Konstruktion.

Sei nun $(z_1^*, \dots, z_k^*) \in \tilde{Z}^k$ ein nicht zu \mathfrak{B} gehörendes k -Tupel. Seien P_μ^* ($z_1^*, \dots, z_k^*, z_{k+1}^{(\mu)}, \dots, z_n^{(\mu)}$) ($\mu = 1, \dots, m$) sämtliche über (z_1^*, \dots, z_k^*) liegenden Punkte von \mathfrak{M}' . In einer Umgebung von P_1^* wird \mathfrak{M}' dargestellt durch Gleichungen von der Gestalt

$$(1) \quad \begin{aligned} z_{k+1} + C_1^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ z_n + C_1^{(n)}(z_1, \dots, z_k) &= 0, \end{aligned}$$

wobei die linken Seiten von (1) jeweils Linearfaktoren der $\omega_\mu(z_n; z_1, \dots, z_k)$ sind. Die $C_1^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$ sind innerhalb $\tilde{Z}^k - (\mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k)$ uneingeschränkt regulär fortsetzbar, und zwar ist jedes $C_1^{(s)}$ Zweig einer einzigen in $\tilde{Z}^k - (\mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k)$ regulären, endlich vieldeutigen Funktion $C^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$. Jedem $C^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$ läßt sich ein endlichblättriges RIEMANNSCHE Gebiet \hat{Z}_s^k über \tilde{Z}^k mit Verzweigungspunkten höchstens über $\mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ zuordnen¹²⁾, so daß $C^{(s)}$ in $\hat{Z}_s^k - \hat{\mathfrak{B}}_s$ eindeutig und regulär ist; dabei bezeichne $\hat{\mathfrak{B}}_s$ die über $\mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ gelegene Punktmenge von \hat{Z}_s^k . Da durch $z_\mu = -C^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$ stets Wurzeln von $\omega_\mu(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$ dargestellt werden und die Wurzeln eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen, lassen sich die $C^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$ sicher stetig in die Punkte von $\hat{\mathfrak{B}}_s$ hinein fortsetzen. Wir dürfen also $C^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$ auffassen als eine in ganz \hat{Z}_s^k eindeutig definierte Funktion, die in $\hat{Z}_s^k - \hat{\mathfrak{B}}_s$ regulär und in den Punkten von $\hat{\mathfrak{B}}_s$ noch stetig ist. Wir setzen nun die Funktionen $C_1^{(s)}(z_1, \dots, z_k)$ in $\tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ längs beliebiger, in (z_1^*, \dots, z_k^*) beginnender Wege gleichzeitig

¹²⁾ Siehe H. BEHNKE u. K. STEIN, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNSCHE Gebiete, Math. Ann. 124, 1—16 (1951). — Der Begriff des RIEMANNSCHE Gebietes wird hier lediglich zwecks einfacher Ausdrucksweise benutzt.

fort. Dabei gelangen wir zu jedem Punkt $(z'_1, \dots, z'_k) \in \tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$, denn $\mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ zerlegt \tilde{Z}^k nicht.

Durch die gleichzeitige Fortsetzung der $C_i^{(n)}$ in $\tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ werden durch die Gl. (1) stets Punkte von \mathfrak{M}' in $\tilde{U}(P_0)$ dargestellt, denn die fortgesetzten Funktionen $-C_1^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ bleiben Wurzeln von ω_n und daher gilt stets $|-C_1^{(n)}(z_1, \dots, z_k) - z_k^{(0)}| < \varepsilon'_n$. Die Gesamtheit dieser Punkte heiße \mathfrak{M}_1^* , sie bildet nach Konstruktion eine maximale zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$, deren Punkte nicht über \mathfrak{B} liegen. Wegen der Endlichvieldeutigkeit jedes $C^{(n)}$ in $\tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ gibt es eine feste Zahl $t \geq 1$, so daß zu jedem k -Tupel (z'_1, \dots, z'_k) aus $\tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ genau t Punkte $P_\tau'(z'_1, \dots, z'_k, z_{k+1}^{(\tau)}, \dots, z_n^{(\tau)})$ ($\tau = 1, \dots, t$) gehören, die auf der durch (1) bei beliebiger gleichzeitiger Fortsetzung der $C_i^{(n)}$ innerhalb $\tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ in $\tilde{U}(P_0)$ gegebenen Punktmenge \mathfrak{M}_1^* liegen. Zum k -Tupel (z_1^*, \dots, z_k^*) mögen so etwa die Punkte $P_\tau^*(z_1^*, \dots, z_k^*, z_{k+1}^{(\tau)}, \dots, z_n^{(\tau)})$ ($\tau = 1, \dots, t$) gehören. In der Nachbarschaft von P_τ^* besitzt dann \mathfrak{M}' jeweils eine Darstellung

$$(1') \quad \begin{aligned} z_{k+1} + C_\tau^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ z_n + C_\tau^{(n)}(z_1, \dots, z_k) &= 0, \end{aligned}$$

wo die $C_\tau^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ Zweige von $C^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ in den über dem Grundpunkt (z_1^*, \dots, z_k^*) gelegenen Punkten von \tilde{Z}_n^k bezeichnen. Wir bilden nun mit Unbestimmten u_{k+1}, \dots, u_n :

$$H(u_{k+1}, \dots, u_n, z_1, \dots, z_n) = \prod_{\tau=1}^t \left\{ \sum_{n=k+1}^n u_n \cdot (z_n + C_\tau^{(n)}(z_1, \dots, z_k)) \right\}.$$

H ist ein Polynom in $u_{k+1}, \dots, u_n, z_{k+1}, \dots, z_n$; seine Koeffizienten sind in $\tilde{Z}^k - \mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ reguläre und eindeutige Funktionen von z_1, \dots, z_k , die, da die $C^{(n)}$ in ganz \tilde{Z}_n^k stetig sind, sich in die Punkte von $\mathfrak{B} \cap \tilde{Z}^k$ eindeutig und stetig, also auch regulär fortsetzen lassen. Betrachten wir H nur als Polynom in u_{k+1}, \dots, u_n , so sind seine Koeffizienten $g_1(z_1, \dots, z_n), \dots, g_s(z_1, \dots, z_n)$ in ganz $\tilde{U}(P_0)$ hinein eindeutig regulär fortsetzbar. Die durch

$$(2) \quad \begin{aligned} g_1(z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ \vdots \\ g_s(z_1, \dots, z_n) &= 0 \end{aligned}$$

in $\tilde{U}(P_0)$ gegebene analytische Menge \mathfrak{M}_1' umfaßt \mathfrak{M}_1^* und ist wegen der Stetigkeit der $C^{(n)}$ in \tilde{Z}_n^k genau die abgeschlossene Hülle von \mathfrak{M}_1^* in $\tilde{U}(P_0)$. Da $\mathfrak{M}_1' \subseteq \mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$, muß auch $\mathfrak{M}_1' \subseteq \mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ gelten.

Die Menge \mathfrak{M}_1' ist in $\tilde{U}(P_0)$ irreduzibel. Andernfalls müßte in $\tilde{U}(P_0)$ eine Zerlegung $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$ gelten mit nichtleeren, von \mathfrak{M}_1' verschiedenen, in $\tilde{U}(P_0)$ analytischen Mengen \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' . Es gibt einen Punkt $*P \in \mathfrak{M}_1'$, der

nicht zu \mathfrak{N}'' gehört. Aus $\mathfrak{M}_1^* \subseteq \mathfrak{N}''$ würde sich nämlich wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{N}'' in $\tilde{U}(P_0)$ der Widerspruch $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{N}''$ ergeben.

In einer Umgebung $W(*P)$ gilt: $\mathfrak{M}_1^* \cap W(*P) = \mathfrak{N}' \cap W(*P)$. Sei nun Q^* ein beliebiger Punkt von \mathfrak{M}_1^* in $\tilde{U}(P_0)$, sei $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$, $P(0) = *P$, $P(1) = Q^*$) eine in \mathfrak{M}_1^* verlaufende Kurve, die $*P$ mit Q^* verbindet. Wir betrachten die Menge T derjenigen t -Werte, zu denen Umgebungen $V(P(t))$ existieren, derart daß gilt: $\mathfrak{M}_1^* \cap V(P(t)) = \mathfrak{N}' \cap V(P(t))$. T ist wegen $0 \in T$ nicht leer. Sei t_0 die obere Grenze von T . In einer Umgebung $U(P(t_0))$ werde \mathfrak{N}' durch die Gleichungen

$$h_\varrho(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, r)$$

und \mathfrak{M}_1^* durch die Gleichungen

$$z_n + C_r^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (\kappa = k+1, \dots, n)$$

gegeben. In $U(P(t_0))$ liegt sicher ein Punkt $P(t_1)$ mit $t_1 \in T$. In einer Umgebung $U(P(t_1)) \subseteq U(P(t_0))$ gilt daher

$$h_\varrho(z_1, \dots, z_k, -C_r^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k), \dots, -C_r^{(n)}(z_1, \dots, z_k)) = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, r).$$

Diese Identitäten gelten dann aber auch in ganz $U(P(t_0))$, d. h. es gilt: $\mathfrak{M}_1^* \cap U(P(t_0)) = \mathfrak{N}' \cap U(P(t_0))$. Dann kann aber nicht $t_0 < 1$ sein, denn in diesem Falle gibt es in $U(P(t_0))$ Punkte $P(t_2)$ mit $t_2 > t_0$, in deren Nachbarschaft \mathfrak{M}_1^* mit \mathfrak{N}' übereinstimmt, so daß t_0 nicht die obere Grenze von T wäre. Also ist $t_0 = 1$, und es gilt: $Q^* = P(1) \in \mathfrak{N}'$. Jeder Punkt von \mathfrak{M}_1^* liegt daher in \mathfrak{N}' . Daraus ergibt sich wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{N}' in $\tilde{U}(P_0)$ der Widerspruch $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{N}'$.

Ist noch nicht $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$, so gehört sicher einer der oben eingeführten Punkte P_{μ}^* , etwa P_{μ}^* , nicht zu \mathfrak{M}_1' . Ist nämlich $'P'(z_1, \dots, z_n)$ ein nicht zu \mathfrak{M}_1 gehörender Punkt von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$, so sei $'Z^n: \{|z_1 - 'z_1| < \delta', \dots, |z_n - 'z_n| < \delta'\}$ eine in $\tilde{U}(P_0)$ enthaltene Polyzylinderumgebung von $'P$, in der kein Punkt von \mathfrak{M}_1' liegt. Über jedem k -Tupel (z_1, \dots, z_k) aus dem Polyzylinder $'Z^k: \{|z_1 - 'z_1| < \delta', \dots, |z_k - 'z_k| < \delta'\}$ liegt mindestens ein Punkt von \mathfrak{M}' . Da es insbesondere k -Tupel $(z_1, \dots, z_k) \in 'Z^k - ('Z^k \cap \mathfrak{V})$ gibt, existiert also auch ein nicht zu \mathfrak{M}_1' gehörender Punkt $\tilde{Q}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$, der nicht über \mathfrak{V} liegt. In einer Umgebung eines solchen Punktes \tilde{Q} wird \mathfrak{M}' durch Gleichungen

$$z_n + B^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (\kappa = k+1, \dots, n)$$

dargestellt.

Setzt man die $B^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k)$ ($\kappa = k+1, \dots, n$) längs eines von $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ nach (z_1^*, \dots, z_k^*) führenden, in $\tilde{Z}^k - \mathfrak{V} \cap \tilde{Z}^k$ verlaufenden Weges gleichzeitig fort, so folgt, da die fortgesetzten Funktionen $-B^{(\kappa)}$ Wurzeln von ω_n bleiben und mithin stets $|-B^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k) - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n$ gilt, daß \tilde{Q} mit einem Punkt P_{μ}^* durch eine in $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ verlaufende Kurve verbindbar ist, die keine Punkte besitzt, die über \mathfrak{V} liegen. Würde nun gelten $P_{\mu}^* \in \mathfrak{M}_1'$, so wäre auch

$P_{\mu_0}^* \in \mathfrak{M}_1^*$. Dann läge aber auch \tilde{Q} in \mathfrak{M}_1^* und man hätte den Widerspruch $\tilde{Q} \in \mathfrak{M}_1'$.

Ausgehend von $P_{\mu_0}^*$ läßt sich nun eine zweite maximale, zusammenhängende Teilmenge \mathfrak{M}_2^* von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ gewinnen, deren abgeschlossene Hülle in $\tilde{U}(P_0)$ ebenfalls eine in $\tilde{U}(P_0)$ irreduzible analytische Menge $\mathfrak{M}_2' \subseteq \mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ ist. Da es nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ über (z_1^*, \dots, z_k^*) gibt, kann man auf diese Weise endlich viele irreduzible analytische Teilmengen \mathfrak{M}_l^* ($l = 1, \dots, l$) von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ konstruieren, derart, daß jeder über (z_1^*, \dots, z_k^*) liegende Punkt von $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ in einem \mathfrak{M}_l^* liegt. Dann gilt aber in $\tilde{U}(P_0)$:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1' \cup \dots \cup \mathfrak{M}_l'.$$

Die Mengen \mathfrak{M}_l^* sind nach Konstruktion untereinander punktfremd.

Die Anzahl l der Komponenten von \mathfrak{M}' , die bezüglich eines beliebigen, ausgezeichneten Polyzylinders $U'(P_0)$ gebildet werden, ist stets kleiner oder gleich der Anzahl der über einem festen Punkt $(z_1, \dots, z_k) \notin \mathfrak{B}$ gelegenen Punkte von \mathfrak{M}' . Da sich für einen in $U'(P_0)$ enthaltenen, ausgezeichneten Polyzylinder $U''(P_0)$ diese Anzahl l höchstens vergrößern kann — Vergrößerung tritt genau dann ein, wenn eine der Mengen \mathfrak{M}_l^* , die bezüglich $U'(P_0)$ konstruiert und dort zusammenhängend ist, in $U''(P_0)$ nicht mehr zusammenhängt —, so folgt, daß es einen ausgezeichneten Polyzylinder $\check{U}(P_0)$ gibt, derart, daß die bezüglich $\check{U}(P_0)$ konstruierten Mengen \mathfrak{M}_l^* auch in jedem in $\check{U}(P_0)$ enthaltenen ausgezeichneten Polyzylinder $U^*(P_0)$ zusammenhängen. Das bedeutet aber, daß die Komponenten von \mathfrak{M}' bezüglich $\check{U}(P_0)$ gleich dem Durchschnitt der Komponenten von \mathfrak{M}' bezüglich $\check{U}(P_0)$ mit $U^*(P_0)$ sind. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Folgerung 1: Sei \mathfrak{M}_G eine im Gebiete G rein k -dimensionale analytische Menge und P_0 ein Punkt auf \mathfrak{M}_G . \mathfrak{M}_G genüge in P_0 den Voraussetzungen von Satz 1. Sei \mathfrak{M}' eine Einbettungsmenge von \mathfrak{M}_G in einer Umgebung $U(P_0)$ (im Sinne von Satz 1 nebst Zusätzen). Seien \mathfrak{M}_l^* ($l = 1, \dots, l$) die Komponenten von \mathfrak{M}' bezüglich eines ausgezeichneten Polyzylinders $\tilde{U}(P_0) \subseteq U(P_0)$. Dann stimmt die Vereinigung gewisser dieser Komponenten \mathfrak{M}_l^* mit $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ überein.

Beweis: Wir betrachten diejenigen Komponenten \mathfrak{M}_l^* von \mathfrak{M}' bezüglich $\tilde{U}(P_0)$, deren Mengen \mathfrak{M}_l^* Punkte P_s von $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ besitzen. Wir behaupten, daß $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ die Vereinigungsmenge $\tilde{\mathfrak{M}}$ dieser Mengen \mathfrak{M}_l^* ist. Sei $\tilde{U}(P_0) : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \tilde{\epsilon}_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \tilde{\epsilon}_n\}$, ferner $Z^k : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \tilde{\epsilon}_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \tilde{\epsilon}_k\}$. Zunächst gilt $\tilde{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$. Denn in einer Umgebung von P_s stimmen \mathfrak{M}_l^* und \mathfrak{M}_G auf Grund von Satz 1, Zusatz II, 7. überein. Daraus folgt aber, da \mathfrak{M}_l^* aus Gleichungen von Typus (I) durch beliebige gleichzeitige analytische Fortsetzung der in ihnen auftretenden Funktionen innerhalb $Z^k - \mathfrak{B} \cap Z^k$ entsteht, daß \mathfrak{M}_l^* in seinem ganzen Verlauf in $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ ent-

halten ist. Dann ist aber auch die abgeschlossene Hülle \mathfrak{M}'_* von \mathfrak{M}'_* in $\tilde{U}(P_0)$ in $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ enthalten, und mithin gilt auch $\tilde{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$.

Gäbe es nun einen Punkt $P'(z'_1, \dots, z'_n) \in \mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$, der nicht in $\tilde{\mathfrak{M}}$ liegt, so sei $V(P') \subseteq \tilde{U}(P_0)$ eine Umgebung von P' , in der kein Punkt von $\tilde{\mathfrak{M}}$ liegt. \mathfrak{M}_G ist in P' k -dimensional, insbesondere schneidet die Ebene

$$z_1 = z'_1, \dots, z_k = z'_k$$

\mathfrak{M}_G in einer Umgebung von P' nur in P' . Die Anwendung des Einbettungssatzes nebst Zusatz 1 auf \mathfrak{M}_G in P' lehrt dann, daß über jedem k -Tupel (z_1, \dots, z_k) , welches genügend nahe bei (z'_1, \dots, z'_k) liegt, Punkte von \mathfrak{M}_G in $V(P')$ liegen. Es gibt daher in $V(P')$ auch Punkte von \mathfrak{M}_G , die nicht über \mathfrak{V} liegen. Jeder solche Punkt gehört einer der Mengen \mathfrak{M}'_λ ($\lambda = 1, \dots, l$) und also auch der Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ an. Mithin liegen auch in $V(P')$ Punkte von $\tilde{\mathfrak{M}}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muß also $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0) = \tilde{\mathfrak{M}}$ gelten, womit Folgerung 1 bewiesen ist.

Bemerkung: Der Beweis von Satz 2 und Folgerung 1 zeigt, daß man eine im Gebiete G rein k -dimensionale analytische Menge \mathfrak{M}_G in gewissen (beliebig klein zu wählenden) ausgezeichneten Umgebungen $U(P_0)$ eines jeden ihrer Punkte P_0 in endlich viele in $U(P_0)$ irreduzible analytische Mengen \mathfrak{M}_ϱ ($\varrho = 1, \dots, r$) zerlegen kann, derart, daß in einem geeigneten Koordinatensystem^{12a)} die Umgebungen $U(P_0)$ Polyzylinder $\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$ sind und über jedem Punkt $(z_1^{(1)}, \dots, z_k^{(1)}) \in \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\}$ wenigstens ein Punkt P_ϱ liegt, der zur Menge \mathfrak{M}_ϱ gehört ($\varrho = 1, \dots, r$).

Folgerung 2: Ist \mathfrak{M}_G eine im Punkte P_0 irreduzible, k -dimensionale analytische Menge (\mathfrak{M}_G wird nicht als rein k -dimensional in G vorausgesetzt) und ist \mathfrak{M}' eine Einbettungsmenge von \mathfrak{M}_G in P_0 im Sinne von Satz 1 nebst Zusätzen, so gibt es einen ausgezeichneten Polyzylinder $\tilde{U}(P_0)$ bezüglich \mathfrak{M}' , derart, daß $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ mit einer der Komponenten von \mathfrak{M}' bezüglich $\tilde{U}(P_0)$ übereinstimmt.

Insbesondere ist also \mathfrak{M}_G in $\tilde{U}(P_0)$ die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden Menge \mathfrak{M}'_* , die nur gewöhnliche Punkte von $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ enthält.

Beweis: Gilt in einem ausgezeichneten Polyzylinder $U(P_0)$ die Zerlegung

$$\mathfrak{M}' \cap U(P_0) = \mathfrak{M}'_1 \cup \dots \cup \mathfrak{M}'_l$$

von $\mathfrak{M}' \cap U(P_0)$ in Komponenten \mathfrak{M}'_i , so folgt aus der Irreduzibilität von \mathfrak{M}_G in P_0 , daß es einen in $U(P_0)$ enthaltenen ausgezeichneten Polyzylinder $\tilde{U}(P_0)$ gibt, derart, daß $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ in einer der Mengen $\mathfrak{M}'_i \cap \tilde{U}(P_0)$, etwa

^{12a)} Geeignete Koordinatensysteme sind insbesondere alle Systeme z_1, \dots, z_n , die aus dem ursprünglichen durch eine in P_0 -reguläre Koordinatentransformation hervorgehen und in denen die analytische Ebene $\{z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}\}$ (die Koordinaten von P_0 im (z_1, \dots, z_n) -System seien $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$) die Menge \mathfrak{M}_G in der Nähe von P_0 nur in P_0 schneidet.

in $\mathfrak{M}'_1 \cap \tilde{U}(P_0)$ liegt. Nach Satz 2 kann $U(P_0)$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{M}' \cap \tilde{U}(P_0)$ eine Komponente von \mathfrak{M}' bezüglich $\tilde{U}(P_0)$ ist.

Auf Grund von Satz 1, Zusatz I, 5. gibt es innerhalb $\tilde{U}(P_0)$ Punkte auf \mathfrak{M}_G , die nicht über \mathfrak{D} liegen und in deren Nachbarschaft \mathfrak{M}_G und \mathfrak{M}' , in diesem Falle also \mathfrak{M}_G und $\mathfrak{M}'_1 \cap \tilde{U}(P_0)$, übereinstimmen. Daraus folgt dann analog wie im Beweis von Satz 2, daß $\mathfrak{M}'_1 \cap \tilde{U}(P_0)$ in $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0)$ enthalten ist. Mithin gilt $\mathfrak{M}_G \cap \tilde{U}(P_0) = \mathfrak{M}'_1 \cap \tilde{U}(P_0)$, w. z. b. w.

Es schließt sich an:

Satz 3: \mathfrak{M}_G sei eine analytische Menge im Gebiete G des C^n und $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ einer ihrer Punkte.

a) Ist \mathfrak{M}_G in P_0 höchstens k -dimensional, so ist \mathfrak{M}_G in allen ihren Punkten innerhalb einer Umgebung von P_0 ebenfalls höchstens k -dimensional.

b) Ist \mathfrak{M}_G in P_0 k -dimensional ($k > 0$), so gibt es in jeder Umgebung von P_0 weitere und sogar gewöhnliche Punkte von \mathfrak{M}_G , in denen \mathfrak{M}_G ebenfalls k -dimensional ist.

c) Ist \mathfrak{M}_G in P_0 irreduzibel und k -dimensional, so gibt es eine Umgebung $\tilde{U}(P_0)$, in der \mathfrak{M}_G irreduzibel und rein k -dimensional ist.

d) \mathfrak{M}_G sei in P_0 reduzibel und k -dimensional. Gilt in einer Umgebung $U'(P_0)$ die Zerlegung $\mathfrak{M}_G \cap U'(P_0) = \mathfrak{M}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{M}_q$, wobei die \mathfrak{M}_i ($i = 1, \dots, q$) in $U'(P_0)$ analytische und in P_0 irreduzible Mengen sind, so ist k gleich dem Maximum der Dimensionen k_i der \mathfrak{M}_i ($i = 1, \dots, q$) in P_0 .

Wir beweisen zunächst:

Hilfssatz 1: Jede analytische Menge \mathfrak{M} , die in einer Umgebung $U(P_0)$ des auf \mathfrak{M} liegenden Punktes $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ durch Gleichungen der Gestalt

$$(1) \quad z_n + A_n(z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (x = k+1, \dots, n)$$

dargestellt wird (die $A_n(z_1, \dots, z_k)$ seien in einer entsprechenden Umgebung von $(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)})$ reguläre Funktionen), ist in $U(P_0)$ rein k -dimensional.

Beweis: In jedem Punkte $\bar{P}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathfrak{M}$ gilt $\dim_{\bar{P}}(\mathfrak{M}) \leq k$, da die $(n-k)$ -dimensionale analytische Ebene

$$z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_k = \bar{z}_k$$

\mathfrak{M} in $U(P_0)$ nur in \bar{P} schneidet. Sei $\dim_{\bar{P}}(\mathfrak{M}) = k'$. Nach Satz 1 nebst Zusatz I läßt sich, nachdem man nötigenfalls durch eine lineare Transformation zu neuen Koordinaten z'_1, \dots, z'_n übergegangen ist, \mathfrak{M} in einer Umgebung $U(\bar{P}) \subseteq U(P_0)$ einbetten in eine analytische Menge \mathfrak{M}' , die in $U(\bar{P})$ durch Gleichungen

$$w_n(z'_n; z'_1, \dots, z'_{k'}) = 0 \quad (x = k'+1, \dots, n)$$

dargestellt wird, wobei die w_n Pseudopolynome mit den in Satz 1 und Zusatz I angegebenen Eigenschaften sind. Nach Zusatz I, 5. gibt es insbesondere in $U(\bar{P})$ einen Punkt P^* mit den Koordinaten (z'_1, \dots, z'_n) bzw. (z'_1, \dots, z'_n) sowie eine Umgebung $V(P^*) \subseteq U(\bar{P})$, so daß $\mathfrak{M}' \cap V(P^*) = \mathfrak{M} \cap V(P^*)$ und

\mathfrak{M}' in $V(P^*)$ durch Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} z_{k'+1} + B_{k'+1}(z'_1, \dots, z'_{k'}) &= 0 \\ \vdots \\ z'_n + B_n(z'_1, \dots, z'_{k'}) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben wird.

Wir vergleichen nun in $V(P^*)$ die durch (1) und (2) gegebenen Darstellungen von \mathfrak{M} und leiten aus der Annahme $k' < k$ wie folgt einen Widerspruch her:

Die Koordinaten z'_1, \dots, z'_n hängen mit den z_1, \dots, z_n durch eine in $U(P_0)$ reguläre umkehrbare eindeutige (lineare) Transformation

$$z_j = g_j(z'_1, \dots, z'_n), \quad z'_j = h_j(z_1, \dots, z_n) \quad j = 1, \dots, n$$

zusammen. Hieraus ergeben sich für die Punkte von \mathfrak{M} die Gleichungen

$$(3) \quad z_j = g_j(z'_1, \dots, z'_{k'}, -B_{k'+1}(z_1, \dots, z'_{k'}), \dots, -B_n(z'_1, \dots, z'_{k'})) = \varphi_j(z'_1, \dots, z'_{k'})$$

$$(4) \quad z'_j = h_j(z_1, \dots, z_k, -A_{k+1}(z_1, \dots, z_k), \dots, -A_n(z_1, \dots, z_k)) = \varphi_j(z_1, \dots, z_k).$$

Diese Gleichungen vermitteln sogar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den k -Tupeln (z_1, \dots, z_k) aus einer Umgebung von (z_1^*, \dots, z_k^*) und den k' -Tupeln $(z'_1, \dots, z'_{k'})$ aus einer Umgebung von $(z'_1, \dots, z'_{k'})$, denn diese Tupel entsprechen umkehrbar eindeutig den Punkten von \mathfrak{M} in $V(P^*)$. Aus (3) und (4) ergeben sich also die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(\varphi_1(z_1, \dots, z_k), \dots, \varphi_{k'}(z_1, \dots, z_k)) \\ \vdots \\ z_k &= \varphi_k(\varphi_1(z_1, \dots, z_k), \dots, \varphi_{k'}(z_1, \dots, z_k)), \end{aligned}$$

woraus man durch Differentiation gewinnt

$$\delta_{\nu i} = \sum_{\sigma=1}^{k'} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z'_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z_i} \quad (i, \nu = 1, \dots, k).$$

Eine solche Relation ist aber für $k' < k$ nach den Regeln des Matrizenkalküls nicht möglich.

Beweis von Satz 3: Wir dürfen annehmen, daß die analytische Ebene

$$z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)} \quad (1 \leq k < n)^{12b)}$$

in einer Umgebung von P_0 nur den Punkt P_0 mit \mathfrak{M}_0 gemeinsam hat. Es gibt dann in einer Umgebung

$$U(P_0) : \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$$

eine durch Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \varphi_1(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ \varphi_r(z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

dargestellte analytische Menge \mathfrak{M}' mit den in Satz 1 angegebenen Eigenschaften.

^{12b)} Die Fälle $k=0$ und $k=n$ sind trivial.

Die Behauptungen a), b), c), d) ergeben sich wie folgt:

Zu a): Jede analytische Ebene $z_1 = z_1^{(1)}, \dots, z_k = z_k^{(1)}$ mit $|z_j^{(1)} - z_j^{(0)}| < \varepsilon_j$ ($j = 1, \dots, k$) schneidet \mathfrak{M}' , also auch \mathfrak{M}_G innerhalb $U(P_0)$ höchstens in isolierten Punkten; daher ist \mathfrak{M}_G in jedem Punkt von $U(P_0)$ höchstens k -dimensional.

Zu b): Aus Zusatz I zu Satz 1 folgt: Es gibt in jeder Umgebung von P_0 Punkte $P^*(z_1^*, \dots, z_n^*)$ von \mathfrak{M}_G , derart, daß jeweils in einer Umgebung $U(P^*)$ \mathfrak{M}_G genau dargestellt wird durch Gleichungen

$$\begin{aligned} z_{k+1} + C^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ z_n + C^{(n)}(z_1, \dots, z_k) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $z_n + C^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ ($n = k+1, \dots, n$) jeweils in $U(P^*)$ regulär und dort Linearfaktor von $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ ist. (Alle Punkte von \mathfrak{M}_G in $U(P^*)$ sind gewöhnliche Punkte.) Nach Hilfssatz 1 folgt die Behauptung.

Zu c): Nach Folgerung 2 zu Satz 2 stimmt \mathfrak{M}_G in einem ausgezeichneten Polyzylinder $\tilde{U}(P_0)$ mit einer der Komponenten \mathfrak{M}'_i der Einbettungsmenge \mathfrak{M}' bezüglich $\tilde{U}(P_0)$ überein (man beachte, daß alle φ_i wegen Zusatz I. 4. zu Satz 1 identisch verschwinden). Jedes \mathfrak{M}'_i ist irreduzibel in $\tilde{U}(P_0)$.

Ferner ist jedes \mathfrak{M}'_i rein k -dimensional in $\tilde{U}(P_0)$. Zunächst hat \mathfrak{M}'_i in allen Punkten $(z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{M}_i^{*12c}$ wegen Hilfssatz 1 die Dimension k , da dort eine Darstellung durch Gleichungen vom Typus

$$\begin{aligned} z_{k+1} + B_{k+1}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ z_n + B_n(z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Andererseits wird \mathfrak{M}' und daher auch \mathfrak{M}'_i von jeder Ebene $z_1 = z'_1, \dots, z_k = z'_k$ mit $|z'_j - z_j^{(0)}| < \varepsilon_j$ ($j = 1, \dots, k$) höchstens punkthaft geschnitten, also ist \mathfrak{M}'_i in allen ihren Punkten höchstens k -dimensional. Jeder nicht auf \mathfrak{M}'_i liegende Punkt P von \mathfrak{M}'_i ist Häufungspunkt von Punkten aus \mathfrak{M}'_i . Wegen a) ist daher \mathfrak{M}'_i auch in jedem solchen Punkte P k -dimensional.

Zu d): Zunächst ist $k \geq k_i$ ($i = 1, \dots, q$), denn jede $(n-k)$ -dimensionale analytische Ebene $z_1 = z_1^{(1)}, \dots, z_k = z_k^{(1)}$ schneidet $\mathfrak{M}_G \cap U'(P_0)$ und mithin auch \mathfrak{M}_i höchstens in isolierten Punkten. Nach b) gibt es ferner in $U'(P_0)$ gewöhnliche Punkte auf \mathfrak{M}_G , in denen \mathfrak{M}_G k -dimensional ist. In deren Nachbarschaft wird \mathfrak{M}_G jeweils durch Gleichungen vom Typus

$$z_n + C^{(n)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (n = k+1, \dots, n)$$

dargestellt. Da \mathfrak{M}_G in jedem gewöhnlichen Punkte irreduzibel ist, so gibt es zu jedem gewöhnlichen Punkte $P^* \in \mathfrak{M}_G \cap U'(P_0)$ eine Umgebung $U(P^*)$, so daß $\mathfrak{M}_G \cap U(P^*)$ jeweils in einer einzigen der \mathfrak{M}_i enthalten ist, woraus sogar folgt:

$$\mathfrak{M}_G \cap U(P^*) = \mathfrak{M}_i \cap U(P^*).$$

Demnach ist die Dimension von \mathfrak{M}_G in P^* gleich der Dimension einer der

^{12c)} \mathfrak{M}_i^* ist die in Satz 2 beschriebene, \mathfrak{M}'_i zugeordnete Menge.

\mathcal{M}_i in P^* . Da die \mathcal{M}_i nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, hat ein \mathcal{M}_i , etwa \mathcal{M}_1 , folgende Eigenschaft: Es gibt auf \mathcal{M}_1 eine Folge von Punkten P_j^* mit dem Häufungspunkt P_0 , derart, daß die Dimension von \mathcal{M}_1 in P_j^* stets gleich k ist. Nach a) folgt daraus $k_1 \geq k$. Aus $k \geq k_i$ für alle i und $k_1 \geq k$ folgt dann wie behauptet: $k = \text{Max}(k_1, \dots, k_q)$. — Damit ist Satz 3 bewiesen.

Es ergibt sich nun leicht die Umkehrung der Bemerkung zu Zusatz II, daß nämlich eine im Gebiete G durch eine Gleichung $f(z_1, \dots, z_n) = 0$ (wobei f eine in G reguläre, dort nicht identisch verschwindende Funktion ist) gegebene nicht leere analytische Menge \mathcal{M}_G rein $(n-1)$ -dimensional ist.

Denn \mathcal{M}_G ist in der Nachbarschaft jedes ihrer Punkte P_0 (eventuell nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation) die Nullstellenmenge eines ausgezeichneten Pseudopolynoms $\omega(z_n; z_1, \dots, z_{n-1})$. In beliebiger Nähe von P_0 gibt es Punkte Q , in deren Umgebung \mathcal{M}_G durch eine Gleichung

$$z_n + C(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0$$

gegeben wird, deren linke Seite ein Linearfaktor von ω ist. In jedem solchen Punkte Q ist \mathcal{M}_G nach Hilfssatz 1 $(n-1)$ -dimensional. Nach Satz 3a ist daher \mathcal{M}_G in P_0 mindestens $(n-1)$ -dimensional. Andererseits ist \mathcal{M}_G in P_0 höchstens $(n-1)$ -dimensional, da die 1-dimensionale analytische Ebene

$$z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_{n-1} = z_{n-1}^{(0)}$$

\mathcal{M}_G in der Nähe von P_0 nur in P_0 schneidet.

Wir können nun beweisen

Satz 4: Die Dimension einer analytischen Menge \mathcal{M} ist in jedem Punkt $P_0 \in \mathcal{M}$ invariant gegenüber in P_0 regulären eindeutigen Transformationen.

Sei zunächst P_0 ein gewöhnlicher Punkt von \mathcal{M} . Es gibt dann ein Koordinatensystem, in dem \mathcal{M} sich in einer geeigneten Umgebung $U(P_0)$ als Stück einer analytischen Ebene — etwa der Dimension k — darstellt^{12d)}. In diesem Koordinatensystem gilt also: $\dim_{P_0}(\mathcal{M}) = k$. Geht man durch eine in P_0 reguläre Transformation zu neuen Koordinaten z_1, \dots, z_n über, so wird \mathcal{M} in ihnen in einer Umgebung $V(P_0) \subseteq U(P_0)$ durch ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi_n(z_1, \dots, z_n) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben. Dieses Gleichungssystem hat den Rang $n-k$, es läßt sich daher in P_0 nach $n-k$ geeigneten Variablen auflösen. Hat P_0 die Koordinaten $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$, so dürfen wir also annehmen (evtl. ist eine Umnummerierung der Koordinaten vorzunehmen, die jedoch die Dimension von \mathcal{M} in P_0 invariant läßt), daß \mathcal{M} in $V(P_0)$ durch Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} z_{k+1} + C_{k+1}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ z_n + C_n(z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

^{12d)} Es sei $1 \leq k < n$; die Fälle $k=0$ und $k=n$ sind klar.

mit in $(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)})$ regulären Funktionen $C_n(z_1, \dots, z_k)$ gegeben wird. Aus Hilfssatz 1 folgt jetzt, daß \mathfrak{M} in P_0 auch bezüglich der z_1, \dots, z_n k -dimensional ist.

Sei nun P_0 ein nicht gewöhnlicher Punkt von \mathfrak{M} , seien k bzw. k' die Dimensionen von \mathfrak{M} bezüglich der Koordinaten z_1, \dots, z_n bzw. z'_1, \dots, z'_n , die durch eine in $U^*(P_0)$ reguläre Transformation miteinander zusammenhängen. Es genügt, $k \leq k'$ nachzuweisen, da k und k' nicht voneinander ausgezeichnet sind.

Nach Satz 3 b) gibt es in $U^*(P_0)$ eine gegen P_0 konvergierende Folge gewöhnlicher Punkte Q_ν von \mathfrak{M} , in denen \mathfrak{M} bezüglich der z_1, \dots, z_n die Dimension k hat. Nach dem ersten Teil des Beweises hat dann \mathfrak{M} in den Punkten Q_ν auch bezüglich der z'_1, \dots, z'_n die Dimension k . Nach Satz 3 a) muß dann die Dimension k' von \mathfrak{M} in P_0 bezüglich der z'_1, \dots, z'_n größer oder gleich k sein, w. z. b. w.

Durch Satz 4 ist insbesondere klar, daß die oben gegebene Definition der Dimension auch für analytische Mengen in komplexen Mannigfaltigkeiten benutzt werden kann.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung beweisen wir noch

Hilfssatz 2: Die analytische Menge \mathfrak{M} sei in einer Umgebung des Punktes $P_0 \in \mathfrak{M}$ rein k -dimensional ($1 \leq k < n$). Dann gibt es eine Umgebung $U(P_0)$ und eine in $U(P_0)$ analytische Menge \mathfrak{M}^ , die in $\mathfrak{M} \cap U(P_0)$ enthalten ist und in P_0 höchstens die Dimension $k-1$ hat, derart, daß alle nicht gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{M} \cap U(P_0)$ zu \mathfrak{M}^* gehören.*

Beweis: Nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation kann \mathfrak{M} in einer Umgebung $U(P_0)$ auf Grund von Satz 1 nebst Zusätzen eingebettet werden in eine analytische Menge \mathfrak{M}' , die in einer Umgebung $U(P_0)$ als Nullstellenmenge von Pseudopolynomen $\omega_\alpha(z_n; z_1, \dots, z_k)$ ($\alpha = k+1, \dots, n$) darstellbar ist. Aus Satz 1, Zusatz II, 7. folgt, daß ein Punkt $P^*(z_1^*, \dots, z_n^*)$ von \mathfrak{M} aus $U(P_0)$ höchstens dann ein nicht gewöhnlicher Punkt von \mathfrak{M} ist, wenn das k -Tupel (z_1^*, \dots, z_k^*) der Vereinigung der Diskriminantenflächen der Pseudopolynome $\omega_\alpha(z_n; z_1, \dots, z_k)$ im Raum O^k der Veränderlichen z_1, \dots, z_k angehört. Es bezeichne $D(z_1, \dots, z_k)$ das Produkt der Diskriminanten der ω_α . Es ist $D(z_1, \dots, z_k) \neq 0$, da die ω_α in P_0 keine mehrfachen Faktoren besitzen. Es liegt nun jeder nicht gewöhnliche Punkt P^* von \mathfrak{M} aus $U(P_0)$ in der in $U(P_0)$ analytischen Menge $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M} \cap \check{\mathfrak{M}}$, wobei $\check{\mathfrak{M}}$ definiert wird durch

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(z_n; z_1, \dots, z_k) &= 0 \quad (\alpha = k+1, \dots, n) \\ D(z_1, \dots, z_k) &= 0. \end{aligned}$$

Gilt $D(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) \neq 0$, so ist $\dim_{P_0}(\mathfrak{M}^*) = -1$. Im anderen Falle ergibt sich aus Satz 1, Zusatz I, 4., daß \mathfrak{M}^* in P_0 höchstens $(k-1)$ -dimensional ist.

2. Globale Eigenschaften analytischer Mengen. — Zum Studium der globalen Eigenschaften analytischer Mengen ist es zweckmäßig, jeder analytischen Menge \mathfrak{M}_G einen topologischen Raum m_G wie folgt zuzuordnen:¹³⁾

¹³⁾ Vgl. hierzu die in ^{6a)} zitierte Arbeit von H. CARTAN, Appendice II.

Man betrachte Paare (P, \mathfrak{P}_P) , wo P ein beliebiger Punkt von \mathfrak{M}_G und \mathfrak{P}_P eine der in P analytischen, irreduziblen Mengen ist, die in einer lokalen Zerlegung in irreduzible Komponenten von \mathfrak{M}_G in P auftreten.

Zwei Paare (P, \mathfrak{P}_P) und (Q, \mathfrak{Q}_Q) seien äquivalent, wenn $P = Q$ und wenn \mathfrak{P}_P und \mathfrak{Q}_Q Repräsentanten desselben analytischen Keimes in P (der sogar ein analytischer Primkeim ist) sind. Dadurch wird eine Klasseneinteilung in der Menge der Paare (P, \mathfrak{P}_P) gegeben.

Eine Klasse α kann durch

$$\alpha = (P, \mathfrak{p}_P)$$

symbolisiert werden, da sie durch den Punkt P und den analytischen Primkeim \mathfrak{p}_P eindeutig bestimmt ist.

Die Menge aller Klassen bildet den Raum m_G ; die Klassen sind die Punkte dieses Raumes.

Ist $\alpha = (P, \mathfrak{p}_P)$, so heißt P der Träger von α .

Durch $\varphi(\alpha) = P$ wird die natürliche Abbildung von m_G auf \mathfrak{M}_G gegeben. Die Topologisierung von m_G erfolgt so, daß φ eine stetige Abbildung wird. Eine Menge $n \subseteq m_G$ heißt offen, wenn es zu jedem $\alpha = (P, \mathfrak{p}_P) \in n$ eine Umgebung $U(P)$ und einen in $U(P)$ analytischen Repräsentanten \mathfrak{P}_P von \mathfrak{p}_P gibt, so daß alle $\beta = (Q, \mathfrak{p}_Q) \in m_G$, deren Träger Q in $U(P) \cap \mathfrak{P}_P$ liegen, zu n gehören.

Diese Definition garantiert über die Stetigkeit von φ in allen Punkten $\alpha \in m_G$ hinaus, daß in der Nachbarschaft eines jeden Punktes α , dessen Träger P ein gewöhnlicher Punkt von \mathfrak{M}_G ist, φ eine topologische Abbildung ist.

Im Raum m_G ist sogar, da \mathfrak{M}_G im C^n liegt, auf natürliche Weise eine komplexe Struktur gegeben. Es läßt sich zeigen, was hier im einzelnen nicht ausgeführt werden soll, daß jede Komponente von m_G (= maximale zusammenhängende Teilmenge von m_G) mit dieser komplexen Struktur ein RIEMANNSCHE Gebiet¹⁴⁾ ist.

Von H. CARTAN wurde bewiesen:

Ist \mathfrak{M}_G eine analytische Menge in G und m_G der \mathfrak{M}_G zugeordnete topologische Raum, so wird durch die Abbildung φ jede Komponente von m_G auf eine in G irreduzible analytische Menge \mathfrak{F}_G abgebildet. Eine analytische Menge \mathfrak{M}_G ist genau dann irreduzibel in G , wenn der \mathfrak{M}_G zugeordnete topologische Raum m_G zusammenhängend ist. Eine analytische Menge \mathfrak{M}_G ist eindeutig darstellbar als endliche oder abzählbar unendliche, unverkürzbare Vereinigung von in G irreduziblen, analytischen Mengen.

Hieraus folgt:

Satz 5: *Ist \mathfrak{M}_G eine irreduzible analytische Menge im Gebiete G , so ist m_G reindimensional in G .*

Beweis: Sei m_G der zu \mathfrak{M}_G gehörende, wie oben erklärte topologische Raum. Wir betrachten in m_G die Funktion

$$f(\alpha) = \dim_{\varphi(\alpha)}(\mathfrak{M}_G).$$

¹⁴⁾ Vgl. die in ¹²⁾ zitierte Arbeit von H. BEHNKE u. K. STEIN.

Aus Satz 3. c) folgt, daß die Dimension einer lokal irreduziblen analytischen Menge lokal-konstant ist. Daher ist $f(\alpha)$ lokal-konstant. Da nach dem Satz von CARTAN m_G zusammenhängend ist, ist $f(\alpha)$ auf m_G überhaupt konstant. Es ergibt sich jetzt unmittelbar

Satz 6: Eine im Gebiete G analytische Menge M_G läßt sich stets darstellen in der Gestalt

$$M_G = M_G^0 \cup \dots \cup M_G^n,$$

wo jeweils M_G^k ($k = 0, 1, \dots, n$) eine entweder leere oder in G rein k -dimensionale analytische Menge ist.

Beweis: Ist $\sum^{(\mu)} M_G$ eine Zerlegung von M_G in irreduzible analytische Mengen, so sei M_G^k die Vereinigung aller k -dimensionalen Komponenten dieser Zerlegung. Diese Vereinigung bildet offenbar eine analytische Menge in G , die, falls sie nicht leer ist, wegen Satz 3 rein k -dimensional ist.

Zur Vorbereitung des folgenden benötigen wir noch einige weitere Sätze.

Satz 7: Sei B ein beschränkter Bereich¹⁵⁾ im C^n ; ferner \mathcal{E}^d eine d -dimensionale analytische Ebene ($0 \leq d \leq n-1$) und $\tilde{\mathcal{E}} = B \cap \mathcal{E}^d$ der in B gelegene Teil von \mathcal{E}^d . (Es ist zugelassen, daß $\tilde{\mathcal{E}}$ leer ist.) In $B - \tilde{\mathcal{E}}$ sei eine analytische Menge M gegeben. Ist dann M nicht rein nulldimensional, so besitzt M Punkte in beliebiger Nähe des Randes von B .

Es genügt, zum Beweise $d = n-1$ anzunehmen; denn ist $d < n-1$, so wählen wir eine analytische Hyperebene \mathcal{E}^{n-1} , welche \mathcal{E}^d umfaßt, und betrachten M in $B - (B \cap \mathcal{E}^{n-1})^{15a)}$. Wir wenden vollständige Induktion nach n an.

Die Behauptung ist richtig für $n=1$, da in diesem Falle M sicher ein volles Komponentengebiet des Bereiches $B - \tilde{\mathcal{E}}$ ganz umfaßt.

Angenommen, der Satz sei im Raum von $n-1$ komplexen Veränderlichen allgemein bewiesen.

Die im C^n mit B zugleich vorgegebene Ausnahmehyperebene \mathcal{E}^{n-1} darf als die analytische Hyperebene $z_1 = 0$ vorausgesetzt werden. Die analytische Menge M ist in $B - \tilde{\mathcal{E}}$ abgeschlossen. Gleiches trifft zu für diejenige analytische Teilmenge \tilde{M} von M , die aus allen denjenigen Punkten von M besteht, in denen M von größerer als nullter Dimension ist. (Die Punkte von M , in denen M 0-dimensional ist, sind nach Definition der Dimension isolierte Punkte von M .)

Wir betrachten auf \tilde{M} die Funktion $f(z_1, \dots, z_n) = z_1$; f ist auf \tilde{M} beschränkt. Sei $M = \text{Max} |f(z_1, \dots, z_n)|$, wo (z_1, \dots, z_n) alle Punkte von \tilde{M} durchlaufe.

¹⁵⁾ Als Bereich wird eine offene, nicht notwendig zusammenhängende Punktmenge bezeichnet.

^{15a)} \mathcal{E}^{n-1} ist ferner so zu wählen, daß nicht alle Punkte, in denen M von größerer als nullter Dimension ist, auf \mathcal{E}^{n-1} liegen.

Wäre nun unsere Behauptung falsch, so müßte M von $|f(z_1, \dots, z_n)|$ notwendig in einem inneren Punkte von $B - \tilde{E}$ auf \tilde{M} angenommen werden; es sei $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ ein solcher Punkt mit $M = |z_1^{(0)}| > 0$. Wir bringen \mathfrak{M} mit der analytischen Hyperebene

$$\mathbb{E}_0^{n-1}: \{z_1 = z_1^{(0)}\}$$

zum Schnitt. Es sind zwei Fälle möglich.

Entweder ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathbb{E}_0^{n-1}$ nicht rein nulldimensional. Fassen wir dann \mathfrak{M}_1 als analytische Menge im $(n-1)$ -dimensionalen Bereich $B^* = B \cap \mathbb{E}_0^{n-1}$ des Raumes der (auf \mathbb{E}_0^{n-1} laufenden) $(n-1)$ komplexen Veränderlichen z_2, \dots, z_n auf, so ist auch dort \mathfrak{M}_1 nicht rein nulldimensional und auf \mathfrak{M}_1 und B^* anstelle von \mathfrak{M} und B treffen die Voraussetzungen unseres Satzes zu (eine Ausnahmemenge \tilde{E} ist nicht vorhanden). Auf Grund der Induktionsvoraussetzung liegen daher Punkte von \mathfrak{M}_1 in beliebiger Nähe des Randes von B^* , also auch Punkte von \mathfrak{M} in beliebiger Nähe des Randes von B . Oder $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathbb{E}_0^{n-1}$ ist rein nulldimensional. Dann besteht \mathfrak{M}_1 in einer Umgebung von P_0 nur aus dem einen Punkte P_0 , und \mathfrak{M} hat in P_0 die Dimension 1. Es gibt in einer geeigneten in $B - \tilde{E}$ enthaltenen Umgebung

$$U(P_0): \{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon_n\}$$

eine $\mathfrak{M} \cap U(P_0)$ umfassende analytische Menge \mathfrak{M}' , die durch Gleichungen

$$\omega_2(z_2; z_1) = 0, \dots, \omega_n(z_n; z_1) = 0$$

dargestellt wird mit den in Satz 1 nebst Zusatz I angegebenen Eigenschaften. Dabei kann $U(P_0)$ so klein gewählt werden, daß die Diskriminanten der ausgezeichneten Pseudopolynome $\omega_s(z_s; z_1)$ höchstens im Punkte $z_1 = z_1^{(0)}$ des Kreises $|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1$ der z_1 -Ebene verschwinden. Zu jedem $z_1^* \neq z_1^{(0)}$ aus $|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1$ gehört daher wenigstens ein Punkt $P^*(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ aus $U(P_0)$, der zugleich auf \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' liegt und in dessen Nachbarschaft \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' übereinstimmen. \mathfrak{M}' hat in P^* sicher die Dimension 1, also auch \mathfrak{M} ; P^* liegt mithin sogar auf \tilde{M} . z_1^* kann insbesondere so gewählt werden, daß $|z_1^*| > |z_1^{(0)}|$ ist. Dann aber besitzt $f(z_1, \dots, z_n) = z_1$ in P^* einen größeren Absolutbetrag als in P_0 , womit ein Widerspruch hergestellt ist.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Satz 8: \mathfrak{M}_G sei eine rein k -dimensionale analytische Menge im Gebiete G . \mathfrak{A} sei eine auf \mathfrak{M}_G dicht liegende Punktmenge. \mathfrak{H} sei eine analytische Hyperebene, die keinen Punkt von \mathfrak{A} enthält. Dann ist $\mathfrak{M}_G \cap \mathfrak{H}$ eine entweder leere oder rein $(k-1)$ -dimensionale analytische Menge in G .^{15b)}

Beweis: $^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_G \cap \mathfrak{H}$ ist sicher eine in G analytische Menge. Ist $^*\mathfrak{M}$ nicht leer, so sei P_0 ein beliebiger Punkt von $^*\mathfrak{M}$.

^{15b)} Satz 8 bleibt richtig, wenn \mathfrak{A} durch eine Punktmenge, die auf jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{M}_G wenigstens einen Punkt besitzt, und \mathfrak{H} durch eine in G rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge ersetzt werden. Für das folgende genügt die obige Aussage.

1. $*\mathfrak{M}$ ist in P_0 mindestens $(k-1)$ -dimensional.

Wäre $\dim_{P_0}(*\mathfrak{M}) = l < k-1$, so gäbe es eine $(n-l)$ -dimensionale analytische Ebene \mathfrak{E}^{n-l} durch P_0 , die $*\mathfrak{M}$ in einer Umgebung $V(P_0)$ nur in P_0 selbst schneidet. Dann wäre aber $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}^{n-l} \cap \mathfrak{S}$ eine analytische Ebene der Dimension $n-l-1$ oder $n-l$, die \mathfrak{M}_G in $V(P_0)$ nur im Punkte P_0 schneidet.

Also wäre $\dim_{P_0}(\mathfrak{M}_G) \leq l+1 < k$ im Widerspruch zu $\dim_{P_0}(\mathfrak{M}_G) = k$.

2. $*\mathfrak{M}$ ist in P_0 höchstens $(k-1)$ -dimensional. Wäre $\dim_{P_0}(*\mathfrak{M}) > k-1$, so müßte wegen $*\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_G$ und $\dim_{P_0}(\mathfrak{M}) = k$ gelten: $\dim_{P_0}(\mathfrak{M}_G) = k$.

Sei \mathfrak{E}^{n-k} eine $(n-k)$ -dimensionale analytische Ebene durch P_0 , die \mathfrak{M}_G , also auch $*\mathfrak{M}$, in der Nachbarschaft von P_0 nur in P_0 schneidet; es darf angenommen werden, daß \mathfrak{E}^{n-k} die Ebene $\{z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}\}$ ist. \mathfrak{M}_G und $*\mathfrak{M}$ lassen sich dann jeweils in einer Umgebung $U(P_0)$ bzw. $U^*(P_0)$ einbetten in analytische Mengen \mathfrak{M}' bzw. $*\mathfrak{M}'$, so daß für $\mathfrak{M}_G, \mathfrak{M}'$ in $U(P_0)$ bzw. für $*\mathfrak{M}, *\mathfrak{M}'$ in $U^*(P_0)$ die Aussagen des Satzes I nebst Zusatz I erfüllt sind, für $\mathfrak{M}_G, \mathfrak{M}'$ in $U(P_0)$ darüber hinaus noch die Aussagen von Zusatz II. Wie oben sei \mathfrak{V} bzw. \mathfrak{V}^* im Raume C^k der Variablen z_1, \dots, z_k die Vereinigung der Diskriminantenflächen der zu \mathfrak{M}' bzw. $*\mathfrak{M}'$ gehörigen Pseudopolynome $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ bzw. $*\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$. Sei nun $P_1(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$ ein Punkt von $*\mathfrak{M}$ in $U(P_0) \cap U^*(P_0)$, der nicht über $\mathfrak{V} \cup \mathfrak{V}^*$ liegt und in dessen Nachbarschaft $*\mathfrak{M}$ und $*\mathfrak{M}'$ übereinstimmen; ein solcher Punkt P_1 existiert auf Grund von Zusatz I, 5. zu Satz 1. Dann lassen sich \mathfrak{M}' und $*\mathfrak{M}'$ in einer in $U(P_0) \cap U^*(P_0)$ enthaltenen Umgebung $\tilde{U}(P_1)$ darstellen durch Linearfaktoren der ω_n bzw. der $*\omega_n$ in der Gestalt

$$(1) \quad \mathfrak{M}': \begin{cases} (z_{k+1} - z_{k+1}^{(1)}) + A_0^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \\ \vdots \\ (z_n - z_n^{(1)}) + A_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \end{cases}$$

bzw.

$$(2) \quad *\mathfrak{M}': \begin{cases} (z_{k+1} - z_{k+1}^{(1)}) + B_0^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \\ \vdots \\ (z_n - z_n^{(1)}) + B_0^{(n)}(z_1, \dots, z_k) = 0 \end{cases}$$

mit $A_0^{(\kappa)}(z_1^{(1)}, \dots, z_k^{(1)}) = B_0^{(\kappa)}(z_1^{(1)}, \dots, z_k^{(1)}) = 0$ ($\kappa = k+1, \dots, n$). Auf Grund von Zusatz II, 7. zu Satz 1 gibt es eine in $\tilde{U}(P_1)$ enthaltene Umgebung $U(P_1)$, so daß

$$\mathfrak{M}_G \cap U(P_1) = \mathfrak{M}' \cap U(P_1).$$

Ebenso existiert auf Grund der Wahl von P_1 eine in $\tilde{U}(P_1)$ enthaltene Umgebung $U^*(P_1)$, so daß

$$*\mathfrak{M} \cap U^*(P_1) = *\mathfrak{M}' \cap U^*(P_1).$$

In $U(P_1) \cap U^*(P_1)$ wird daher \mathfrak{M}_G genau durch (1) und $*\mathfrak{M}$ genau durch (2) gegeben. Da $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}_G$, muß notwendig $B_0^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k) = A_0^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k)$ ($\kappa = k+1, \dots, n$) in einer Nachbarschaft von $(z_1^{(1)}, \dots, z_k^{(1)})$ gelten; \mathfrak{M}_G und $*\mathfrak{M}$ stimmen also in einer vollen Umgebung von P_1 miteinander überein. Dem

widerspricht aber, daß P_1 Häufungspunkt der auf \mathcal{M}_0 dichtliegenden Punktmenge \mathcal{A} ist, die ihrerseits keinen Punkt mit $^*\mathcal{M}$ gemeinsam hat. — Satz 8 ist bewiesen.

Satz 9: Sei B ein Bereich im C^n , der den Koordinatenanfang O enthält, und \mathcal{E}^k der in B gelegene Teil der analytischen Ebene $\{z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$. In $B - \mathcal{E}^k$ sei eine rein k -dimensionale analytische Menge \mathcal{M}^k gegeben. Dann gibt es eine $(n - k)$ -dimensionale analytische Ebene \mathcal{E}^{n-k} durch O , die \mathcal{E}^k und \mathcal{M}^k jeweils höchstens in isolierten Punkten schneidet.

Beweis: Wir wenden vollständige Induktion nach k an. Für $k = 0$ und beliebiges n ist die Behauptung trivial: es ist $\mathcal{E}^{n-k} = C^n$ zu setzen.

Die Behauptung sei für beliebiges n und alle k' mit $k' < k \leq n$ richtig. Wir wählen auf \mathcal{M}^k eine dort dicht liegende Punktfolge Q_ν ($\nu = 1, 2, \dots$); ferner auf \mathcal{E}^k einen Punkt Q_0 , der von O verschieden ist. Es gibt dann nach dem weiter unten bewiesenen Hilfssatz 3 eine analytische Hyperebene \mathcal{H}^{n-1} durch O , die kein Q_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) enthält. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf \mathcal{H}^{n-1} als die Hyperebene $z_1 = 0$ angenommen werden; nötigenfalls ist eine passende lineare Koordinatentransformation auszuführen. Der Durchschnitt $\mathcal{H}^{n-1} \cap \mathcal{M}^k$ ist entweder leer oder nach Satz 7 rein $(k-1)$ -dimensional. Ist $\mathcal{H}^{n-1} \cap \mathcal{M}^k$ leer, so ist die analytische Ebene $\{z_1 = 0, \dots, z_k = 0\}$ eine gesuchte analytische Ebene \mathcal{E}^{n-k} . Ist aber $\mathcal{H}^{n-1} \cap \mathcal{M}^k$ nicht leer, so betrachten wir $\mathcal{M} = \mathcal{H}^{n-1} \cap \mathcal{M}^k$ als Punktmenge des Bereiches $B' = \mathcal{H}^{n-1} \cap B$ des Raumes C^{n-1} der $(n-1)$ -komplexen Veränderlichen $z'_1 = z_2, \dots, z'_{n-1} = z_n$. \mathcal{M} ist in B' eine analytische Menge und offenbar rein $(k-1)$ -dimensional. Für B' , $\mathcal{E}^{k-1} = \mathcal{E}^k \cap \mathcal{H}^{n-1}$ und $\mathcal{M}^{k-1} = \mathcal{M}$ anstatt von B , \mathcal{E}^k und \mathcal{M}^k sind jetzt die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Es gibt also nach Induktionsvoraussetzung durch $(z'_1, \dots, z'_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ im C^{n-1} eine analytische Ebene $^*\mathcal{E}$ der Dimension $(n-1) - (k-1) = n-k$, die \mathcal{M}^{k-1} und die analytische Ebene $\{z'_k = \dots = z'_{n-1} = 0\}$ nur in isolierten Punkten schneidet. Wird $^*\mathcal{E}$ als Punktmenge im Raume der z_1, \dots, z_n betrachtet, so ist $^*\mathcal{E}$ eine gesuchte analytische Ebene \mathcal{E}^{n-k} .

Hilfssatz 3: Ist \mathcal{A} eine höchstens abzählbare Punktmenge des C^n , so gibt es durch jeden Punkt $P \notin \mathcal{A}$ eine analytische Hyperebene, die keinen Punkt von \mathcal{A} enthält.

Beweis: Wir fassen \mathcal{A} als Punktmenge im komplex-projektiven Raum \bar{C}^n auf. Nach dem Dualitätsprinzip genügt es, folgendes zu zeigen:

Ist $\mathcal{A}' = \{\mathcal{H}_\nu^{n-1}\}$ eine höchstens abzählbare Menge von analytischen Hyperebenen des \bar{C}^n , so gibt es auf jeder Hyperebene $\mathcal{H}_\nu^{n-1} \notin \mathcal{A}'$ einen Punkt, der auf keiner der Hyperebenen \mathcal{H}_μ^{n-1} liegt.

Wir wenden vollständige Induktion nach n an. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sie sei für $n-1$ bewiesen. Die Hyperebene \mathcal{H}^{n-1} ist ein $(n-1)$ -dimensionaler komplex-projektiver Raum \bar{C}^{n-1} , der von den Hyperebenen der Menge \mathcal{A}' in einer höchstens abzählbaren Menge $\tilde{\mathcal{A}}'$ von $(n-2)$ -dimensionalen analytischen Ebenen \mathcal{H}_ν^{n-2} geschnitten wird. Diese Schnittebenen sind ihrerseits analytische Hyperebenen im \bar{C}^{n-1} . Sei \mathcal{H}^{n-2} eine nicht zu $\tilde{\mathcal{A}}'$ gehörende

analytische Hyperebene des \bar{C}^{n-1} . Auf \tilde{A}' , \mathfrak{H}^{n-2} im \bar{C}^{n-1} trifft dann die Induktionsvoraussetzung zu, es gibt also einen Punkt auf \mathfrak{H}^{n-2} , der auf keiner der Ebenen \mathfrak{H}_r^{n-2} liegt. Dieser Punkt gehört dann im \bar{C}^n keiner der Hyper-ebenen \mathfrak{H}_r^{n-1} an.

Satz 10: \mathcal{M}_G sei eine analytische Menge im Gebiete G ; \mathfrak{F}_G sei eine irreduzible Komponente von \mathcal{M}_G . Dann bilden die auf \mathfrak{F}_G liegenden gewöhnlichen Punkte von \mathcal{M}_G eine zusammenhängende Menge.

Es ist zweckmäßig, dem Beweise zwei allgemeine Aussagen über topologische Räume voranzustellen:

a) Ist \mathfrak{A} eine offene, dichte und zusammenhängende Menge in einem topologischen Raum \mathfrak{R} , so ist auch jede \mathfrak{A} umfassende Menge \mathfrak{B} von \mathfrak{R} zusammenhängend.

b) Ist \mathfrak{A} eine offene, dichte Menge in einem zusammenhängenden topologischen Raum \mathfrak{R} und gibt es zu jedem nicht zu \mathfrak{A} gehörenden Punkt P eine Umgebung $U(P)$, so daß die Menge $U(P) \cap \mathfrak{A}$ zusammenhängend ist, so ist \mathfrak{A} selbst zusammenhängend.

Zum Beweise von a) gehe man indirekt vor. Aus einer Zerlegung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$$

mit nichtleeren, disjunkten, in \mathfrak{B} offenen Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ gewinnt man wegen $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ die Zerlegung

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_1) \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_2).$$

Die Mengen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2$) sind offen (denn \mathfrak{M}_i ist in \mathfrak{B} , also auch in der offenen Menge \mathfrak{A} offen), nichtleer (denn eine in einem topologischen Raum \mathfrak{R} dichte Menge \mathfrak{A} besitzt in jeder offenen Menge Punkte) und punktfremd. Also wäre \mathfrak{A} nicht zusammenhängend im Widerspruch zur Voraussetzung. a) ist bewiesen.

Zum Beweise von b) gehe man analog von einer Zerlegung

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$$

mit nichtleeren, disjunkten, in \mathfrak{A} offenen Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ aus.

Da \mathfrak{A} in \mathfrak{R} dicht liegt, so folgt

$$\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{M}_1} \cup \overline{\mathfrak{M}_2}.$$

Da \mathfrak{R} zusammenhängend ist, muß es einen Punkt P geben, der in der Menge $\overline{\mathfrak{M}_1} \cap \overline{\mathfrak{M}_2}$ liegt. Läge P in \mathfrak{A} , etwa in \mathfrak{M}_1 , so gäbe es ein $V(P) \subseteq \mathfrak{M}_1$. Da $P \in \overline{\mathfrak{M}_2}$, gäbe es in $V(P)$ ein $Q \in \mathfrak{M}_2$. Dann ist aber $Q \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ ein Widerspruch zur Disjunktheit von \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 . Da mithin $P \notin \mathfrak{A}$, so gibt es ein $U(P)$, so daß $U(P) \cap \mathfrak{A}$ zusammenhängend ist. Aus (1) folgt aber

$$U(P) \cap \mathfrak{A} = (U(P) \cap \mathfrak{M}_1) \cup (U(P) \cap \mathfrak{M}_2);$$

dabei sind die Mengen $U(P) \cap \mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2$) offen in $U(P)$, nichtleer (wegen $P \in \overline{\mathfrak{M}_1} \cap \overline{\mathfrak{M}_2}$) und disjunkt. Da dies ein Widerspruch ist, ist b) bewiesen.

Zum Beweise von Satz 10 knüpfen wir an Folgerung 2 zu Satz 2 an. Dort wurde insbesondere gezeigt, daß man jeder in einem Punkt P irreduziblen

analytischen Menge \mathfrak{P}_P eine Umgebung $U(P)$ zuordnen kann, derart, daß $\mathfrak{P}_P \cap U(P)$ die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden Menge \mathfrak{P}_P^* ist, die nur gewöhnliche Punkte von $\mathfrak{P}_P \cap U(P)$ enthält. Aus a) folgt dann (man setze $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_P^*$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_P \cap U(P)$), daß auch die Menge der gewöhnlichen Punkte \mathfrak{P}_P von $\mathfrak{P}_P \cap U(P)$ zusammenhängend ist.

Nunmehr betrachten wir den \mathfrak{M}_G zugeordneten topologischen Raum m_G . Der irreduziblen Komponente \mathfrak{F}_G von \mathfrak{M}_G entspricht eine (zusammenhängende) Komponente f_G von m_G . In m_G fassen wir die Menge n aller derjenigen Punkte $\alpha = (P, p_P)$ ins Auge, deren Träger P gewöhnliche Punkte von \mathfrak{M}_G sind. n ist eine offene Menge. Das ergibt sich einfach daraus, daß die Menge $\varphi(n)$ der gewöhnlichen Punkte von \mathfrak{M}_G offen ist und φ eine topologische Abbildung von n auf $\varphi(n)$ ist. Die Menge n liegt ferner dicht in m_G . Ist nämlich $\alpha = (P, p_P)$ ein beliebiger Punkt von m_G , so sei \mathfrak{P}_P ein analytischer Repräsentant von p_P , der nur Punkte von \mathfrak{M}_G enthält. Auf \mathfrak{P}_P gibt es eine gegen P konvergierende Folge P_r gewöhnlicher Punkte von \mathfrak{M}_G . Dann ist $\alpha_r = (P_r, p_{P_r})$, wo der Primkeim p_{P_r} von \mathfrak{P}_P in P_r erzeugt wird, eine gegen α konvergierende Punktfolge aus n . Wir bilden nun die Menge $n^* = n \cap f_G$. n^* ist offen und dicht in f_G . Ist $\alpha = (P, p_P)$ ein nicht zu n^* gehörender Punkt von f_G , so gibt es nach dem bereits bewiesenen in einer geeigneten Umgebung $U(P)$ einen in \mathfrak{F}_G enthaltenen analytischen Repräsentanten \mathfrak{P}_P von p_P , derart, daß die gewöhnlichen Punkte $\tilde{\mathfrak{P}}_P$ von $\mathfrak{P}_P \cap U(P)$ zusammenhängend sind. Die Menge $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{P}}_P)$ besteht aus denjenigen Punkten der durch $U(P)$ und \mathfrak{P}_P bestimmten Umgebung $U(\alpha) \subseteq f_G$, die in n^* liegen. Da φ auf $\tilde{\mathfrak{P}}_P$ eine topologische Abbildung und $\tilde{\mathfrak{P}}_P$ zusammenhängend ist, gibt es also zu jedem Punkt $\alpha \notin n^*$ eine Umgebung $U(\alpha)$, derart, daß $U(\alpha) \cap n^*$ zusammenhängend ist. Nach b) (man setze $\mathfrak{A} = n^*$, $\mathfrak{R} = f_G$) ist daher n^* selbst zusammenhängend. Dann ist aber auch die Menge $\varphi(n^*)$ der gewöhnlichen Punkte von \mathfrak{M}_G in \mathfrak{F}_G zusammenhängend, da φ eine topologische Abbildung von n^* auf $\varphi(n^*)$ ist.

Korollar: Die gewöhnlichen Punkte einer im Gebiete G irreduziblen analytischen Menge \mathfrak{M}_G bilden eine zusammenhängende Menge.

3. Fortsetzungen und wesentliche Singularitäten analytischer Mengen. —

Unter einer Fortsetzung einer im Gebiete G analytischen Menge \mathfrak{M}_G auf ein Gebiet $\tilde{G} \supseteq G$ wird eine in \tilde{G} analytische Menge $\mathfrak{M}_{\tilde{G}}$ verstanden, für die gilt

$$\mathfrak{M}_{\tilde{G}} \cap G = \mathfrak{M}_G.$$

Ist eine Fortsetzung der analytischen Menge \mathfrak{M}_G auf \tilde{G} überhaupt möglich, so existiert auch eine kleinste Fortsetzung, nämlich der Durchschnitt aller Fortsetzungen^{15c)}.

Ist P ein Randpunkt von G , so heißt P *regulärer Punkt* in bezug auf \mathfrak{M}_G , wenn es eine Umgebung $U(P)$ und eine Fortsetzung von \mathfrak{M}_G auf das Gebiet $G \cup U(P)$ gibt. Andernfalls heißt P ein *wesentlicher singulärer Randpunkt*

^{15c)} Daß der Durchschnitt analytischer Mengen wieder eine analytische Menge ist, folgt aus den Sätzen des Abschnittes 1. Die obige Aussage wird im folgenden nicht benötigt.

von \mathfrak{M}_G . Ein Randpunkt von G , der singulärer Randpunkt von \mathfrak{M}_G ist, ist stets Häufungspunkt von Punkten von \mathfrak{M}_G .

Zunächst beweisen wir:

Satz 11: Sei G ein Gebiet in C^n und \mathfrak{E}^k ($1 \leq k < n$) der in G gelegene Teil einer k -dimensionalen analytischen Ebene. \mathfrak{M}^k sei eine in $G - \mathfrak{E}^k$ rein k -dimensionale analytische Menge. Zu jedem Punkte P von \mathfrak{E}^k existiere eine Umgebung $V(P)$ und eine in $V(P)$ höchstens k -dimensionale analytische Menge $\mathfrak{M}_{V(P)}$, derart, daß gilt: $\mathfrak{M}_{V(P)} \supseteq \mathfrak{M}^k \cap V(P)$. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}^k}$ von \mathfrak{M}^k in G eine Fortsetzung (offenbar die kleinste) von \mathfrak{M}^k auf G , und $\overline{\mathfrak{M}^k}$ ist in G rein k -dimensional.

Beweis: Ist $\overline{\mathfrak{M}^k} \cap \mathfrak{E}^k$ leer, so ist nichts zu beweisen. Sei also $\overline{\mathfrak{M}^k} \cap \mathfrak{E}^k$ nicht leer; sei $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ ein Punkt von $\overline{\mathfrak{M}^k} \cap \mathfrak{E}^k$. Die in $V(P_0)$ vorliegende analytische Menge $\mathfrak{M}_{V(P_0)}$ ist in P_0 höchstens k -dimensional. Andererseits ist P_0 Häufungspunkt von Punkten auf \mathfrak{M}^k , in denen $\mathfrak{M}_{V(P_0)}$ (als \mathfrak{M}^k dort umfassende analytische Menge) genau die Dimension k hat. Nach Satz 3 a) ist daher $\mathfrak{M}_{V(P_0)}$ in P_0 k -dimensional, und gleiches gilt für die in $V(P_0)$ analytische Menge $^*\mathfrak{M} = (\mathfrak{E}^k \cap V(P_0)) \cup \mathfrak{M}_{V(P_0)}$. Sei \mathfrak{E}^{n-k} eine analytische Ebene der Dimension $n - k$ durch P_0 , die $^*\mathfrak{M}$ innerhalb einer Umgebung von P_0 nur in P_0 schneidet. Ohne Einschränkung darf \mathfrak{E}^k als ein Stück der Ebene $\{z_{k+1} = z_{k+1}^{(0)}, \dots, z_n = z_n^{(0)}\}$ und \mathfrak{E}^{n-k} als die Ebene $\{z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}\}$ vorausgesetzt werden (nötigenfalls ist eine lineare Koordinatentransformation vorzunehmen). Dann läßt sich $^*\mathfrak{M}$ innerhalb einer in $V(P_0)$ enthaltenen Polyzylinderumgebung $U(P_0)$ einbetten in eine durch Pseudopolynomgleichungen

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

bestimmte analytische Menge $^*\mathfrak{M}'$ mit den in Satz 1 nebst Zusatz I angegebenen Eigenschaften. Jedes $\omega_\mu(z_\mu; z_1, \dots, z_k)$ besitzt $(z_\mu - z_\mu^{(0)})$ als Faktor, da \mathfrak{E}^k in $^*\mathfrak{M}$, also auch in $^*\mathfrak{M}'$ enthalten ist.

Sei nun $P_1(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$ ein Punkt von \mathfrak{M}^k in $U(P_0) - \mathfrak{E}^k$, der nicht über der Vereinigung \mathfrak{D} der Diskriminantenflächen der $\omega_\mu(z_\mu; z_1, \dots, z_k)$ im Raume C^k der Veränderlichen z_1, \dots, z_k liegt. Ein solcher Punkt P_1 existiert, denn ist $P'(z'_1, \dots, z'_n)$ irgendein Punkt von \mathfrak{M}^k in $U(P_0) - \mathfrak{E}^k$, so gibt es zu jedem k -Tupel $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ in der Nähe von (z'_1, \dots, z'_k) Punkte $\tilde{P}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ von \mathfrak{M}^k in der Nähe von P' , wie sich durch Anwendung von Satz 1 nebst Zusätzen auf \mathfrak{M}^k im Punkte P' ergibt. Seien

$$P_1^{(\mu)}(z_1^{(1)}, \dots, z_k^{(1)}, z_{k+1}^{(\mu)}, \dots, z_n^{(\mu)}) \quad \mu = 1, \dots, m$$

die sämtlichen Punkte von \mathfrak{M}^k in $U(P_0) - \mathfrak{E}^k$, deren erste k Koordinaten mit denen von P_1 übereinstimmen. In jeweils einer Umgebung von $P_1^{(\mu)}$ läßt sich $^*\mathfrak{M}'$ darstellen durch Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} (z_{k+1} - z_{k+1}^{(0)}) + B_\mu^{(k+1)}(z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ &\vdots \\ (z_n - z_n^{(0)}) + B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_k) &= 0, \end{aligned}$$

wo die linken Seiten der Gleichungen (1) Linearfaktoren der $\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k)$ sind. Durch (1) wird dann auch \mathfrak{M}^k in einer Nachbarschaft von $P_1^{(\mu)}$ dargestellt. Die $n-k$ Funktionen $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ ($n = k+1, \dots, n$) sind jeweils innerhalb $Z^k - \mathfrak{V}$ uneingeschränkt regulär fortsetzbar. (Dabei ist Z^k wie in Satz 1 der Polyzylinder $\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varepsilon_1, \dots, |z_k - z_k^{(0)}| < \varepsilon_k\}$ im Raume der Veränderlichen z_1, \dots, z_n). Werden die $B_\mu^{(n)}$ ($n = k+1, \dots, n$) gleichzeitig in $Z^k - \mathfrak{V}$ fortgesetzt, so werden durch (1) stets nur solche Punkte erfaßt, die nicht auf \mathfrak{E}^k liegen. Würde sich nämlich ein Punkt $\bar{P}(z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{E}^k$ ergeben, so müßte gelten:

$$\bar{z}_{k+1} = z_{k+1}^{(0)}, \dots, \bar{z}_n = z_n^{(0)}.$$

Dies würde bedeuten, daß die fortgesetzten Funktionen $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$ die gemeinsame Nullstelle (z_1, \dots, z_n) haben. Nun verschwinden sicher nicht alle $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$ identisch, da dann der Punkt $P_1^{(\mu)}$ auf \mathfrak{E}^k liegen müßte. Sei etwa $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n) \not\equiv 0$. Da die fortgesetzten Funktionen $(z_n - z_n^{(0)}) + B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$ ebenfalls Linearfaktoren der Pseudopolynome ω_n sind, hätte dann $\omega_n(z_n; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ die Doppelwurzel $z_n = z_n^{(0)}$, denn ω_n enthält die beiden (wegen $B_\mu^{(n)} \not\equiv 0$) voneinander verschiedenen Linearfaktoren $z_n - z_n^{(0)}$ und $(z_n - z_n^{(0)}) + B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$. Also müßte (\bar{z}_1, \dots, z_n) auf \mathfrak{V} liegen im Widerspruch zur Voraussetzung.

Bezeichnet \mathfrak{N} die Gesamtheit der Punkte (z_1, \dots, z_n) in $U(P_0) - \mathfrak{E}^k$, für die (z_1, \dots, z_k) zu \mathfrak{V} gehört, so werden also durch (1) bei gleichzeitiger Fortsetzung der $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$ ($n = k+1, \dots, n$) in $Z^k - \mathfrak{V}$ stets Punkte von \mathfrak{M}^k in $U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$ dargestellt. Man erhält so aber auch alle Punkte von \mathfrak{M}^k in $U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$, da man von jedem beliebigen Punkt von \mathfrak{M}^k in $U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$ ausgehen und durch entsprechende analytische Fortsetzung zu Punkten $P(z_1, \dots, z_n)$ mit $z_1 = z_1^{(1)}, \dots, z_k = z_k^{(1)}$ gelangen kann. Wir führen nun Unbestimmte u_{k+1}, \dots, u_n ein und bilden

$$(2) F(u_{k+1}, \dots, u_n; z_1, \dots, z_n) = \prod_{\mu=1}^m \left(\sum_{n=k+1}^n u_n (z_n - z_n^{(0)} + B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)) \right).$$

F ist ein homogenes Polynom m -ten Grades in u_{k+1}, \dots, u_n , dessen Koeffizienten $g_1(z_1, \dots, z_n), \dots, g_s(z_1, \dots, z_n)$ in $U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$ regulär sind. Die $g_\nu(z_1, \dots, z_n)$ sind darüber hinaus in $U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$ eindeutig und lassen sich wegen ihrer Beschränktheit regulär in ganz $U(P_0)$ hinein fortsetzen. Offenbar verschwinden g_1, \dots, g_s für einen Punkt $P \in U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$ genau dann gleichzeitig, wenn rechts in (2) wenigstens ein Faktor in P verschwindet. Das bedeutet, daß ein Punkt $P \in U(P_0) - (\mathfrak{E}^k \cup \mathfrak{N})$ genau dann der durch

$$\begin{aligned} g_1(z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_s(z_1, \dots, z_n) &= 0 \end{aligned}$$

in $U(P_0)$ gegebenen analytischen Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehört, wenn P auf \mathfrak{M}^k liegt. Gleiches gilt aber auch für Punkte P auf \mathfrak{N} , denn die $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$ sind auf

\mathfrak{V} noch stetig (vgl. hierzu die Betrachtungen im Beweise von Satz 2). Ferner ist sicher \mathfrak{M} die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}^k}$ von $\mathfrak{M}^k \cap U(P_0)$ in $U(P_0)$, wiederum wegen des stetigen Verhaltens der $B_\mu^{(n)}(z_1, \dots, z_k)$ auf \mathfrak{V} . $\overline{\mathfrak{M}^k}$ ist in P_0 k -dimensional. Zunächst folgt nämlich aus Satz 3 a): $\dim_{P_0}(\overline{\mathfrak{M}^k}) \geq k$. Andererseits ergibt sich aus $\overline{\mathfrak{M}^k} \cap V(P_0) \subseteq \mathfrak{M}_{V(P_0)}$ (dies gilt wegen $\mathfrak{M}^k \cap V(P_0) \subseteq \mathfrak{M}_{V(P_0)}$) und der Tatsache, daß $\mathfrak{M}_{V(P_0)}$ in P_0 k -dimensional ist: $\dim_{P_0}(\overline{\mathfrak{M}^k}) \leq k$. Satz 11 ist bewiesen.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnittes

Satz 12: Sei G ein Gebiet im C^n und \mathfrak{F}^k ($k < n$) eine rein k -dimensionale analytische Menge in G . Sei ferner \mathfrak{M}^k eine rein k -dimensionale analytische Menge in $G - \mathfrak{F}^k$. Gibt es dann auf jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{F}^k wenigstens einen Punkt, der wesentlich singulärer Randpunkt von \mathfrak{M}^k ist und keiner weiteren irreduziblen Komponente von \mathfrak{F}^k angehört, so ist jeder Punkt auf \mathfrak{F}^k wesentlich singulärer Randpunkt von \mathfrak{M}^k .

Für den Fall $k = n - 1$ wurde dieser Satz von P. THULLEN bewiesen¹⁰⁾. Im folgenden stützen wir uns auf den THULLENSCHEN Satz. Wir führen den Beweis zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß \mathfrak{F}^k in G nur gewöhnliche Punkte besitzt. — Die Menge \mathfrak{S} der auf \mathfrak{F}^k gelegenen singulären Randpunkte von \mathfrak{M}^k ist abgeschlossen. Da jede irreduzible Komponente von \mathfrak{F}^k zusammenhängend ist, wird unser Satz für den angegebenen Spezialfall nachgewiesen sein, wenn wir zeigen, daß \mathfrak{S} auf \mathfrak{F}^k zugleich offen ist.

Sei P ein Häufungspunkt von \mathfrak{M}^k auf \mathfrak{F}^k . Zum Studium der lokalen Eigenschaften von \mathfrak{M}^k in P genügt es, \mathfrak{M}^k in irgendeiner Umgebung von P zu betrachten anstatt im Gesamtgebiet G . Wir führen in einer Umgebung $U(P)$ neue komplexe Koordinaten ein, derart, daß \mathfrak{F}^k in $U(P)$ die Ebene $z_{k+1} = \dots = z_n = 0$ (es mögen die alten Bezeichnungen beibehalten werden) und P der Koordinatenanfang wird. Nach Satz 9 gibt es eine durch P gehende $(n - k)$ -dimensionale analytische Ebene \mathfrak{E}^{n-k} , die \mathfrak{F}^k und \mathfrak{M}^k jeweils in isolierten Punkten schneidet. Ohne Einschränkung (nötigenfalls ist noch eine Koordinatentransformation vorzunehmen) darf \mathfrak{E}^{n-k} als die Ebene $z_1 = \dots = z_k = 0$ vorausgesetzt werden. Es gibt sicher ein $\varepsilon > 0$, so daß der auf \mathfrak{E}^{n-k} gelegene $(n - k)$ -dimensionale Polyzylinder

$$Z^{n-k}: \{z_1 = \dots = z_k = 0, |z_{k+1}| < \varepsilon, \dots, |z_n| < \varepsilon\}$$

noch ganz in $U(P)$ enthalten ist und auf seinem Rande kein Punkt von \mathfrak{M}^k liegt. Für genügend kleines $\varepsilon' > 0$ liegt dann der Polyzylinder

$$Z^n: \{|z_1| < \varepsilon', \dots, |z_k| < \varepsilon', |z_{k+1}| < \varepsilon, \dots, |z_n| < \varepsilon\}$$

ganz im Inneren von $U(P)$. Darüber hinaus gilt, daß für ein geeignetes δ mit $0 < \delta < \varepsilon'$ jede analytische Ebene

$$\mathfrak{E}^{n-k}(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) : \{z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}\}$$

mit $|z_1^{(0)}| \leq \delta, \dots, |z_k^{(0)}| \leq \delta$ die analytische Menge \mathfrak{M}^k innerhalb $\{|z_n| < \varepsilon, x = k + 1, \dots, n\}$ höchstens in isolierten Punkten trifft. Gäbe es kein solches

¹⁰⁾ Vgl. die in *) zitierte Arbeit von P. THULLEN.

δ , so würde für eine gegen $(0, \dots, 0)$ strebende Folge $(z_1^{(v)}, \dots, z_k^{(v)})$ jede Ebene $\mathfrak{E}^{n-k}(z_1^{(v)}, \dots, z_k^{(v)})$ die analytische Menge \mathfrak{M}^k innerhalb $\{|z_\kappa| \leq \varepsilon, \kappa = k+1, \dots, n\}$ in einer nicht rein nulldimensionalen analytischen Menge $\mathfrak{M}(z_1^{(v)}, \dots, z_k^{(v)})$ schneiden. Jede dieser $\mathfrak{M}(z_1^{(v)}, \dots, z_k^{(v)})$ hätte dann nach Satz 7 Punkte in beliebiger Nähe des Randes des in $\mathfrak{E}^{n-k}(z_1^{(v)}, \dots, z_k^{(v)})$ gelegenen $(n-k)$ -dimensionalen Polyzylinders

$$Z^{n-k}(z_1^{(v)}, \dots, z_k^{(v)}) : \{z_1 = z_1^{(v)}, \dots, z_k = z_k^{(v)}, |z_\kappa| \leq \varepsilon, \kappa = k+1, \dots, n\}.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{M}^k müßte \mathfrak{M}^k dann notwendig auch Punkte auf dem Rande von $Z^{n-k} = Z^{n-k}(0, \dots, 0)$ besitzen, was unserer Annahme über ε widerspricht. Demnach gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft; wir können ferner δ so wählen, daß für $|z_1| \leq \delta, \dots, |z_k| \leq \delta$ kein Punkt von \mathfrak{M}_k auf dem Rande von $Z^{n-k}(z_1, \dots, z_k)$ liegt.

Wir bilden nun jeweils die Projektion $\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ des in

$$\bar{Z}_1 : \{|z_1| \leq \delta, \dots, |z_k| \leq \delta, |z_{k+1}| \leq \varepsilon, \dots, |z_n| \leq \varepsilon, |z_{k+1}| + \dots + |z_n| > 0\}$$

liegenden Teils $\tilde{\mathfrak{M}}^k$ von \mathfrak{M}^k in das Zylindergebiet

$$Z_\kappa^{k+1} : \{|z_1| \leq \delta, \dots, |z_k| \leq \delta, 0 < |z_\kappa| \leq \varepsilon\}$$

des Raumes O_κ^{k+1} der $k+1$ Veränderlichen $z_1, \dots, z_k, z_\kappa$ ($\kappa = k+1, \dots, n$).

$\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ ist eine rein k -dimensionale analytische Menge in Z_κ^{k+1} . Zunächst liegen über einem Punkt $\tilde{Q}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \tilde{z}_\kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ nur endlich viele Punkte Q' von \mathfrak{M}^k ; andernfalls hätten diese Punkte Q' auf $\tilde{\mathfrak{M}}^k$ einen Häufungspunkt, was dem Umstand widerspricht, daß $\tilde{\mathfrak{M}}^k$ von der Ebene $\mathfrak{E}^{n-k}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$ höchstens in isolierten Punkten geschnitten wird. Seien Q'_ρ ($\rho = 1, \dots, r$) sämtliche über \tilde{Q} liegende Punkte von \mathfrak{M}^k . Da $\tilde{\mathfrak{M}}^k$ in der Nachbarschaft eines jeden Punktes Q'_ρ rein k -dimensional ist und von der Ebene $\mathfrak{E}^{n-k}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k)$, in der Nähe von Q'_ρ nur in Q'_ρ geschnitten wird, so existiert nach Zusatz II, 6. zu Satz 1 zu jedem Q'_ρ eine Polyzylinderumgebung $U(Q'_\rho)$, derart, daß die Projektion von $\tilde{\mathfrak{M}}^k \cap U(Q'_\rho)$ in den O_κ^{k+1} in einer Umgebung von \tilde{Q} aus der genauen Nullstellenmenge $\mathfrak{N}_\kappa^{(e)}$ eines Pseudopolynoms $\omega_\kappa^{(e)}(z_\kappa; z_1, \dots, z_k)$ besteht. $\mathfrak{N}_\kappa^{(e)}$ ist aber in der Umgebung von \tilde{Q} eine rein k -dimensionale analytische Menge. Da $\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ in einer genügend kleinen Umgebung von \tilde{Q} die Vereinigung von endlich vielen Projektionen $\mathfrak{N}_\kappa^{(e)}$ ist, ist also auch $\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ in der Nachbarschaft von \tilde{Q} eine rein k -dimensionale analytische Menge.

Wir behaupten nun: $\tilde{\mathfrak{M}}^k$ läßt sich genau dann in einen Punkt $P^*(z_1^*, \dots, z_k^*, 0, \dots, 0)$ von $\mathfrak{F}^k : \{z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$ innerhalb

$$\bar{Z}^n : \{|z_1| \leq \delta, \dots, |z_k| \leq \delta, |z_{k+1}| \leq \varepsilon, \dots, |z_n| \leq \varepsilon\}$$

regulär fortsetzen, wenn sich jede Projektion $\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ jeweils regulär in den Punkt $P_\kappa^*(z_1^*, \dots, z_k^*, 0)$ fortsetzen läßt.

In der Tat: Läßt sich $\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ jeweils in P_κ^* hinein fortsetzen, so gibt es nach Satz 11 auch eine Fortsetzung $^*\tilde{\mathfrak{M}}_k^k$ in P_κ^* , die in einer Umgebung von P_κ^*

rein k -dimensional ist. ${}^*\tilde{\mathcal{M}}_n^k$ wird dann von der Ebene $\{z_1 = z_1^*, \dots, z_k = z_k^*\}$ in einer Nachbarschaft von P_n^* höchstens in P_n^* geschnitten, gestattet dort also eine Darstellung durch eine Pseudopolynomgleichung

$$\varphi_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0,$$

wo φ_n in einer Umgebung von P_n^* regulär ist (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Zusatz II zu Satz 1). Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(z_n; z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

stellen im C^n in einer Umgebung $U(P^*)$ eine höchstens k -dimensionale analytische Menge dar (denn jede Ebene $z_1 = z_1^{(0)}, \dots, z_k = z_k^{(0)}$ schneidet sie höchstens in isolierten Punkten), und der in $\tilde{Z}^n \cap U(P^*)$ gelegene Teil dieser analytischen Menge umfaßt dort die analytische Menge $\tilde{\mathcal{M}}^k$. Nach Satz 11 existiert dann eine Fortsetzung von $\tilde{\mathcal{M}}^k$ nach P^* .

Sei umgekehrt $\tilde{\mathcal{M}}^k$ regulär in P^* hinein fortsetzbar; eine solche Fortsetzung sei durch eine in einer Umgebung von P^* analytische Menge ${}^*\mathcal{M}$ gegeben. Wir dürfen $P^* \in {}^*\mathcal{M}$ annehmen, sonst folgt die Behauptung wie oben. Die analytische Ebene

$${}^*\mathcal{E}^{n-k} = \mathcal{E}^{n-k}(z_1^*, \dots, z_k^*): \{z_1 = z_1^*, \dots, z_k = z_k^*\}$$

schneidet ${}^*\mathcal{M}$ in einer Umgebung von P^* nur in P^* . Die analytischen Mengen ${}^*\mathcal{M} \cap {}^*\mathcal{E}^{n-k}$ und $\tilde{\mathcal{M}}^k \cap {}^*\mathcal{E}^{n-k}$ unterscheiden sich nämlich voneinander nur durch den Punkt P^* , denn $\tilde{\mathcal{M}}^k \cap {}^*\mathcal{E}^{n-k}$ besteht höchstens aus isolierten Punkten, ist also höchstens 0-dimensional. Nach Satz 3. b) ist dann auch ${}^*\mathcal{M} \cap {}^*\mathcal{E}^{n-k}$ in P^* 0-dimensional und besteht mithin in einer Umgebung von P^* nur aus dem Punkt P^* . Folglich ist ${}^*\mathcal{M}$ in P^* k -dimensional. Auf Grund von Satz 11 darf ${}^*\mathcal{M}$ dann als rein k -dimensional in einer Umgebung von P^* angenommen werden. Nach Satz 1 nebst Zusätzen läßt sich ${}^*\mathcal{M}$ in einer Umgebung $V(P^*)$ in eine analytische Menge ${}^*\mathcal{M}'$ einbetten, die dort durch Gleichungen

$$\begin{aligned} {}^*\omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) &= 0 \\ \vdots \\ {}^*\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben wird, derart, daß zu jedem Lösungs- $(k+1)$ -Tupel einer einzelnen Gleichung ${}^*\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$ wenigstens ein Punkt von ${}^*\mathcal{M}$ gehört. Demnach wird eine Fortsetzung der Projektion von $\tilde{\mathcal{M}}^k \cap V(P^*)$ in den C_n^{k+1} nach P_n^* durch ${}^*\omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0$ gegeben, und damit ist auch die Fortsetzbarkeit von $\tilde{\mathcal{M}}_n^k$ in P_n^* hinein gesichert.

Ist nun der zu Anfang herausgegriffene Punkt $P(z_1, \dots, z_n) = P(0, \dots, 0)$ singulärer Randpunkt von \mathcal{M}^k , so muß wenigstens für ein α der Punkt $P_\alpha(z_1, \dots, z_k, z_n) = P(0, \dots, 0)$ singulärer Randpunkt von $\tilde{\mathcal{M}}_\alpha^k$ sein. Auf Grund des Satzes von THULLEN ist dann im C_α^{k+1} jeder Punkt der Ebene

$z_n = 0$ innerhalb

$$\bar{Z}_n^{k+1}: \{|z_1| \leq \delta, \dots, |z_k| \leq \delta, |z_n| \leq \varepsilon\}$$

singulärer Randpunkt von \bar{M}_n^k ; also ist auch jeder Punkt von \mathfrak{F}^k innerhalb von \bar{Z}_n singulärer Randpunkt von M^k . Demnach bilden die singulären Randpunkte von M^k auf \mathfrak{F}^k eine offene Menge; womit unser Satz für den angegebenen Spezialfall bewiesen ist.

Als Nebenresultat des bisherigen Beweises sei angemerkt:

Ist ein Punkt P^ der Menge \mathfrak{F}^k (die nur gewöhnliche Punkte enthält) Häufungspunkt von Punkten auf M^k und regulärer Randpunkt in bezug auf M^k , so ist jede Fortsetzung von M^k nach P^* in P^* k -dimensional.*

Gibt es auf jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{F}^k einen regulären Randpunkt von M^k , so folgt aus dem soeben bewiesenen Teil von Satz 12 und aus Satz 11, daß die abgeschlossene Hülle \bar{M}^k von M^k in G eine in ganz G rein k -dimensionale analytische Menge ist.

Wir fahren im Beweis von Satz 12 fort. Es sei jetzt \mathfrak{F}^k eine rein k -dimensionale analytische Menge allgemeiner Art. Besitzt M^k auf jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{F}^k einen gewöhnlichen Punkt von \mathfrak{F}^k als singulären Randpunkt, so ist, da die gewöhnlichen Punkte auf jeder irreduziblen Komponente von \mathfrak{F}^k nach Satz 10 eine zusammenhängende Menge bilden, nach dem bereits bewiesenen jeder gewöhnliche Punkt von \mathfrak{F}^k singulärer Randpunkt von M^k . Damit hat auch jeder Punkt von \mathfrak{F}^k überhaupt diese Eigenschaft, denn jeder nicht gewöhnliche Punkt von \mathfrak{F}^k ist Häufungspunkt gewöhnlicher Punkte von \mathfrak{F}^k . Ist dagegen jeder gewöhnliche Punkt von \mathfrak{F}^k regulärer Punkt in bezug auf M^k , so muß auch jeder nichtgewöhnliche Punkt von \mathfrak{F}^k regulärer Punkt in bezug auf M^k sein. Um dies zu zeigen, benötigen wir

Satz 13: Sei G ein Gebiet im C^n und \mathfrak{F}^l eine l -dimensionale analytische Menge in G ($0 \leq l < n - 1$); sei ferner M^k eine rein k -dimensionale analytische Menge in $G - \mathfrak{F}^l$ und $l < k < n$. Dann ist die abgeschlossene Hülle \bar{M}^k von M^k in G eine rein k -dimensionale analytische Menge in G .

Beweis: Wir wenden vollständige Induktion nach l an. Ist $l = 0$, so besteht \mathfrak{F}^0 aus isolierten Punkten. Es sei P_0 einer der Punkte von \mathfrak{F}^0 . Wir wählen eine Polyzylinderumgebung $U(P_0)$, in der kein weiterer Punkt von \mathfrak{F}^0 liegt, und legen durch P_0 eine k -dimensionale analytische Ebene \mathfrak{E}^k , deren in $U(P_0) - P_0$ gelegenes Stück nicht in M^k enthalten ist. Sei $\mathfrak{E}_0^k = U(P_0) \cap \mathfrak{E}^k$ und $M_0^k = M^k \cap (U(P_0) - \mathfrak{E}_0^k)$. M_0^k ist in $U(P_0) - \mathfrak{E}_0^k$ eine rein k -dimensionale analytische Menge. Jeder Punkt P von M^k auf $\mathfrak{E}_0^k - P_0$ ist Häufungspunkt von Punkten von M_0^k , denn andernfalls müßte, wie leicht aus Satz 1 folgt, M^k in einer Umgebung von P mit \mathfrak{E}^k zusammenfallen, woraus sich ergäbe, daß $\mathfrak{E}^k \cap (U(P_0) - P_0)$ doch in M^k enthalten wäre. Ferner sind alle Punkte von \mathfrak{E}_0^k höchstens mit Ausnahme von P_0 reguläre Punkte in bezug auf M_0^k . Daraus folgt nach dem schon bewiesenen Spezialfall von Satz 12, daß auch P_0 regulärer Punkt in bezug auf M_0^k ist. Nach unserer Anmerkung zum Beweise des Spezialfalles von Satz 12 ist dann die abgeschlossene Hülle \bar{M}_0^k von M_0^k in $U(P_0)$ eine analytische Menge, und zwar, falls $P_0 \in \bar{M}_0^k$, in P_0

von der Dimension k . Wegen $\overline{M}_0^k - P_0 = M^k \cap U(P_0)$ gilt $\overline{M}^k \cap U(P_0) = \overline{M}_0^k$, womit unsere Behauptung für $l = 0$ bewiesen ist.

Angenommen, die Aussage unseres Satzes sei für alle l mit $l < l_0$, wo $l_0 < k$, bewiesen. Ist jetzt \mathcal{F}^{l_0} in G vorgegeben, so ist sicher jeder Punkt von \mathcal{F}^{l_0} , der nicht auf einem rein l_0 -dimensionalen Bestandteil von \mathcal{F}^{l_0} liegt, regulärer Punkt in bezug auf M^k ; und \overline{M}^k ist in einer Umgebung eines solchen Punktes eine rein k -dimensionale analytische Menge. Wir dürfen also \mathcal{F}^{l_0} als rein l_0 -dimensional voraussetzen. Sei P ein Punkt auf \mathcal{F}^{l_0} . Ist P gewöhnlicher Punkt von \mathcal{F}^{l_0} , so gibt es in einer Umgebung $U(P)$ eine rein k -dimensionale irreduzible analytische Menge $\tilde{\mathcal{F}}^k$ mit lauter gewöhnlichen Punkten, die alle in $U(P)$ gelegenen Punkte von \mathcal{F}^{l_0} umfaßt und die so gewählt werden kann, daß $\tilde{\mathcal{F}}^k - \mathcal{F}^{l_0}$ nicht in M^k enthalten ist. Es sei $M_1^k = M^k \cap (U(P) - \tilde{\mathcal{F}}^k)$. Wie oben folgt, daß die abgeschlossene Hülle \overline{M}_1^k von M_1^k in $U(P)$ mit $\overline{M}^k \cap U(P)$ übereinstimmt. Auf $\tilde{\mathcal{F}}^k$ liegen reguläre Punkte in bezug auf M_1^k . Also ist nach dem bewiesenen Spezialfall von Satz 12 jeder Punkt von $\tilde{\mathcal{F}}^k$ regulärer Punkt in bezug auf M_1^k . Dann ist aber, wiederum nach der Anmerkung zum Beweise des Spezialfalles von Satz 12, $\overline{M}_1^k = M^k \cap U(P)$ eine in ganz $U(P)$ analytische Menge, die in allen ihren Punkten die Dimension k hat.

Ist andererseits P nichtgewöhnlicher Punkt von \mathcal{F}^{l_0} , so gibt es nach Hilfsatz 2 in einer Umgebung $U'(P)$ eine in \mathcal{F}^{l_0} enthaltene höchstens $(l_0 - 1)$ -dimensionale analytische Menge \mathcal{F}^* , in der alle nichtgewöhnlichen Punkte von \mathcal{F}^{l_0} in $U'(P)$ liegen. Jeder Punkt innerhalb $U'(P)$, der zu $\mathcal{F}^{l_0} - \mathcal{F}^*$ gehört, ist regulärer Punkt in bezug auf M^k ; \overline{M}^k ist also in allen ihren Punkten auf $\mathcal{F}^{l_0} - \mathcal{F}^*$ analytisch und von der Dimension k . Nach Induktionsvoraussetzung ist dann \overline{M}^k auch in allen ihren Punkten auf \mathcal{F}^* analytisch und von der Dimension k , w. z. b. w.

Nun zurück zum Beweise von Satz 12. — Die gewöhnlichen Punkte von \mathcal{F}^k seien reguläre Punkte in bezug auf M^k . Sei Q_0 irgendein nichtgewöhnlicher Punkt von \mathcal{F}^k und $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}^k$ eine höchstens $(k - 1)$ -dimensionale analytische Menge in einer Umgebung $U(Q_0)$, die dort alle nichtgewöhnlichen Punkte von \mathcal{F}^k enthält. Die abgeschlossene Hülle \overline{M}^k von $M^k = M^k \cap U(Q_0)$ in $U(Q_0) - \mathcal{F}^*$ ist dann dort eine rein k -dimensionale analytische Menge; also ist nach Satz 13 die abgeschlossene Hülle \overline{M}^k von M^k in $U(Q_0)$ analytisch und rein k -dimensional. \overline{M}^k ist aber gleich dem Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle \overline{M}^k von M^k in G mit $U(Q_0)$. — Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

Korollar zu Satz 12: Ist auf jeder irreduziblen Komponente der im Gebiete G rein k -dimensionalen analytischen Menge \mathcal{F}^k wenigstens ein Punkt regulärer Punkt in bezug auf die in $G - \mathcal{F}^k$ vorgegebene rein k -dimensionale analytische Menge M^k , so ist die abgeschlossene Hülle \overline{M}^k von M^k in G eine in G rein k -dimensionale analytische Menge.

Weiter sei besonders hervorgehoben als

Folgerung aus Satz 13: Sei P ein Punkt im Gebiete G und M eine in $G - P$

analytische, nicht n -dimensionale Menge ohne 0-dimensionale Komponenten. Dann ist $\mathfrak{M} \cup P$ eine in G analytische Menge. Eine analytische Menge ohne 0-dimensionale Komponenten besitzt also keine isolierten wesentlich singulären Randpunkte.

In der Tat! Nach Satz 6 läßt sich \mathfrak{M} darstellen als Vereinigung $\mathfrak{M}^1 \cup \dots \cup \mathfrak{M}^{n-1}$, wo jeweils \mathfrak{M}^k , $1 \leq k \leq n-1$, leer oder eine in $G - P$ rein k -dimensionale analytische Menge ist. Nach Satz 13 ist stets $\mathfrak{M}^k \cup P$ eine in G analytische Menge (falls P nicht Häufungspunkt von Punkten auf \mathfrak{M} ist, ist dies trivial), also ist auch

$$\mathfrak{M} \cup P = (\mathfrak{M}^1 \cup P) \cup \dots \cup (\mathfrak{M}^{n-1} \cup P)$$

in ganz G einschließlich P analytisch.

Ist wieder wie oben \mathfrak{F}^k eine im Gebiete G rein k -dimensionale analytische Menge und \mathfrak{M}^k eine rein k -dimensionale analytische Menge in $G - \mathfrak{F}^k$, so ist nach Satz 12 für das Verhalten von \mathfrak{M}^k in der Nähe von \mathfrak{F}^k das Verhalten von \mathfrak{M}^k in der Umgebung einzelner Punkte P von \mathfrak{F}^k entscheidend. Damit ein solcher Punkt P regulärer Punkt in bezug auf \mathfrak{M}^k ist, muß notwendig auch der Durchschnitt von \mathfrak{M}^k mit einer beliebigen analytischen Ebene durch P stets eine nach P fortsetzbare analytische Menge sein. Eine hinreichende Bedingung für die Regularität von \mathfrak{M}^k in P liefert nun die folgende Aussage:

Es gebe durch P eine l -dimensionale analytische Ebene \mathfrak{E}^l mit $l \geq n - k$, so daß die analytischen Mengen $\mathfrak{F}^k \cap \mathfrak{E}^l$ und $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{E}^l$ rein $(k + l - n)$ -dimensional sind und $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{E}^l$ nach P fortsetzbar ist. Ferner existiere eine in G enthaltene Umgebung $U(P)$ mit folgender Eigenschaft: Für jede $U(P)$ treffende und zu \mathfrak{E}^l parallele l -dimensionale analytische Ebene $^*\mathfrak{E}^l$ ist der Durchschnitt $\mathfrak{M}^k \cap ^*\mathfrak{E}^l$ eine in alle Punkte von $\mathfrak{F}^k \cap ^*\mathfrak{E}^l \cap U(P)$ hinein fortsetzbare analytische Menge. Dann ist P regulärer Punkt in bezug auf \mathfrak{M}^k .

Zum Beweise darf P als der Nullpunkt und \mathfrak{E}^l als die Ebene $\{z_{l+1} = \dots = z_n = 0\}$ vorausgesetzt werden. P ist nach Voraussetzung regulärer Punkt in bezug auf $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{E}^l$. Fassen wir \mathfrak{M}_0 und $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}^k \cap \mathfrak{E}^l$ als analytische Mengen im Raume C^l der Variablen z_1, \dots, z_l auf, so gibt es auf Grund des Korollars zu Satz 12 eine analytische Fortsetzung von \mathfrak{M}_0 nach P , die, falls P zur abgeschlossenen Hülle von \mathfrak{M}_0 in G gehört, in P $(k + l - n)$ -dimensional und sonst (-1) -dimensional ist. Daher ist $\mathfrak{F}_0 \cup \mathfrak{M}_0$ in P analytisch und $(k + l - n)$ -dimensional. Dann gibt es aber im C^l eine analytische Ebene \mathfrak{E}' der Dimension $l - (l + k - n) = n - k$, die $\mathfrak{F}_0 \cup \mathfrak{M}_0$ in einer Umgebung von P nur in P schneidet. Falls $n - k = l$, so ist $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}^l$; andernfalls darf \mathfrak{E}' im C^l als die Ebene $\{z_{n-k+1} = \dots = z_n = 0\}$ angenommen werden. Es folgt, daß im C^n die analytische Ebene

$$\mathfrak{E}^{n-k}; \{z_{n-k+1} = \dots = z_n = 0\}$$

mit $\mathfrak{M}^k \cup \mathfrak{F}^k$ in einer Umgebung von P nur den Punkt P gemeinsam hat, und daß für ein geeignetes, positives ε die Punktmenge

$$\{|z_1| + \dots + |z_{n-k}| \leq \varepsilon, z_{n-k+1} = \dots = z_n = 0\}$$

keinen Punkt von $\mathfrak{M}^k \cup \mathfrak{F}^k - P$ enthält. Für ein geeignetes $\varepsilon' > 0$ hat jede

analytische Ebene

$$\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) : \{z_{n-k+1} = z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n = z_n^{(0)}; |z_\sigma| < \varepsilon', \\ \sigma = n-k+1, \dots, n\}$$

mit \mathfrak{F}^k innerhalb $|z_1| + \dots + |z_k| \leq \varepsilon$ nur endlich viele isolierte Punkte gemeinsam. Da auf $|z_1| + \dots + |z_{n-k}| = \varepsilon$ kein Punkt von $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{E}^{n-k}$ liegt, so folgt aus Satz 7, daß \mathfrak{M}^k von jeder Ebene $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ innerhalb $|z_1| + \dots + |z_{n-k}| \leq \varepsilon$ nur in isolierten Punkten geschnitten wird (falls ε' genügend klein ist). Wählen wir ε und ε' so, daß

$$G_1 : \{|z_1| + \dots + |z_{n-k}| \leq \varepsilon, |z_\sigma| < \varepsilon', \sigma = n-k+1, \dots, n\}$$

in $U(P)$ enthalten ist, so ist die Anzahl $a(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ mit \mathfrak{M}^k in G_1 sogar endlich. Denn $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ ist in einer $U(P)$ treffenden analytischen Parallelebene $^*\mathfrak{E}^i$ enthalten, für welche $\mathfrak{M}^k \cap ^*\mathfrak{E}^i$ in alle Punkte von $\mathfrak{F}^k \cap ^*\mathfrak{E}^i \cap U(P)$ fortsetzbar ist; also sind alle Punkte von $\mathfrak{F}^k \cap \mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ innerhalb G_1 reguläre Punkte in bezug auf $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$. Daraus folgt, daß die Punkte von $\mathfrak{M}^k \cap \mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ sich nicht gegen einen Punkt von $\mathfrak{F}^k \cap \mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ häufen können, was eintreten müßte, wenn $a(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ nicht endlich wäre.

Wir betrachten $a(z_{n-k+1}, \dots, z_n)$ als Funktion im k -dimensionalen Polyzylinder

$$Z^k : \{|z_{n-k+1}| < \varepsilon', \dots, |z_n| < \varepsilon'\}$$

des Raumes C^k der Variablen z_{n-k+1}, \dots, z_n . Nach einem bekannten Satz von OSGOOD^{16a)} gibt es eine ganze Zahl a_0 und ein Teilgebiet $^*G^k$ von Z^k , in welchem die Punkte (z_{n-k+1}, \dots, z_n) mit $a(z_{n-k+1}, \dots, z_n) \leq a_0$ dicht liegen. Nun gilt andererseits stets $a(z_{n-k+1}, \dots, z_n) \leq a(\tilde{z}_{n-k+1}, \dots, \tilde{z}_n)$ für alle $(\tilde{z}_{n-k+1}, \dots, \tilde{z}_n)$ in genügender Nähe von (z_{n-k+1}, \dots, z_n) . Denn ist $P_0(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ ein Schnittpunkt von \mathfrak{M}^k mit $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ innerhalb G_1 , so hat jede Ebene $\mathfrak{E}^{n-k}(\tilde{z}_{n-k+1}^{(0)}, \dots, \tilde{z}_n^{(0)})$ in genügender Nähe von $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ wenigstens einen Schnittpunkt mit \mathfrak{M}^k in der Nähe von P_0 , wie sich aus Satz 1, Zusatz II, unmittelbar ergibt. Für alle Punkte von $^*G^k$ gilt daher $a(z_{n-k+1}, \dots, z_n) \leq a_0$. Wir dürfen annehmen, daß es einen Punkt $Q^*(z_{n-k+1}^*, \dots, z_n^*)$ in $^*G^k$ gibt, für welchen $a(z_{n-k+1}^*, \dots, z_n^*) = a_0$ ist, sonst können wir a_0 durch eine geeignete kleinere ganze Zahl ersetzen.

Da $a(z_{n-k+1}, \dots, z_n)$ in einer Nachbarschaft von Q^* nicht abnimmt, muß $a(z_{n-k+1}, \dots, z_n)$ in einer gewissen Umgebung $U(Q^*)$ identisch a_0 sein. Sämtliche Ebenen $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ mit $(z_{n-k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in U(Q^*)$ schneiden \mathfrak{M}^k innerhalb G_1 also in genau a_0 Punkten. Daraus ergibt sich (wiederum mit Hilfe von Satz 1), daß jeder Schnittpunkt einer $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^*, \dots, z_n^*)$ genügend benachbarten Ebene $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}, \dots, z_n)$ in der Nähe eines Schnittpunktes von $\mathfrak{E}^{n-k}(z_{n-k+1}^*, \dots, z_n^*)$ liegt. Das aber bedeutet, daß in einer

^{16a)} Vgl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, I (1929), S. 230.

Umgebung jedes Schnittpunktes S von $\mathbb{E}^{n-k}(z_n^*, \dots, z_k^*)$ mit \mathfrak{F}^k innerhalb G_1 kein Punkt von \mathfrak{M}^k liegt. Jeder Punkt S dieser Art ist also regulärer Punkt in bezug auf \mathfrak{M}^k . Ist ε' genügend klein gewählt, so liegt auf jeder der in G_1 irreduziblen Komponenten von \mathfrak{F}^k wenigstens ein solcher Punkt S (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz 2). Nach dem Korollar zu Satz 12 ist also P regulärer Punkt von \mathfrak{M}^k .

4. Analytische Kegelmengen. — Eine analytische Menge \mathfrak{R} im C^n heißt eine *analytische Kegelmenge*, wenn es einen Punkt $S \in \mathfrak{R}$ gibt, derart, daß mit jedem von S verschiedenen Punkt $P \in \mathfrak{R}$ alle Punkte auf der durch S und P bestimmten 1-dimensionalen analytischen Ebene ebenfalls zu \mathfrak{R} gehören. Der Punkt S heißt *Spitze* von \mathfrak{R} .

Wir werden im folgenden S stets zum Nullpunkt des Koordinatensystems machen.

Die Dimension einer analytischen Kegelmenge \mathfrak{R} ist in allen Punkten $P \in \mathfrak{R}$ nicht kleiner als 1; es sei denn, \mathfrak{R} bestehe aus dem Punkt S allein.

Interpretiert man den komplex-projektiven Raum \bar{C}^n als den Raum aller 1-dimensionalen komplexen Ebenen durch den Nullpunkt eines C^{n+1} , so ist jede analytische Kegelmenge \mathfrak{R} im C^{n+1} mit der Spitze im Nullpunkt eine analytische Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ des \bar{C}^n . Umgekehrt entspricht aber auch bei dieser Interpretation jeder analytischen Menge \mathfrak{M} im \bar{C}^n eine analytische Kegelmenge $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ im C^{n+1} mit dem Nullpunkt als Spitze. Die Analytizität von $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ in allen vom Nullpunkt verschiedenen Punkten $P \in C^{n+1}$ ist klar; die Analytizität von $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ in O ergibt sich aus der aus Satz 13 gezogenen Folgerung.

Wir beweisen nun

Satz 14: Jede analytische Kegelmenge \mathfrak{R} im C^n mit O als Spitze ist Nullstellenmenge endlich vieler homogener Polynome.

Beweis: In einer Polyzylinderumgebung $U(O)$ ist \mathfrak{R} Nullstellenmenge eines Systems $f_i(z_1, \dots, z_n)$ von in $U(O)$ regulären Funktionen. Sei

$$f_i(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}^{(i)}(z_1, \dots, z_n)$$

die Diagonalreihenentwicklung von $f_i(z_1, \dots, z_n)$ um O . Dann gilt

$$f_i(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}^{(i)}(z_1, \dots, z_n) \lambda^{\nu},$$

und da $f_i(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$ für festes $(z_1, \dots, z_n) \in U(O)$ und $|\lambda| \leq 1$ stets regulär in λ ist, so konvergieren die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}^{(i)}(z_1, \dots, z_n) \lambda^{\nu}$ für diese (z_1, \dots, z_n) und λ .

Ein $(z_1^*, \dots, z_n^*) \in U(O)$ gehört nun genau dann zu \mathfrak{R} , wenn für jedes i gilt:

$$f_i(\lambda z_1^*, \dots, \lambda z_n^*) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}^{(i)}(z_1^*, \dots, z_n^*) \lambda^{\nu} = 0.$$

Da λ beliebig im Einheitskreis gewählt werden darf, so folgt, daß $(z_1^*, \dots, z_n^*) \in U(O)$ genau dann zu \mathfrak{R} gehört, wenn (z_1^*, \dots, z_n^*) zur Nullstellenmenge \mathfrak{N} der Polynome $P_{\nu}^{(i)}(z_1, \dots, z_n)$ gehört.

Es gilt also: $\mathfrak{R} \cap U(O) = \mathfrak{N} \cap U(O)$. Daraus folgt aber $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}$. Zu jedem $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathfrak{R}$ gibt es nämlich ein $\lambda_0 \neq 0$, so daß gilt: $(\lambda_0 z_1^{(0)}, \dots, \lambda_0 z_n^{(0)}) \in \mathfrak{R} \cap U(O)$. Daraus ergibt sich $(\lambda_0 z_1^{(0)}, \dots, \lambda_0 z_n^{(0)}) \in \mathfrak{N}$, und da \mathfrak{N} wegen der Homogenität der $P_v^{(i)}(z_1, \dots, z_n)$ selbst eine analytische Kegelmengung ist, folgt $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathfrak{N}$. Umgekehrt erhält man aus $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathfrak{N}$ nach demselben Schluß $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathfrak{R}$.

Die Menge \mathfrak{N} ist aber nach dem HILBERTSchen Idealbasissatz auch genaue Nullstellenmenge von endlich vielen der homogenen Polynome $P_v^{(i)}(z_1, \dots, z_n)$, w. z. b. w.

Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes ist jede analytische Kegelmengung des C^n eine homogene algebraische Menge. In Verbindung mit der Tatsache, daß analytische Mengen im \bar{C}^n als analytische Kegelmengen im C^{n+1} aufgefaßt werden dürfen, ergibt sich hieraus der

Satz von CHOW¹⁷⁾: Jede analytische Menge \mathfrak{N} des n -dimensionalen projektiven Raumes \bar{C}^n ist algebraisch¹⁸⁾.

Satz 14 kann nach H. CARTAN in bemerkenswerter Weise verschärft werden.

Ist \mathfrak{R}_O der Ring aller im Nullpunkt O des C^n regulären Funktionen, so heißt ein Ideal \mathfrak{a} dieses Ringes homogen, wenn aus $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{a}$ für jedes feste komplexe $\lambda \neq 0$ folgt: $f_\lambda(z_1, \dots, z_n) = f(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) \in \mathfrak{a}$.

Dann gilt der folgende

Satz von H. CARTAN¹⁹⁾: Ein Ideal des Punktringes \mathfrak{R}_O ist genau dann homogen, wenn es eine endliche Basis, bestehend aus homogenen Polynomen, besitzt.

Da die Gesamtheit aller in O regulären Funktionen f , die in einer geeigneten Umgebung $U_r(O)$ auf einer analytischen Kegelmengung mit der Spitze in O verschwinden, offenbar ein homogenes Ideal bildet, so ist Satz 14 in diesem Satz enthalten.

Daß ein Ideal mit homogener Polynombasis homogen ist, ist trivial. Die Umkehrung ergibt sich mittels des HILBERTSchen Idealbasissatzes aus nachstehendem

Hilfssatz: Eine Funktion $f \in \mathfrak{R}_O$ gehört genau dann zum homogenen Ideal \mathfrak{a} , wenn jedes homogene Polynom P_r der Diagonalreihenentwicklung

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(z_1, \dots, z_n)$$

von $f(z_1, \dots, z_n)$ um O zu \mathfrak{a} gehört.

Beweis: Jedes Ideal \mathfrak{a} des Ringes \mathfrak{R}_O ist nach H. CARTAN abgeschlossen in folgendem Sinne: Ist g eine Funktion, die in einer Umgebung $V(O)$ regulär und dort Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von regulären Funktionen $g_r \in \mathfrak{a}$ ist, so gilt: $g \in \mathfrak{a}$ ²⁰⁾. — Gehören also alle P_r zu \mathfrak{a} , so auch f .

¹⁷⁾ Vgl. Fußnote ⁴⁾.

¹⁸⁾ Das heißt eine algebraische Mannigfaltigkeit im Sinne der algebraischen Geometrie.

¹⁹⁾ Siehe Fußnote ⁴⁾.

²⁰⁾ Vgl. die in Fußnote ^{6a)} zitierte Arbeit von H. CARTAN, Appendice I.

Gehört umgekehrt f zu \mathfrak{a} , so gilt für alle (z_1, \dots, z_n) aus einer geeigneten Polyzylinderumgebung $U(O)$ (die ganz im Innern des Konvergenzgebietes der Diagonalreihenentwicklung von f um O enthalten ist) die Integraldarstellung

$$P_\nu(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} f(z_1 e^{i\theta}, \dots, z_n e^{i\theta}) d\theta.$$

Das Integral rechts ist Grenzwert von RIEMANNschen Summen, die in $U(O)$ gleichmäßig konvergieren. Daher ist $P_\nu(z_1, \dots, z_n)$ in $U(O)$ Limes einer in $U(O)$ gleichmäßig konvergenten Folge von Linearkombinationen von Funktionen $f(z_1 e^{i\theta_\mu}, \dots, z_n e^{i\theta_\mu})$, die wegen der Homogenität von \mathfrak{a} in \mathfrak{a} liegen. Wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{a} gilt also $P_\nu \in \mathfrak{a}$, w. z. b. w.

Korollar: Ein Ideal \mathfrak{h} des Ringes \mathfrak{R}_O ist genau dann ein homogenes Hauptideal, wenn es von einem homogenen Polynom erzeugt wird.

Es ist lediglich zu zeigen, daß als Basis eines homogenen Hauptideals \mathfrak{h} ein homogenes Polynom gewählt werden kann. Es gelte: $\mathfrak{h} = (f)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (evtl. ist nach Ausführung einer linearen Koordinatentransformation von f ein in O von null verschiedener Faktor abzuspalten), darf f als ausgezeichnetes Pseudopolynom in z_n angenommen werden. Da f ein homogenes Ideal erzeugt, ist die Nullstellenmenge von f eine analytische Kegelmengung mit der Spitze in O . Die Behauptung ergibt sich nunmehr aus folgendem

Hilfssatz: Ein in O ausgezeichnetes Pseudopolynom

$\omega(z_n; z_1, \dots, z_{n-1}) = z_n^\varrho + C_1(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^{\varrho-1} + \dots + C_\varrho(z_1, \dots, z_{n-1})$ ($\varrho \geq 1$), dessen Nullstellenmenge in einer Umgebung $U(O)$ mit dem in $U(O)$ gelegenen Teil einer analytischen Kegelmengung mit der Spitze in O übereinstimmt, ist ein homogenes Polynom.

Beweis: Sei $\omega = \omega_1^{i_1} \dots \omega_\sigma^{i_\sigma}$ die Zerlegung von ω in ausgezeichnete, in O irreduzible Pseudopolynome, die regulär sind in einer in $U(O)$ enthaltenen Polyzylinderumgebung

$$Z(O): \{|z_1| < \delta, \dots, |z_{n-1}| < \delta, |z_n| < \varepsilon\}.$$

Ferner sei $P^*(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*)$ ein Punkt im Raum der Veränderlichen z_1, \dots, z_{n-1} , der nicht auf der Diskriminantenfläche von $\omega_1 \dots \omega_\sigma$ liegt, und $U^*(P^*)$ eine Umgebung von P^* , die keinen Punkt der Diskriminantenfläche enthält.

Die Gleichung $\omega_1(z_n; z_1, \dots, z_{n-1}) = 0$ wird dann, falls ϱ_1 der Grad von ω_1 in z_n ist, durch ϱ_1 in $U^*(P^*)$ reguläre Funktionen

$$z_n = B^{(j)}(z_1, \dots, z_{n-1}) \quad (j = 1, \dots, \varrho_1)$$

gelöst, deren Werte z_n für festes (z_1, \dots, z_{n-1}) untereinander und von den Wurzeln des Produktes $\omega_1 \dots \omega_\sigma$ verschieden sind. Um die Punkte $P_j(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*, B^{(j)}(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*))$ ($j = 1, \dots, \varrho_1$) können daher punktfremde Umgebungen $U_j(P_j)$ abgegrenzt werden, derart, daß in $U_j(P_j)$ das Produkt $\omega_1 \dots \omega_\sigma$ nirgends verschwindet. In jedem $U_j(P_j)$ stimmt daher die Nullstellenmenge von ω_1 mit dem in $U_j(P_j)$ gelegenen Teil einer analytischen Kegelmengung mit der Spitze im Nullpunkt überein. Das bedeutet, daß für alle (z_1, \dots, z_{n-1})

$U^*(P^*)$ und alle komplexen t aus einer Umgebung von $t = 1$ gilt:

$$B^{(j)}(t z_1, \dots, t z_{n-1}) = t B^{(j)}(z_1, \dots, z_{n-1}) \quad (j = 1, \dots, \varrho_1).$$

Für die elementarsymmetrische Funktion

$$A_k(z_1, \dots, z_{n-1}) = B^{(1)} \cdots B^{(k)} + \dots,$$

die als Koeffizient von z_n^{2-k} in $\omega_1(z_n; z_1, \dots, z_{n-1})$ auftritt, gilt entsprechend für diese (z_1, \dots, z_{n-1}) und t :

$$A_k(t z_1, \dots, t z_{n-1}) = t^k A_k(z_1, \dots, z_{n-1}).$$

Da aber $A_k(z_1, \dots, z_{n-1})$ für alle Tupel (z_1, \dots, z_{n-1}) aus $Z^{n-1}; \{|z_1| < \delta, \dots, |z_{n-1}| < \delta\}$ regulär ist, so gilt:

$$A_k(t z_1, \dots, t z_{n-1}) = t^k A_k(z_1, \dots, z_{n-1}) \text{ für alle } (z_1, \dots, z_{n-1}) \in Z^{n-1} \text{ und } |t| \leq 1.$$

Dann muß aber A_k ein homogenes Polynom vom Grade k sein. Dies ergibt sich, wenn $A_k(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{v=0}^{\infty} Q_v^{(k)}(z_1, \dots, z_{n-1})$ die Diagonalreihenentwicklung von A_k in Z^{n-1} um O ist, aus der Identität

$$t^k \sum_{v=0}^{\infty} Q_v^{(k)}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{v=0}^{\infty} Q_v^{(k)}(z_1, \dots, z_{n-1}) t^v.$$

Mithin ist ω_1 selbst ein homogenes Polynom vom Grade ϱ_1 . Da entsprechendes für die Pseudopolynome $\omega_2, \dots, \omega_s$ gilt, so ist der Hilfssatz und damit das Korollar bewiesen.

Nunmehr ergibt sich das

Korollar zum Satz von CHOW: Eine rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge \mathfrak{M} des \bar{C}^n ist Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms.

Beweis: In der Nachbarschaft eines jeden Punktes von \mathfrak{M} wird \mathfrak{M} in bezug auf ein dort lokales (affines) Koordinatensystem durch eine Gleichung $f(z_1, \dots, z_n) = 0$ gegeben. Daraus folgt, daß die \mathfrak{M} wie oben im C^{n+1} zugeordnete Kegelmengenge $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ in der Umgebung jedes ihrer vom Nullpunkt verschiedenen Punkte ebenfalls durch eine einzige Gleichung gegeben wird. $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ ist also in allen von O verschiedenen Punkten von der Dimension n . Nach Satz 3 a) ist dann $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ auch in O selbst n -dimensional und mithin in einer Umgebung von O die genaue Nullstellenmenge einer Funktion f , die als ausgezeichnetes Pseudopolynom gewählt werden darf. Nach dem letzten Hilfssatz ist f dann aber ein homogenes Polynom, w. z. b. w.

(Eingegangen am 8. Januar 1953.)

Die lineare Differentialgleichung im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen.

Von

GUSTAV DOETSCH in Freiburg i. B.

Einleitung.

Die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und beliebiger Störungsfunktion kann im Intervall $t \geq 0$ bei beliebigen Anfangswerten (Werten der Funktion und ihrer $n - 1$ ersten Ableitungen für $t = 0$) bekanntlich am einfachsten vermittels der *einseitigen Laplace-Transformation* gelöst werden¹⁾. Betrachtet man die Differentialgleichung im Intervall $-\infty < t < +\infty$, so wird man entsprechend die *zweiseitige Laplace-Transformation*

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \mathfrak{L}_{II}\{F\}$$

anwenden. Das *Anfangs-* und das *Randwertproblem* im zweiseitig unendlichen Intervall scheint aber bisher in der Literatur überhaupt nicht allgemein behandelt worden zu sein, weder mit der \mathfrak{L}_{II} -Transformation noch mit einer anderen Methode²⁾. In dem in neuester Zeit erschienenen Buch von VAN DER POL und BREMMER³⁾ wird die \mathfrak{L}_{II} -Transformation zur Grundlage des ganzen Operatorenkalküls gemacht, und man erwartet daher, daß gerade dasjenige Problem, das am Anfang des Operatorenkalküls steht, nämlich die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung, mit eben dieser \mathfrak{L}_{II} -Transformation im Intervall $-\infty < t < +\infty$ allgemein behandelt wird. Das ist aber nicht der Fall. Die Verff. wenden vielmehr eines der für die \mathfrak{L}_{II} -Transformation geltenden Differentiationsgesetze rein formal ohne exakte Gültigkeitsbedingungen an und gelangen dabei unversehens in dem Spezialfall, daß die Störungsfunktion die für $t < 0$ verschwindende Heavisidesche Einheits-

¹⁾ G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937, S. 321 ff.

²⁾ Die Differentialgleichung im Intervall $-\infty < t < +\infty$ findet sich unter der Voraussetzung, daß die Störungsfunktion $F(t)$ die Bedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < \infty$ befriedigt, mit Fourier-Transformation behandelt in S. BOCHNER: Vorlesungen über FOURIERSCHE Integrale. Leipzig 1932, S. 100—101, jedoch nicht als Anfangs- oder Randwertproblem. Es handelt sich hier nur um die (wenn sie existiert, einzige) Lösung, die mit sämtlichen Ableitungen bis zur n -ten in $(-\infty, +\infty)$ absolut integrierbar ist. (Siehe S. 84 die Definition von „Lösung“ und S. 83 von „differenzierbar“.)

³⁾ B. VAN DER POL and H. BREMMER: Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge 1950.

funktion ist⁴⁾, zu der oben erwähnten Lösung des Problems im Intervall $t \geq 0$ (mit verschwindenden Anfangswerten), und im Fall einer beliebigen Störungsfunktion zu einer Lösung⁵⁾, von der sie nur sagen, sie sei eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung, ohne festzustellen, welche. Daß die in der \mathcal{L}_{II} -Transformation liegenden Möglichkeiten zur Konstruktion einer bestimmten Lösung mit vorgegebenen Eigenschaften nicht ausbeutet werden, liegt einerseits daran, daß das benutzte Differentiationsgesetz nicht exakt formuliert wird, wodurch gewisse Aussagen über die Anfangswerte verlorengehen, andererseits daran, daß die im Bildbereich auftretende gebrochene rationale Funktion nur in der rechts von allen Polen liegenden Halbebene betrachtet wird, während die zwischen den Polen liegenden Vertikalstreifen, deren Heranziehung zu anderen Lösungen führt, unbeachtet bleiben. Bezüglich dieser Lösungen wird gesagt⁶⁾: "For practical applications . . . these solutions are of little importance, since they correspond to less simple boundary conditions." Die folgenden Zeilen mögen zeigen, daß im Gegenteil die Diskussion der Bildfunktion in jenen Streifen zur Lösung praktisch wichtiger Anfangs- und Randwertprobleme führt.

1. Ein Differentiationsgesetz für die \mathcal{L}_{II} -Transformation.

Da das Differentiationsgesetz der \mathcal{L}_{II} -Transformation in der Form, die wir brauchen werden, in der Literatur nicht ausgesprochen ist, leiten wir es zunächst ab⁷⁾.

Hilfssatz 1. Wenn $\mathcal{L}_{II}\{F\}$ für ein $s_0 = x_0 + i y_0$ mit $x_0 > 0$ konvergiert, so ist

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty.$$

Beweis: Da

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} F(t) dt \quad \text{mit } x_0 > 0$$

konvergiert, so ist nach H B, S. 87, Satz 1⁸⁾

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

$\int_{-\infty}^0 F(\tau) d\tau$ konvergiert, weil $\int_{-\infty}^0 e^{-st} F(t) dt$ für $\Re s < x_0$ konvergent ist. Also ist auch

$$\int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

⁴⁾ S. Anm. 2), S. 153—154.

⁵⁾ S. Anm. 2), S. 155—156.

⁶⁾ S. Anm. 2), S. 154.

⁷⁾ Im folgenden wird mit H B verwiesen auf G. DOETSCH: Handbuch der Laplace-Transformation. I. Band: Theorie der Laplace-Transformation. Basel 1950.

⁸⁾ Der Satz wird dort für reelles s_0 ausgesprochen. Wegen der Ausdehnung auf komplexes s_0 s. Anm. S. 88.

Ferner konvergiert

$$\int_{-\infty}^0 e^{-s_0 t} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s_0)t} F(-t) dt$$

mit $\Re(-s_0) < 0$, also ist nach H B, S. 94, Satz 9

$$\int_t^{\infty} F(-\tau) d\tau = o(e^{-s_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

d. h.

$$\int_{-\infty}^{-t} F(\tau) d\tau = \Phi(-t) = o(e^{-s_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow +\infty \text{ oder } \Phi(t) = o(e^{s_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow -\infty.$$

Hilfssatz 2. Wenn $\mathfrak{L}_{II}\{F\}$ für ein s_0 mit $x_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert auch $\mathfrak{L}_{II}\{\Phi\}$ für s_0 , und es ist für $s = s_0$:

$$\mathfrak{L}_{II}\{F\} = s \mathfrak{L}_{II}\{\Phi\}.$$

Der Beweis ergibt sich aus der durch partielle Integration folgenden Gleichung

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-s_0 t} F(t) dt = e^{-s_0 t} \Phi(t) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + s_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-s_0 t} \Phi(t) dt,$$

weil nach Hilfssatz 1

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow -\infty} e^{-s_0 \omega_1} \Phi(\omega_1) = \lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} e^{-s_0 \omega_2} \Phi(\omega_2) = 0$$

ist.

Hilfssatz 3. Es sei $Y(t)$ für alle t differenzierbar. Wenn $\mathfrak{L}_{II}\{Y'\}$ für s_0 mit $x_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert auch $\mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\}$ für s_0 ($Y(-\infty)$ existiert^{*)}), und es ist für $s = s_0$:

$$\mathfrak{L}_{II}\{Y'\} = s \mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\}.$$

Ferner ist

$$Y(t) - Y(-\infty) = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty.$$

Der Beweis ergibt sich, wenn in Hilfssatz 1 und 2

$$\begin{aligned} F(t) &= Y'(t), \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t Y'(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^t Y'(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [Y(t) - Y(-\omega)] \\ &= Y(t) - Y(-\infty) \end{aligned}$$

gesetzt wird. (Hieraus folgt zugleich, daß $Y(-\infty)$ existiert.)

Hilfssatz 4. Es sei $Y(t)$ für alle t n -mal differenzierbar und

$$Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0.$$

Wenn $\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n)}\}$ für s_0 mit $x_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert auch $\mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\}$ ($Y(-\infty)$ existiert), und es ist für $s = s_0$:

$$\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n)}\} = s^n \mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\}.$$

^{*)} Wenn wir im folgenden $Y(-\infty)$, $Y'(-\infty)$, usw. schreiben, so ist immer $\lim_{t \rightarrow -\infty} Y(t)$ usw. gemeint.

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} Y^{(\nu)}(t) \quad (\nu = 1, \dots, n-1) \\ Y(t) - Y(-\infty) \end{aligned} \right\} = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 3 ist für $s = s_0$

$$\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n)}\} = s \mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n-1)}(t) - Y^{(n-1)}(-\infty)\}$$

und

$$Y^{(n-1)}(t) - Y^{(n-1)}(-\infty) = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty.$$

Ist $Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$, so ergibt sich

$$\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n)}\} = s \mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n-1)}\}, \quad Y^{(n-1)}(t) = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty,$$

und man kann nun Hilfssatz 3 auf $Y^{(n-1)}(t)$ anwenden usw.

Für die folgenden Anwendungen muß das Differentiationsgesetz nicht bloß in einem Punkt, sondern in einem Streifen erfüllt sein. Dazu muß man die Voraussetzungen für zwei Punkte mit verschiedenen positiven Abszissen machen. Dann ergibt sich aus Hilfssatz 4:

Hilfssatz 5 (Differentiationsgesetz): $Y(t)$ sei n -mal differenzierbar, und $\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n)}\}$ ($n \geq 1$) konvergiere für $s = x_1$ und $s = x_2$ mit $0 < x_1 < x_2$, also für $x_1 < \Re s < x_2$. Wenn $Y^{(\nu)}(-\infty) = 0$ für $\nu = 1, \dots, n-1$ ist, so existiert $Y(-\infty)$, und es ist

$$\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(\nu)}\} = s^\nu \mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\} \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad \text{für } x_1 < \Re s < x_2.$$

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} Y^{(\nu)}(t) \quad (\nu = 1, \dots, n-1) \\ Y(t) - Y(-\infty) \end{aligned} \right\} = \begin{cases} o(e^{x_1 t}) & \text{für } t \rightarrow +\infty \\ o(e^{x_2 t}) & \text{für } t \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

so daß die Integrale $\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(\nu)}\}$ ($\nu = 1, \dots, n-1$) und $\mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\}$ für $x_1 < \Re s < x_2$ absolut konvergieren.

2. Behandlung der Differentialgleichung mit \mathfrak{L}_{II} -Transformation.

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$(2.1) \quad Y^{(n)} + c_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + c_1 Y' + c_0 Y = F(t)$$

im Intervall $-\infty < t < +\infty$. Die Nullstellen α_μ des charakteristischen Polynoms

$$(2.2) \quad p(s) = s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0$$

seien einfach:

$$(2.3) \quad p(s) = (s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n) \quad (\alpha_\mu \neq \alpha_\nu \text{ für } \mu \neq \nu).$$

Zur Festlegung einer bestimmten Lösung sollen die Werte der Funktion $Y(t)$ und gewisser Ableitungen für $t = -\infty$ oder für $t = +\infty$ (Anfangs- bzw. Endwertproblem) oder teils für $t = -\infty$, teils für $t = +\infty$ (Randwertproblem) vorgegeben werden.

Das Anfangs- und das Randwertproblem für die *homogene* Gleichung ist bedeutungslos. Denn jede Lösung der homogenen Gleichung ist eine lineare

Kombination der Funktionen $e^{\alpha_\mu t}$, und jede solche Funktion hat z. B. für $t \rightarrow -\infty$ den Grenzwert 0 oder ∞ oder 1 oder überhaupt keinen Grenzwert, je nachdem $\Re \alpha_\mu > 0$ oder $\Re \alpha_\mu < 0$ oder $\alpha_\mu = 0$ oder $\alpha_\mu = \beta i$ ($\beta \geq 0$) ist. Analoges gilt für die Ableitungen.

Wir betrachten daher nur die *inhomogene* Gleichung und schreiben zunächst gewisse *Anfangsbedingungen* vor. Wenn wir das Differentiationsgesetz der \mathfrak{L}_{II} -Transformation anwenden wollen, so muß

$$Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$$

vorgeschrieben sein. Es sind aber überhaupt keine anderen Werte möglich, wenn $Y'(-\infty), \dots, Y^{(n-1)}(-\infty)$ existieren sollen. Denn es konvergiert dann

$$\int_{-\infty}^0 Y^{(n-1)}(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} [Y^{(n-2)}(0) - Y^{(n-2)}(-\omega)] = Y^{(n-2)}(0) - Y^{(n-2)}(-\infty),$$

und daher muß, wenn $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} Y^{(n-1)}(\tau) = Y^{(n-1)}(-\infty)$ existiert, dieser Wert gleich 0 sein. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß $Y^{(n-2)}(-\infty), \dots, Y'(-\infty)$ verschwinden müssen. Wenn wir also ein Anfangswertproblem stellen wollen, so gibt es keine andere Möglichkeit, als zu verlangen:

$$(2.4) \quad Y(-\infty) = \text{beliebiger fester Wert}, \quad Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0.$$

Es ist klar, daß eine Lösung mit diesen Anfangswerten *nicht eindeutig* zu sein braucht. Denn die Differenz zweier Lösungen genügt der homogenen Gleichung und hat die Anfangswerte 0, stellt also eine lineare Kombination der Funktionen $e^{\alpha_\mu t}$ mit $\Re \alpha_\mu > 0$ dar. Nur wenn keine Nullstellen mit positivem Realteil vorhanden sind, ist die Lösung eindeutig.

Um den Streifen $x_1 < \Re s < x_2$, in dem wir das Differentiationsgesetz der \mathfrak{L}_{II} -Transformation anwenden wollen, bequem bezeichnen zu können, numerieren wir die Nullstellen von $p(s)$ so, daß

$$(2.5) \quad \Re \alpha_1 \leq \dots \leq \Re \alpha_m \leq 0 < \Re \alpha_{m+1} \leq \dots \leq \Re \alpha_n$$

ist, und wählen dann x_1 und x_2 so, daß

$$0 < x_1 < x_2 < \Re \alpha_{m+1}$$

ist. Wenn keine Nullstellen mit positivem Realteil vorhanden sind, sei $0 < x_1 < x_2$.

Um das Differentiationsgesetz anzuwenden, schreiben wir die Gleichung (2.1) in der Gestalt

$$(2.6) \quad Y^{(n)} + c_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + c_1 Y' + c_0 [Y(t) - Y(-\infty)] = F(t) - c_0 Y(-\infty)$$

und setzen voraus, daß $\mathfrak{L}_{II}\{Y^{(n)}\}$ und $\mathfrak{L}_{II}\{F(t) - c_0 Y(-\infty)\}$ für $s = x_1$ und $s = x_2$ konvergieren. Mit den Bezeichnungen

$$(2.7) \quad \mathfrak{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\} = \hat{y}(s), \quad \mathfrak{L}_{II}\{F(t) - c_0 Y(-\infty)\} = \hat{f}(s)$$

entspricht dann der Gleichung (2.6) die Bildgleichung

$$p(s) \hat{y}(s) = \hat{f}(s) \quad (x_1 < \Re s < x_2)$$

mit der Lösung

$$(2.8) \quad \hat{y}(s) = \frac{1}{p(s)} \hat{f}(s).$$

Da die Wurzeln von $p(s)$ einfach sein sollten, ist

$$(2.9) \quad \frac{1}{p(s)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_\mu)(s - \alpha_\mu)}.$$

Bei der Bestimmung der Originalfunktion $Q(t)$ zu $\frac{1}{p(s)}$ ist zu beachten, daß vermittle der \mathfrak{L}_{II} -Transformation einer Bildfunktion in verschiedenen Streifen *verschiedene Originalfunktionen* entsprechen (so wie einer analytischen Funktion in verschiedenen Ringgebieten, die durch Singularitäten getrennt sind, verschiedene Laurentreihen entsprechen). Für jede einzelne der hier auftretenden Funktionen $\frac{1}{s - \alpha_\mu}$ kommen die beiden Halbebenen $\Re s < \Re \alpha_\mu$ und $\Re s > \Re \alpha_\mu$ in Betracht, wo sie verschiedenen Originalfunktionen entsprechen. Es ist¹⁰⁾

$$\frac{1}{s - \alpha_\mu} \begin{cases} \bullet \rightarrow 0 & \text{für } t > 0 \\ \bullet \rightarrow 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \begin{cases} e^{\alpha_\mu t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \text{ in der Halbebene } \Re s > \Re \alpha_\mu,$$

$$\frac{1}{s - \alpha_\mu} \begin{cases} \bullet \rightarrow 0 & \text{für } t > 0 \\ \bullet \rightarrow 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \begin{cases} 0 & \text{für } t > 0 \\ -e^{\alpha_\mu t} & \text{für } t < 0 \end{cases} \text{ in der Halbebene } \Re s < \Re \alpha_\mu.$$

Führen wir die Heavisidesche „Einheitsfunktion“

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

ein, so können wir kürzer schreiben:

$$\frac{1}{s - \alpha_\mu} \begin{cases} \bullet \rightarrow 0 & \text{für } \Re s > \Re \alpha_\mu \\ \bullet \rightarrow 0 & \text{für } \Re s < \Re \alpha_\mu \end{cases} \begin{cases} U(t) e^{\alpha_\mu t} \\ -U(-t) e^{\alpha_\mu t} \end{cases}$$

Da wir die Originalfunktion zu $\frac{1}{p(s)}$ in dem Streifen $0 < x_1 < \Re s < x_2 < \Re \alpha_{m+1}$ brauchen, so kommt für die α_μ ($\mu = 1, \dots, m$), die einen Realteil ≤ 0 haben, die rechte Halbebene $\Re s > \Re \alpha_\mu$, für die α_μ ($\mu = m+1, \dots, n$), die einen Realteil $\geq \Re \alpha_{m+1}$ haben, die linke Halbebene $\Re s < \Re \alpha_\mu$ in Frage, und es ergibt sich:

$$(2.10) \quad \frac{1}{p(s)} \begin{cases} \bullet \rightarrow 0 & \text{für } \Re s < \Re \alpha_{m+1} \\ \bullet \rightarrow 0 & \text{für } \Re s > \Re \alpha_{m+1} \end{cases} Q(t) = U(t) \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t} - U(-t) \sum_{\mu=m+1}^n \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t}$$

Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{L}_{II}\{F(t) - c_0 Y(-\infty)\}$ in $x_1 < \Re s < x_2$ absolut konvergiert, so existiert nach H B, S. 123, Satz 3 die Faltung

$$Q(t) * [F(t) - c_0 Y(-\infty)] = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t - \tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau$$

¹⁰⁾ Die Tatsache, daß $f(s) = \mathfrak{L}_{II}\{F(t)\}$ ist, drücken wir gelegentlich kürzer durch das Korrespondenzzeichen $\bullet \rightarrow 0$ aus: $f(s) \bullet \rightarrow 0 F(t)$.

für alle t und entspricht in $x_1 < \Re s < x_2$ dem Produkt $\frac{1}{p(s)} \hat{f}(s)$, weil $e^{-st} Q(t)$ beschränkt ist und $\mathfrak{L}_{II}\{Q(t)\}$ absolut konvergiert. Nach dem Eindeutigkeitsatz der \mathfrak{L}_{II} -Transformation (H B, S. 176, Satz 15) ergibt sich also aus (2.8), daß fast überall

$$(2.11) \quad Y(t) - Y(-\infty) = Q(t) * \underset{-\infty}{+ \infty} [F(t) - c_0 Y(-\infty)]$$

ist. Da aber $Q(t)$ beschränkt und somit die rechte Seite nach H B, S. 111, Satz 3 stetig ist und $Y(t)$ als differenzierbare Funktion ebenfalls stetig ist, gilt (2.11) ausnahmslos.

Die Lösung (2.11) wurde abgeleitet unter Voraussetzungen über $Y(t)$ und $F(t)$, die die Existenz von gewissen \mathfrak{L}_{II} -Transformierten, also im wesentlichen die Integrabilität bei $\pm \infty$ betrafen. Wir untersuchen nun *ganz unabhängig von der Art der Herleitung*, unter welchen Bedingungen für $F(t)$ die durch (2.11) dargestellte Funktion $Y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (2.1) mit den Anfangswerten (2.4) ist. Da der Integrationsweg in (2.11) sich (nach beiden Richtungen) ins Unendliche erstreckt, muß es sich dabei um Bedingungen handeln, die das Verhalten von $F(t)$ für $t \rightarrow \pm \infty$ betreffen. Wir werden zwei Arten von Bedingungen zugrunde legen: Das eine Mal werden wir die Existenz der Grenzwerte $F(-\infty)$ und $F(+\infty)$, das andere Mal die Existenz des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt$ voraussetzen. Zunächst betrachten wir aber die durch (2.10) definierte Funktion $Q(t)$.

3. Die GREENSche Funktion des Problems.

Die Funktion $Q(t)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Sie genügt für $t \neq 0$ der homogenen Differentialgleichung:

$$(3.1) \quad p\left(\frac{d}{dt}\right) Q(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \text{ und } t > 0.$$

Denn sowohl für $t < 0$ als auch für $t > 0$ ist $Q(t)$ eine Linearkombination von Funktionen $e^{\mu t}$, von denen jede der homogenen Gleichung genügt.

b) Wegen $U(+0) = 1$, $U(-0) = 0$ ist

$$\begin{aligned} Q(+0) - Q(-0) &= \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_\mu)}, \\ Q'(+0) - Q'(-0) &= \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu}{p'(\alpha_\mu)}, \\ &\dots\dots\dots \\ Q^{(n-1)}(+0) - Q^{(n-1)}(-0) &= \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu^{n-1}}{p'(\alpha_\mu)}. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind bzw. die Summen der Residuen von $\frac{1}{p(s)}$, $\frac{s}{p(s)}$, ..., $\frac{s^{n-1}}{p(s)}$, also gleich 0 bis auf die letzte, die gleich 1 ist¹¹⁾. Damit ergibt sich:

¹¹⁾ Vgl. Anm. ¹⁾, S. 325.

$$Q(+0) - Q(-0) = Q'(+0) - Q'(-0) = \dots = Q^{(n-2)}(+0) - Q^{(n-2)}(-0) = 0, \\ (3.2) \quad Q^{(n-1)}(+0) - Q^{(n-1)}(-0) = 1.$$

Die Funktion $Q(t)$ und ihre Ableitungen bis zur $(n-2)$ -ten sind daher auch in $t=0$ stetig, während die $(n-1)$ -te Ableitung den Sprung 1 aufweist. $Q(t)$ hat damit die Eigenschaften, die man von einer GREENSchen Funktion (für gewöhnliche Differentialgleichungen) verlangt¹²⁾.

c) Es ist

$$Q(-\infty) = 0, \\ (3.3) \quad Q(+\infty) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Re \alpha_m < 0, \\ \frac{1}{p'(0)}, & \text{wenn } \alpha_m = 0 \text{ und kein } \alpha_\mu \text{ rein imaginär ist,} \\ \text{nicht vorhanden,} & \text{wenn es rein imaginäre } \alpha_\mu \text{ gibt.} \end{cases}$$

Die Eigenschaften (3.1), (3.2), (3.3) bestimmen $Q(t)$ eindeutig¹³⁾. Denn zunächst zeigen (3.1) und (3.3), daß $Q(t)$ in $t > 0$ bzw. $t < 0$ von folgender Gestalt ist:

$$Q(t) = \sum_{\mu=1}^m a_\mu e^{\alpha_\mu t} \quad \text{für } t > 0, \\ Q(t) = \sum_{\mu=m+1}^n a_\mu e^{\alpha_\mu t} \quad \text{für } t < 0.$$

Sodann ergibt (3.2):

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m a_\mu - \sum_{\mu=m+1}^n a_\mu &= 0 \\ \sum_{\mu=1}^m a_\mu \alpha_\mu - \sum_{\mu=m+1}^n a_\mu \alpha_\mu &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{\mu=1}^m a_\mu \alpha_\mu^{n-2} - \sum_{\mu=m+1}^n a_\mu \alpha_\mu^{n-2} &= 0 \\ \sum_{\mu=1}^m a_\mu \alpha_\mu^{n-1} - \sum_{\mu=m+1}^n a_\mu \alpha_\mu^{n-1} &= 1. \end{aligned}$$

Das ist ein inhomogenes Gleichungssystem für die a_μ , dessen Determinante bis auf das Vorzeichen die VANDERMONDESche Determinante, also gleich $\pm \prod_{\mu \neq \nu} (\alpha_\mu - \alpha_\nu)$ ist. Da die α_μ verschieden sind, ist sie $\neq 0$, so daß das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

¹²⁾ Der Begriff der GREENSchen Funktion bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde zuerst von H. BURKHARDT 1894 eingeführt, wie D. HILBERT: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1912, S. 40, erwähnt, wo für Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter verschiedenen Randbedingungen die GREENSchen Funktionen aufgestellt werden. Für Gleichungen beliebiger Ordnung siehe M. BÔCHER: Leçons sur les méthodes de Sturm. Paris 1917, S. 100.

¹³⁾ Vgl. hierzu für die GREENSche Funktion im endlichen Intervall das in Anm. ¹²⁾ zitierte Buch von BÔCHER, S. 100–102.

Übrigens verschwindet nicht nur $Q(t)$ für $t = -\infty$, sondern auch seine sämtlichen Ableitungen.

4. Lösung unter Voraussetzung der Existenz von $F(-\infty)$ und $F(+\infty)$.

Wir setzen jetzt voraus, daß $F(t)$ stetig ist und daß

$$(4.1) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = F(-\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = F(+\infty)$$

existieren. Dies hat zur Folge, daß $Y(-\infty)$ im allgemeinen *nicht beliebig vorgeschrieben* werden kann. Weil nämlich $Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}$ stetig sind, ergibt sich aus (2.1), daß auch $Y^{(n)}$ stetig, also integrierbar ist:

$$\int_{-\infty}^0 Y^{(n)}(t) dt = Y^{(n-1)}(0) - Y^{(n-1)}(-\infty).$$

Da $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} Y^{(n-1)}(-\omega) = Y^{(n-1)}(-\infty)$ existiert, konvergiert $\int_{-\infty}^0 Y^{(n)}(t) dt$. Ferner existiert $Y^{(n)}(-\infty)$ auf Grund von (4.1), (2.4) und (2.1). Dann kann aber nur $Y^{(n)}(-\infty) = 0$ sein. Da somit alle Ableitungen von $Y(t)$ von der ersten bis zur n -ten für $t \rightarrow -\infty$ verschwinden, folgt aus der Differentialgleichung:

$$(4.2) \quad c_0 Y(-\infty) = F(-\infty).$$

Das bedeutet: Ist $c_0 \neq 0$, so kommt nur der Anfangswert

$$(4.3) \quad Y(-\infty) = \frac{F(-\infty)}{c_0}$$

in Frage. Ist $c_0 = 0$, d. h. ist eine der Nullstellen α_μ gleich 0, so muß

$$(4.4) \quad F(-\infty) = 0$$

sein, und $Y(-\infty)$ ist dann beliebig.

Es fragt sich nun weiter, unter welchen Umständen das Integral in (2.11) konvergiert. Es setzt sich wegen der verschiedenen Gestalt von $Q(t)$ für $t > 0$ und $t < 0$ zusammen aus Integralen der Form

$$(4.5) \quad \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \quad \text{mit } \Re \alpha_\mu \leq 0$$

und

$$(4.6) \quad \int_t^{\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \quad \text{mit } \Re \alpha_\mu > 0.$$

Wegen (4.1) konvergieren die Integrale (4.6), ebenso die Integrale (4.5) mit $\Re \alpha_\mu < 0$. Dagegen braucht (4.5) für $\Re \alpha_\mu = 0$ nicht zu konvergieren, obwohl nach (4.2)

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] = 0$$

ist. Wir müssen also zusätzlich annehmen:

$p(s)$ soll keine Nullstellen α_μ mit $\Re \alpha_\mu = 0$ haben.

Es ist dann insbesondere $s = 0$ keine Nullstelle, also $c_0 \neq 0$, so daß (4.3) gilt.

Wir zeigen nun, daß unter den obigen Voraussetzungen die durch (2.11)

gegebene Funktion

$$Y(t) = Y(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau$$

die Differentialgleichung (2.1) befriedigt. Da $Q'(t), \dots, Q^{(n-2)}(t)$ für alle t existieren und stetig sind und die durch Differentiation unter dem Integral entstehenden Integrale in der Umgebung jeder Stelle gleichmäßig konvergieren, so ist

$$(4.7) \quad \begin{aligned} Y'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q'(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$Y^{(n-1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^{(n-1)}(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau.$$

Da ferner $Q^{(n-1)}(t-\tau)$ an der Stelle $\tau = t$ unstetig ist, zerlegen wir zur Bildung von $Y^{(n)}(t)$ das Integral für $Y^{(n-1)}(t)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} Y^{(n-1)}(t) &= \int_{-\infty}^t Q^{(n-1)}(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \\ &\quad + \int_t^{+\infty} Q^{(n-1)}(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \end{aligned}$$

und können dann die Differentiation nach der Regel für die Differentiation eines Integrals nach einem in den Grenzen und im Integranden vorkommenden Parameter durchführen, da $Q^{(n)}(t-\tau)$ in jedem Einzelintegral stetig ist:

$$\begin{aligned} (4.8) \quad Y^{(n)}(t) &= \int_{-\infty}^t Q^{(n)}(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau + Q^{(n-1)}(+0) [F(t) - c_0 Y(-\infty)] \\ &\quad + \int_t^{+\infty} Q^{(n)}(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau - Q^{(n-1)}(-0) [F(t) - c_0 Y(-\infty)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q^{(n)}(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau + [F(t) - c_0 Y(-\infty)]. \end{aligned}$$

Hierbei ist (3.2) berücksichtigt worden. Da $Q(t)$ die homogene Differentialgleichung befriedigt, ergibt sich aus (4.7) und (4.8):

$$Y^{(n)}(t) + c_{n-1} Y^{(n-1)}(t) + \dots + c_0 Y(t) = [F(t) - c_0 Y(-\infty)] + c_0 Y(-\infty) = F(t).$$

Um nun weiterhin die Grenzwerte von $Y(t)$, $Y'(t)$, usw. für $t \rightarrow -\infty$ festzustellen, schicken wir folgende Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 6. $\Phi(t)$ sei stetig und habe für $t \rightarrow \pm \infty$ die Grenzwerte $\Phi(+\infty)$ bzw. $\Phi(-\infty)$. Dann gilt für $\Re \alpha < 0$:

$$\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau \rightarrow \begin{cases} \frac{\Phi(-\infty)}{-\alpha} & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ \frac{\Phi(+\infty)}{-\alpha} & \text{für } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Beweis: Es ist

$$|\Phi(\tau) - \Phi(-\infty)| < \varepsilon \quad \text{für } \tau \leq -T.$$

Wenn schon $t < -T$ ist, so ist

$$\left| \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} [\Phi(\tau) - \Phi(-\infty)] d\tau \right| < \varepsilon \int_{-\infty}^t e^{\Re \alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{\varepsilon}{-\Re \alpha},$$

also

$$\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau \rightarrow \Phi(-\infty) \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{\Phi(-\infty)}{-\alpha} \quad \text{für } t \rightarrow -\infty.$$

Ferner ist

$$|\Phi(\tau) - \Phi(+\infty)| < \varepsilon \quad \text{für } \tau \geq T,$$

und, da Φ stetig ist und für $t \rightarrow -\infty$ einen Grenzwert hat:

$$|\Phi(\tau) - \Phi(+\infty)| < M \quad \text{für } \tau \leq T,$$

also, wenn schon $t > T$ ist:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} [\Phi(\tau) - \Phi(+\infty)] d\tau \right| &< M \int_{-\infty}^T e^{\Re \alpha(t-\tau)} d\tau + \varepsilon \int_T^t e^{\Re \alpha(t-\tau)} d\tau \\ &= M \frac{e^{\Re \alpha(t-T)}}{-\Re \alpha} + \varepsilon \frac{1 - e^{\Re \alpha(t-T)}}{-\Re \alpha} < 2 \frac{\varepsilon}{-\Re \alpha} \end{aligned}$$

für alle hinreichend großen $t > T$, d. h.

$$\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau \rightarrow \Phi(+\infty) \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{\Phi(+\infty)}{-\alpha} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Hilfssatz 7. $\Phi(t)$ sei stetig und habe für $t \rightarrow \pm \infty$ die Grenzwerte $\Phi(+\infty)$ bzw. $\Phi(-\infty)$. Dann gilt für $\Re \alpha > 0$:

$$\int_t^{+\infty} e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau \rightarrow \begin{cases} \frac{\Phi(-\infty)}{\alpha} & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ \frac{\Phi(+\infty)}{\alpha} & \text{für } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Dieser Satz läßt sich durch die Substitution $\tau = -u$, $\alpha = -\beta$, $t = -r$ auf den vorigen zurückführen:

$$\int_t^{\infty} e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^r e^{\beta(r-u)} \Phi(-u) du.$$

Wir schreiben nun $Y(t)$ unter Benutzung von (4.2) in expliziter Gestalt so:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} Y(t) = Y(-\infty) + \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - F(-\infty)] d\tau \\ - \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} \int_t^{+\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - F(-\infty)] d\tau. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 6 und 7 streben die Integrale gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$. Also ergibt sich:

$$Y(t) \rightarrow Y(-\infty) = \frac{F(-\infty)}{c_0} \quad \text{für } t \rightarrow -\infty.$$

Für die Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten erhält man nach (4.7):

$$(4.10) \quad \begin{aligned} Y^{(\nu)}(t) = \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{\alpha_\mu^\nu}{p'(\alpha_\mu)} \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - F(-\infty)] d\tau \\ - \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{\alpha_\mu^\nu}{p'(\alpha_\mu)} \int_t^{+\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - F(-\infty)] d\tau \quad (\nu = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Auch hier streben die Integrale gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$, also gilt:

$$Y^{(\nu)}(t) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow -\infty \quad (\nu = 1, \dots, n-1).$$

$Y(t)$ erfüllt also alle Anfangsbedingungen.

Nebenbei wollen wir noch feststellen, daß $Y(t)$ und seine Ableitungen auch Grenzwerte für $t \rightarrow +\infty$ haben, wenn keine Nullstelle α_μ mit $\Re \alpha_\mu = 0$ vorkommt. Nach Hilfssatz 6 und 7 ist

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = Y(-\infty) - \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\alpha_\mu p'(\alpha_\mu)} [F(+\infty) - F(-\infty)].$$

$\frac{1}{\alpha_\mu p'(\alpha_\mu)}$ ist das Residuum von $\frac{1}{s p(s)}$ in α_μ ($\alpha_\mu \neq 0$). $\frac{1}{s p(s)}$ besitzt außer in den Punkten $\alpha_\mu \neq 0$ auch noch ein Residuum in $s=0$ zum Wert $\frac{1}{p(0)} = \frac{1}{c_0}$ ($c_0 \neq 0$). Die Summe aller Residuen ist gleich 0, weil $p(s)$ mindestens vom Grad 1, also $s p(s)$ mindestens vom Grad 2 ist. Daher ist

$$(4.11) \quad \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\alpha_\mu p'(\alpha_\mu)} = -\frac{1}{c_0}$$

und folglich wegen (4.2):

$$Y(+\infty) = \frac{F(+\infty)}{c_0}.$$

Für die Ableitungen ergibt sich nach (4.10) und den Hilfssätzen 6 und 7:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y^{(\nu)}(t) = - \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu^{\nu-1}}{p'(\alpha_\mu)} [F(+\infty) - F(-\infty)] \quad (\nu = 1, \dots, n-1).$$

Wie schon in Abschnitt 3 unter b) bemerkt, ist

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu^{\nu-1}}{p'(\alpha_\mu)} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n-1),$$

also

$$Y'(+\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(+\infty) = 0.$$

Schließlich zeigen wir noch, daß $Y(t)$ sich unter den jetzigen Voraussetzungen auf eine einfachere Gestalt bringen läßt. Nach (4.9) ist

$$Y(t) = Y(-\infty) + \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} F(\tau) d\tau + F(-\infty) \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{1}{\alpha_\mu p'(\alpha_\mu)} \\ - \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} \int_t^{+\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} F(\tau) d\tau + F(-\infty) \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{1}{\alpha_\mu p'(\alpha_\mu)}$$

oder wegen (4.11):

$$Y(t) = Y(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau - \frac{F(-\infty)}{c_0} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau.$$

Die Ergebnisse fassen wir so zusammen:

Satz 1. Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$Y^{(n)} + c_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + c_1 Y' + c_0 Y = F(t)$$

im Intervall $-\infty < t < +\infty$. Das charakteristische Polynom

$$p(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$$

habe die einfachen Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. $F(t)$ sei stetig und besitze die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = F(-\infty), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = F(+\infty).$$

Gesucht wird eine Lösung mit gegebenen Anfangswerten

$$Y(-\infty), Y'(-\infty), \dots, Y^{(n-1)}(-\infty).$$

Eine solche Lösung existiert im allgemeinen¹⁴⁾ nur, wenn keine Nullstelle α_μ den Realteil 0 hat (so daß $c_0 \neq 0$), und

$$Y(-\infty) = \frac{F(-\infty)}{c_0}, \quad Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$$

ist. Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau + \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} k_\mu e^{\alpha_\mu t} \quad (k_\mu \text{ beliebig})$$

mit der GREENSchen Funktion

$$Q(t) = U(t) \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t} - U(-t) \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t}.$$

Sie ist nur dann eindeutig, wenn $p(s)$ keine Nullstelle mit positivem Realteil hat. Die spezielle Lösung

$$Y_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau$$

hat die Endwerte

$$Y_0(+\infty) = \frac{F(+\infty)}{c_0}, \quad Y_0'(+\infty) = \dots = Y_0^{(n-1)}(+\infty) = 0.$$

Diesem Ergebnis kann man nun eine andere Wendung geben. Schreibt man statt der n Anfangswerte die zwei Randwerte

$$Y(-\infty) = \frac{F(-\infty)}{c_0}, \quad Y(+\infty) = \frac{F(+\infty)}{c_0}$$

vor, so ist die Lösung, falls eine solche existiert, eindeutig, denn die Differenz zweier Lösungen befriedigt die homogene Differentialgleichung und hat die Randwerte 0, muß also identisch verschwinden (gleichgültig, welche Werte die α_μ haben). Unter den Voraussetzungen von Satz 1 hat die spezielle Lösung $Y_0(t)$ die verlangten Randwerte, also ist sie die gesuchte Lösung. Wir erhalten daher:

Satz 2. Wenn $p(s)$ nur einfache Nullstellen mit $\Re \alpha_\mu \geq 0$ hat und $F(t)$ stetig ist und die Grenzwerte $F(-\infty)$ und $F(+\infty)$ besitzt, so wird die einzige Lösung der Differentialgleichung mit den Randwerten

$$Y(-\infty) = \frac{1}{c_0} F(-\infty), \quad Y(+\infty) = \frac{1}{c_0} F(+\infty)$$

¹⁴⁾ Das bedeutet: wenn $F(t)$ nicht noch weitere Bedingungen erfüllt.

gegeben durch

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau.$$

5. Lösung unter Voraussetzung der Existenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt$.

Wir machen nunmehr außer der Stetigkeit eine andere Voraussetzung über $F(t)$, nämlich die, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt$ existiert. Auch in diesem Fall kann $Y(-\infty)$ nicht beliebig vorgeschrieben werden. Denn zunächst folgt, daß

$$(5.1) \quad \int_{-\infty}^0 \{Y^{(n)}(\tau) + c_{n-1} Y^{(n-1)}(\tau) + \dots + c_1 Y'(\tau) + c_0 Y(\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^0 F(\tau) d\tau$$

sein muß. Wenn nun für $Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}$ Anfangswerte vorgeschrieben sind, so existiert

$$\int_{-\infty}^0 Y^{(n)}(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} [Y^{(n-1)}(0) - Y^{(n-1)}(-\omega)] = Y^{(n-1)}(0) - Y^{(n-1)}(-\infty),$$

ebenso

$$\int_{-\infty}^0 Y^{(n-1)}(\tau) d\tau, \dots, \int_{-\infty}^0 Y'(\tau) d\tau.$$

Daher existiert wegen (5.1) auch

$$\int_{-\infty}^0 Y(\tau) d\tau.$$

Wenn $Y(\tau)$ für $\tau \rightarrow -\infty$ einen Grenzwert hat, so kann dieser also nur 0 sein. Es ist somit *jetzt vorzuschreiben*:

$$(5.2) \quad Y(-\infty) = 0.$$

Infolgedessen nimmt die Funktion (2.11) von vornherein die Gestalt an:

$$(5.3) \quad Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau.$$

Man übersieht sofort, daß die Einzelintegrale (4.5) und (4.6) sämtlich konvergieren, auch die Integrale mit $\alpha_\mu = 0$ und mit rein imaginärem α_μ .

Daß $Y(t)$ die *Differentialgleichung befriedigt*, ergibt sich auf dieselbe Weise wie in Abschnitt 4. Um die *Anfangswerte* festzustellen, formen wir die Einzelintegrale in (5.3) durch partielle Integration um:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \Re \alpha_\mu < 0: \quad \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} F(\tau) d\tau &= e^{\alpha_\mu(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\tau} F(u) du \Big|_{-\infty}^t + \alpha_\mu \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} F(u) du \\ &= \int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau + \alpha_\mu \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} F(u) du, \end{aligned}$$

dies strebt nach Hilfssatz 6 gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$;

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \Re \alpha_\mu > 0: \quad \int_t^{\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} F(\tau) d\tau &= -e^{\alpha_\mu(t-\tau)} \int_{\tau}^{\infty} F(u) du \Big|_t^{\infty} - \alpha_\mu \int_t^{\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} d\tau \int_{\tau}^{\infty} F(u) du \\ &= \int_t^{\infty} F(\tau) d\tau - \alpha_\mu \int_t^{\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} d\tau \int_{\tau}^{\infty} F(u) du, \end{aligned}$$

dies strebt nach Hilfssatz 7 für $t \rightarrow -\infty$ gegen

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau - \alpha_\mu \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau}{\alpha_\mu}}{\alpha_\mu} = 0.$$

Die Integrale mit $\alpha_\mu = 0$:

$$\int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau,$$

und mit rein imaginären $\alpha_\mu = i\beta_\mu$:

$$\int_{-\infty}^t e^{i\beta_\mu(t-\tau)} F(\tau) d\tau,$$

streben trivialerweise gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$. Also ist $Y(-\infty) = 0$.

Formt man die Ableitungen $Y^{(\nu)}(t)$ [vgl. (4.10)] analog zu (5.4) und (5.5) um, so erhält man:

$$\begin{aligned} Y^{(\nu)}(t) = & \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{\alpha_\mu^\nu}{p'(\alpha_\mu)} \left\{ \int_{-\infty}^t F(\tau) d\tau + \alpha_\mu \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^\tau F(u) du \right\} \\ & - \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{\alpha_\mu^\nu}{p'(\alpha_\mu)} \left\{ \int_t^\infty F(\tau) d\tau - \alpha_\mu \int_t^\infty e^{\alpha_\mu(t-\tau)} d\tau \int_\tau^\infty F(u) du \right\} \\ & + \sum_{\Re \alpha_\mu = 0} \frac{\alpha_\mu^\nu}{p'(\alpha_\mu)} \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} F(\tau) d\tau \quad (\nu = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Wie bei $Y(t)$ streben alle Einzelintegrale für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0.

Analog zum vorigen Abschnitt stellen wir noch den Grenzwert von $Y(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ fest. Nach Hilfssatz 6 und 7 ist

$$\begin{aligned} Y(+\infty) = & \sum_{\Re \alpha_\mu < 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau + \alpha_\mu \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau}{-\alpha_\mu} \right\} \\ & - \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} \{0 - 0\} \\ & + \frac{1}{p'(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) d\tau \quad (\text{falls ein } \alpha_\mu = 0) \\ & + \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{\Re \alpha_\mu = 0, \alpha_\mu \neq 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_\mu \tau} F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Der letzte limes ist im allgemeinen nicht vorhanden (nur wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_\mu \tau} F(\tau) d\tau = 0$ ist, ist er gleich 0). Wir können also im allgemeinen den Grenzwert von $Y(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ nur bilden, wenn $p(s)$ keine imaginären Nullstellen hat. Dann ergibt sich:

$$Y(+\infty) = \begin{cases} \frac{1}{p'(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt, & \text{wenn ein } \alpha_\mu = 0, \\ 0, & \text{wenn alle } \alpha_\mu \neq 0. \end{cases}$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 3. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung habe nur einfache Nullstellen, die aber beliebige Werte haben können. $F(t)$ sei stetig, und es sei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < \infty.$$

Eine Lösung im Intervall $(-\infty, +\infty)$ mit gegebenen Anfangswerten existiert nur, wenn diese sämtlich verschwinden:

$$Y(-\infty) = Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau + \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} k_\mu e^{\alpha_\mu t} \quad (k_\mu \text{ beliebig})$$

mit

$$Q(t) = U(t) \sum_{\Re \alpha_\mu \leq 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t} - U(-t) \sum_{\Re \alpha_\mu > 0} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t}.$$

Die spezielle Lösung

$$Y_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau$$

hat im allgemeinen einen Endwert $Y_0(+\infty)$ nur dann, wenn keine Nullstelle von $p(s)$ rein imaginär ist. Es ist

$$Y_0(+\infty) = \begin{cases} \frac{1}{p'(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt & \text{für } c_0 = 0, \\ 0 & \text{für } c_0 \neq 0. \end{cases}$$

Aus dem letzten Ergebnis folgt analog zu Satz 2:

Satz 4. Wenn $p(s)$ nur einfache Nullstellen hat, von denen keine rein imaginär ist, und wenn $F(t)$ stetig sowie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < \infty$$

ist, so wird die einzige Lösung mit den Randwerten

$$Y(-\infty) = 0, \quad Y(+\infty) = \begin{cases} \frac{1}{p'(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt & \text{für } c_0 = 0, \\ 0 & \text{für } c_0 \neq 0 \end{cases}$$

gegeben durch

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau) d\tau.$$

Rein imaginäre Nullstellen $\alpha_\mu = i\beta_\mu$ von $p(s)$ sind zulässig, wenn die β_μ Nullstellen der Fourier-Transformierten von $F(t)$ sind¹⁵⁾:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\beta_\mu t} F(t) dt = 0.$$

¹⁵⁾ Man kann das so ausdrücken: In dem Spektrum von $F(t)$ soll die Eigenschwingung $e^{i\beta_\mu t}$ der Differentialgleichung nicht vorkommen.

6. Weitere Lösungen.

Wir haben in Abschnitt 2 zu der mittels \mathfrak{L}_{II} -Transformation erhaltenen Bildfunktion $\hat{y}(s)$ diejenige Originalfunktion $Y(t) - Y(-\infty)$ hergestellt, die ihr in dem Streifen $0 < \Re s < \Re \alpha_{m+1}$ entspricht. Dieser Streifen wurde deshalb zunächst ausgewählt, weil die ihm zugeordnete Lösung am übersichtlichsten bezüglich der $F(t)$ aufzuerlegenden Bedingungen ist. Man kann nun weiter die Rücktransformation auch in den übrigen Streifen vornehmen, wodurch Lösungen mit anderen Bedingungen für $F(t)$ entstehen. Solange man das in Hilfssatz 5 formulierte Differentiationsgesetz benutzen will, muß der Streifen in der rechten Halbebene der s -Ebene liegen. Es sei $\sigma > 0$ eine Zahl, die von allen $\Re \alpha_\mu$ verschieden ist, so daß die α_μ in die beiden Klassen mit $\Re \alpha_\mu < \sigma$ und $\Re \alpha_\mu > \sigma$ zerfallen (eine der beiden Klassen kann leer sein). In dem Streifen zwischen den α_μ , der den Punkt σ enthält, entspricht der Bildfunktion $\frac{1}{p(s)}$ die Originalfunktion

$$(6.1) \quad Q(t) = U(t) \sum_{\Re \alpha_\mu < \sigma} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t} - U(-t) \sum_{\Re \alpha_\mu > \sigma} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t}.$$

Unter $\hat{f}(s)$ ist jetzt die Bildfunktion zu verstehen, die der Originalfunktion $F(t) - c_0 Y(-\infty)$ in dem Streifen mit dem inneren Punkt σ entspricht. Dann gehört zu der Bildfunktion $\frac{1}{p(s)} \hat{f}(s)$ wieder eine Funktion der Gestalt (2.11), wobei aber $Q(t)$ jetzt die Form (6.1) hat, im übrigen jedoch analoge Eigenschaften wie die frühere GREENSche Funktion besitzt.

Um Konvergenz des Faltungsintegrals zu erzielen, wird man jetzt zunächst (in Analogie zu Abschnitt 4) voraussetzen, daß

$$(6.2) \quad F(t) - c_0 Y(-\infty) = O(e^{\sigma t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty$$

ist. Da hieraus

$$F(t) - c Y(-\infty) = o(1) \quad \text{für } t \rightarrow -\infty$$

folgt, ergibt sich auch hier die Gleichung (4.2), so daß im Falle $c_0 \neq 0$ für $Y(-\infty)$ nur der Wert $\frac{1}{c_0} F(-\infty)$ in Frage kommt, während für $c_0 = 0$: $F(-\infty) = 0$ sein muß und $Y(-\infty)$ beliebig ist. Daß die Funktion (2.11) die Differentialgleichung befriedigt, ergibt sich wie in Abschnitt 3, während das Erfülltsein der Anfangsbedingungen jetzt durch einfache Abschätzung folgt, z. B. für die Integrale in $Y(t)$:

$$\begin{aligned} \Re \alpha_\mu < \sigma: \quad & \left| \int_{-\infty}^t e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \right| \leq C \int_{-\infty}^t e^{\Re \alpha_\mu(t-\tau) + \sigma \tau} d\tau \\ & = C \frac{e^{\sigma t}}{\sigma - \Re \alpha_\mu} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow -\infty, \\ \Re \alpha_\mu > \sigma: \quad & \left| \int_t^{\infty} e^{\alpha_\mu(t-\tau)} [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau \right| \leq C \int_t^{\infty} e^{\Re \alpha_\mu(t-\tau) + \sigma \tau} d\tau \\ & = C \frac{e^{\sigma t}}{\Re \alpha_\mu - \sigma} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Man kommt damit zu einem ähnlichen Resultat wie in Satz 1, nur wird jetzt die Voraussetzung (6.2) gemacht, und die Lösung behält die kompliziertere Gestalt (2.11).

Ein Analogon zu Satz 3 erhält man durch die Voraussetzung

$$(6.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t} |F(t) - c_0 Y(-\infty)| dt < \infty.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß σ größer als alle $\Re \alpha_\mu$ ist. Dann hat $Q(t)$ die Gestalt

$$(6.4) \quad Q(t) = U(t) \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t},$$

und es ist

$$(6.5) \quad Y(t) - Y(-\infty) = \int_{-\infty}^t Q(t-\tau) [F(\tau) - c_0 Y(-\infty)] d\tau,$$

wobei voraussetzen ist:

$$(6.6) \quad F(t) - c_0 Y(-\infty) = O(e^{\sigma t}) \quad \text{für } t \rightarrow \pm \infty \text{ mit } \sigma > \max_{1 \leq \mu \leq n} (\Re \alpha_\mu, 0).$$

Diese Lösung hängt nur von den Werten von $F(\tau)$ für $\tau \leq t$ ab, ist also den durch die Vergangenheit determinierten Systemen am besten angepaßt, falls positive $\Re \alpha_\mu$ vorkommen.

Will man Lösungen konstruieren, die den *Streifen in der linken Halbebene* zugeordnet sind, so muß man dasjenige Differentiationsgesetz der \mathfrak{L}_{II} -Transformation verwenden, das für s -Werte mit $\Re s < 0$ gilt und in dem selbstverständlich die Endwerte $Y(+\infty)$, $Y'(+\infty)$, usw. anstelle der Anfangswerte vorkommen.

Mit derselben Methode lassen sich auch *Systeme* von Differentialgleichungen im zweiseitig unendlichen Intervall behandeln.

(Eingegangen am 9. Januar 1953.)

Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen*).

Von
JÜRGEN MOSER in Göttingen.

I. Das restringierte Dreikörperproblem ist häufig, insbesondere in drei großen Arbeiten von G. D. BIRKHOFF, untersucht worden¹⁾. Dort wird auch die Existenz periodischer Lösungen nachgewiesen, die sich erst nach vielen Umläufen schließen. Dazu wird ein auf POINCARÉ zurückgehender Fixpunktsatz bei einer Ringtransformation, das sog. letzte geometrische Theorem von POINCARÉ, benutzt. Dabei sind viele genauere Betrachtungen über die Lösungsmannigfaltigkeit im Großen erforderlich. Hier soll nun zum Nachweis solcher periodischen Lösungen, die sich erst nach vielen Umläufen schließen, ein Fixpunktsatz von BIRKHOFF verwendet werden, der sich auf inhaltstreue analytische Abbildungen im Kleinen bezieht. Auf die Weise ist es möglich, eine genauere Aussage über die Lage der gefundenen Lösungen zu machen. Die Schlußweise verläuft wie in einer von C. L. SIEGEL gehaltenen Vorlesung über Himmelsmechanik²⁾. Die Schwierigkeit liegt vor allem darin, die Voraussetzungen für den BIRKHOFFschen Fixpunktsatz als erfüllt nachzuweisen.

Die Fragestellung des ebenen restringierten Dreikörperproblems ist die folgende: Es seien drei Massenpunkte P_1, P_2, P_3 gegeben, die sich nach dem NEWTONschen Gesetz anziehen. Dabei wird die Masse von P_3 als Null angenommen, so daß die Bewegung der Massenpunkte P_1 und P_2 von P_3 unabhängig wird, und es wird insbesondere vorausgesetzt, daß P_1, P_2 mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um ihren Schwerpunkt in Kreisbahnen umlaufen. P_3 bewege sich in derselben Ebene wie P_1 und P_2 . Es wird nach der Bahn von P_3 gefragt.

Die Gravitationskonstante werde zu 1 normiert und die Masseneinheit so gewählt, daß P_1 die Masse $1 - \mu$, P_2 die Masse μ hat; $0 \leq \mu \leq 1$. Führt man ein mit der Winkelgeschwindigkeit 1 rotierendes Koordinatensystem (Koordinaten x_1, x_2) ein, das so gewählt ist, daß der Ursprung im Schwerpunkt von P_1 und P_2 liegt und P_1, P_2 auf der x_1 -Achse liegen, so lautet das

* Diese Arbeit wurde durch die Unterstützung der deutschen Forschungsgemeinschaft ermöglicht, der ich hier meinen ergebensten Dank aussprechen möchte.

¹⁾ G. D. BIRKHOFF: The restricted problem of three bodies, Rend. Circ. mat. Palermo **39**, 1—70 (1915); G. D. BIRKHOFF: Sur le problème restreint des trois corps I, II Annali R. Scuola Normale Superiore Pisa (2) **4**, 267—306 (1935) und **5**, 1—42 (1936).

²⁾ C. L. SIEGEL: Himmelsmechanik, Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1951/52 an der Universität Göttingen, als Manuskript vervielfältigt; S. 175—176.

Differentialgleichungssystem für P_3 mit den Koordinaten x_1, x_2 :

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k &= H_{y_k} \\ \dot{y}_k &= -H_{x_k} \end{aligned} \quad (k=1, 2)$$

$$H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{\mu}{((x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 - \mu}{((x_1 + \mu)^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Alle auftretenden Größen sind reell.

Dieses Differentialgleichungssystem vierter Ordnung wird für kleine Werte von μ untersucht. Für $\mu = 0$ ist (1) das Differentialgleichungssystem des Zweikörperproblems; insbesondere findet man als periodische Lösungen für $\mu = 0$ die Kreisbahnen

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \omega t, & y_1 &= -(\omega + 1) \varrho \sin \omega t \\ x_2 &= \varrho \sin \omega t, & y_2 &= (\omega + 1) \varrho \cos \omega t \end{aligned} \quad \text{mit } (\omega + 1)^2 \varrho^2 = 1, \omega \neq 0.$$

Die Periode ist $\frac{2\pi}{\omega}$. Mit Hilfe der Kontinuitätsmethode von POINCARÉ lassen sich, wie unten ausgeführt wird, für kleine Werte von μ in der Nähe dieser Kreislösungen (2) auch periodische Lösungen von (1) mit derselben Periode $\frac{2\pi}{\omega}$

nachweisen, falls $\omega \neq \frac{1}{n}$ für $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Diese Lösungen durchsetzen die Ebene $x_2 = 0$, und da das Differentialgleichungssystem (1) die Zeit t nicht explizit enthält, kann man $x_2(0) = 0$ annehmen. Wir bezeichnen die Anfangswerte dieser periodischen Lösungen für $t = 0$ mit $\xi_k(\mu)$, $\eta_k(\mu)$ ($k = 1, 2$), so daß $\xi_2(\mu) = 0$ ist. Dann ergeben sich die $\xi_k(\mu)$, $\eta_k(\mu)$ als für kleine Werte von μ konvergente Potenzreihen. Ferner bezeichnen wir mit $h(\mu)$ den Wert von H für diese periodische Lösung.

Die Schlußweise zum Nachweis periodischer Lösungen, die sich erst nach vielen Umläufen schließen, ist die folgende: Bei festem hinreichend kleinen μ werden die Lösungen von (1) mit folgenden Anfangswerten betrachtet:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1(\mu) + \varrho x, & x_2 &= 0 \\ y_1 &= \eta_1(\mu) + (\omega + 1) \varrho y, & H &= h(\mu) \end{aligned} \quad \text{für } t = 0.$$

Dabei sind x, y reelle Parameter. Für hinreichend kleine Werte von x, y, μ ist hierdurch die Lösung eindeutig festgelegt, da $H_{y_2} = \omega \varrho \neq 0$ für $x = y = \mu = 0$, $t = 0$ gilt. Für $x = y = 0$ erhält man die periodische Ausgangslösung. Für hinreichend kleine Werte von x, y werden die betrachteten Lösungen nach einer Zeit $t = T$, die nur wenig von $\frac{2\pi}{\omega}$ verschieden ist, wieder die Ebene $x_2 = 0$ schneiden. Nach allgemeinen Sätzen über Differentialgleichungssysteme ergibt sich T als eine für kleine Werte von x, y, μ konvergente Potenzreihe. Für $t = T$ erhält man dann

$$(3') \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1(\mu) + \varrho X, & x_2 &= 0 \\ y_1 &= \eta_1(\mu) + (\omega + 1) \varrho Y, & H &= h(\mu) \end{aligned} \quad (t = T),$$

wobei sich auch die X, Y als konvergente Potenzreihen in x, y, μ ergeben, wenn x, y, μ hinreichend klein sind. Da $x = y = 0$ der periodischen Lösung

entspricht, wird $X = Y = 0$ für $x = y = 0$ und kleine Werte von μ . Auf diese Weise wird zwischen den x, y und den X, Y eine analytische Abbildung \mathfrak{A} :

$$(4) \quad \begin{aligned} X &= f(x, y; \mu) \\ Y &= g(x, y; \mu), \end{aligned}$$

die den Nullpunkt als Fixpunkt hat, vermittelt. Mit \mathfrak{A}^p ($p = 1, 2, 3 \dots$) werde die p -mal iterierte Abbildung bezeichnet. Dann entspricht jedem Fixpunkt von \mathfrak{A}^p eine Lösung von (1), die periodisch ist. Jedem solchen Fixpunkt von \mathfrak{A}^p aus einer hinreichend kleinen Umgebung des Ursprungs, der nicht auch Fixpunkt von \mathfrak{A}^k ($k = 1, 2, \dots, p-1$) ist, entspricht eine periodische Lösung, die die Ebene $x_2 = 0$ in einer geeigneten Umgebung der periodischen Ausgangslösung genau p -mal trifft, oder, wie man auch sagen kann, die sich erst nach p Umläufen schließt; offenbar gilt auch das Umgekehrte. Damit ist die Frage nach den periodischen Lösungen, die sich erst nach vielen Umläufen schließen, auf die Untersuchung der Fixpunkte von \mathfrak{A}^p zurückgeführt.

Aus der Tatsache, daß das Differentialgleichungssystem (1) kanonisch ist, leitet man her, daß die Abbildung \mathfrak{A} inhaltstreu ist³⁾:

$$(5) \quad f_x g_y - f_y g_x = 1.$$

Derartige inhaltstreu Abbildungen wurden eingehend von G. D. BIRKHOFF⁴⁾ untersucht und Normalformen angegeben. Wesentlich für die Diskussion ist die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der linearen Glieder von

$$\begin{aligned} f(x, y; \mu) &= \alpha x + \beta y + \dots \\ g(x, y; \mu) &= \gamma x + \delta y + \dots \end{aligned}$$

Wegen (5) wird $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, also das Produkt der Eigenwerte von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ gleich 1. Für $\mu = 0$ ergeben sich die Eigenwerte als zueinander konjugiert komplex; sie werden daher mit $\lambda, \bar{\lambda}$ bezeichnet. Man hat $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. Unter der Voraussetzung $\lambda \neq \pm 1$ folgt hieraus, daß die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ auch für kleine Werte von μ zueinander konjugiert komplexe konvergente Potenzreihen in μ sind. Gilt ferner $\lambda^3 \neq 1, \lambda^4 \neq 1$ (was $\lambda \neq \pm 1$ impliziert), so kann man eine solche reelle inhaltstreu Transformation \mathfrak{T} :

$$\begin{aligned} x &= f_1(a, b; \mu), & X &= f_1(A, B; \mu) \\ y &= g_1(a, b; \mu), & Y &= g_1(A, B; \mu) \end{aligned}$$

finden, daß $\mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{T} = \mathfrak{B}$ die Gestalt

$$(6) \quad \begin{aligned} A &= a \cos \chi + b \sin \chi + \mathfrak{P}_4 \\ B &= -a \sin \chi + b \cos \chi + \mathfrak{Q}_4 \end{aligned}$$

³⁾ Vgl. z. B. G. D. BIRKHOFF: Dynamical Systems, New York 1927.

⁴⁾ G. D. BIRKHOFF, Surface Transformations and their dynamical applications, Acta math. 43, 1—119 (1920).

mit $\chi = c_0 + c_1(a^2 + b^2)$ erhält. Dabei sind f_1, g_1 für hinreichend kleine a, b, μ konvergente Potenzreihen und $\mathfrak{P}_4, \mathfrak{Q}_4$ Potenzreihen in a, b, μ , die nach Potenzen von a, b geordnet nur Glieder von mindestens viertem Grade enthalten. Die c_0, c_1 ergeben sich als Potenzreihen in μ .

Für solche Abbildungen \mathfrak{A} hat unter der Voraussetzung $c_1 \neq 0$ der BIRKHOFFSCHE Fixpunktsatz⁵⁾ Gültigkeit: In jeder Umgebung des Ursprungs gibt es zu genügend großem $p = 1, 2, \dots$ Fixpunkte $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der iterierten Abbildung $\mathfrak{A}^p: \mathfrak{A}^p \bar{x} = \bar{x}$. Wählt man insbesondere p als Primzahl und die betrachtete Umgebung hinreichend klein, so folgt leicht, daß die Punkte $\mathfrak{A}^k \bar{x}$ für $k = 1, 2, \dots, p$ alle voneinander verschieden sind. Solche Fixpunkte führen zu periodischen Lösungen von (1), die sich erst nach p Umläufen schließen.

Für diese Schlußweise ist die Voraussetzung $c_1 \neq 0$ wesentlich. Diese Tatsache soll im folgenden bestätigt werden. Da c_1 eine Potenzreihe in μ ist, genügt es, $c_1 \neq 0$ für $\mu = 0$ nachzuweisen. Damit ist die Frage auf die Untersuchung von \mathfrak{A} für $\mu = 0$ zurückgeführt. Es soll gezeigt werden, daß

$$(7) \quad \chi = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{3(\omega+1)}{\omega^2} \pi(a^2 + b^2), \quad \lambda = e^{\pm \frac{2\pi}{\omega} i}$$

wird.

Zusammenfassend erhält man das Resultat: Es sei

$$\omega \neq 0, \frac{3}{n}, \frac{4}{n} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

fest gewählt. Dann gibt es für jedes feste hinreichend kleine μ und zu einer genügend großen Primzahl p in der Nähe der periodischen Ausgangslösung periodische Lösungen des Differentialgleichungssystems (1), die sich erst nach p Umläufen schließen, d. h. Lösungen, die die Ebene $x_2 = 0$ in einer geeigneten Umgebung der Ausgangsstelle $x_1 = \varrho, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = (\omega + 1)\varrho$ genau p -mal treffen. Folglich gibt es zu jedem hinreichend kleinen μ unendlich viele periodische Lösungen von (1).

Für $\mu = 0$ sind dies offenbar Ellipsenbahnen von P_3 , deren Umlaufszeit mit 2π ein rationales Verhältnis besitzt. Diese Bahnen schließen sich in dem rotierenden Koordinatensystem erst nach vielen Umläufen. Man könnte auch versuchen, periodische Lösungen von (1), die sich erst nach vielen Umläufen schließen, aus diesen Ellipsenbahnen mit der POINCARÉSCHEN Kontinuitätsmethode zu gewinnen. Dazu wäre zunächst noch der Nachweis erforderlich, daß die Voraussetzungen für diese Methode erfüllt sind. Ferner brauchen diese Lösungen nicht mit den hier gefundenen übereinzustimmen, da letztere in der Nähe der periodischen Ausgangslösungen liegen, während erstere in der Nähe der Ellipsenbahnen liegen.

Das gewonnene Ergebnis gilt offenbar auch in dem Falle, daß H durch eine Funktion der x_k, y_k, μ ersetzt wird, die in einer Umgebung von jedem Punkt mit $x_1^2 + x_2^2 \neq 0, 1$ für hinreichend kleine μ eine in x_k, y_k, μ konvergente

⁵⁾ BIRKHOFF, Surface transformations . . . loc. cit. Chap. III § 42 ff.

Potenzreihe ist und für $\mu = 0$ die Form

$$H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

hat.

II. Von nun ab braucht nur noch das Differentialgleichungssystem (1) für $\mu = 0$ untersucht zu werden:

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x}_k = H_{y_k} \\ \dot{y}_k = -H_{x_k} \\ H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1}{r} \end{cases} \quad \begin{matrix} (k = 1, 2) \\ \\ (r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}) \end{matrix}$$

Dieses System beschreibt die Bewegung des Massenpunktes P_3 unter dem Einfluß von P_1 alleine in einem rotierenden Koordinatensystem. Es lassen sich drei unabhängige Integrale für dieses System angeben. Zunächst sind bekanntlich H und $D = x_2 y_1 - x_1 y_2$ Integrale. Setzt man

$$U = \frac{x_1}{r} + D y_2, \quad V = \frac{x_2}{r} - D y_1,$$

so folgt aus (8): $\dot{U} = V$, $\dot{V} = -U$, so daß man auch den zeitlichen Verlauf von U , V kennt. Wir unterwerfen die x_k , y_k folgender Transformation \mathfrak{T} :

$$(9) \quad \begin{cases} \Phi = \arctg \frac{x_2}{x_1} \\ H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + D - \frac{1}{r} \\ U = \frac{x_1}{r} + D y_2 \\ V = \frac{x_2}{r} - D y_1 \end{cases} \quad (D = x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

Diese Transformation \mathfrak{T} ist in der Umgebung von jedem Punkt der Ausgangslösung (2) umkehrbar eindeutig, denn die Funktionaldeterminante hat dort den von t unabhängigen Wert $-\omega(\omega+1)\varrho \neq 0$.

Durch die Transformation \mathfrak{T} wird (8) übergeführt in

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= -1 - D^{-2} (1 - U \cos \Phi - V \sin \Phi)^2 \\ \dot{H} &= 0 \\ \dot{U} &= V \\ \dot{V} &= -U. \end{aligned}$$

Bezeichnet man also die Anfangswerte von Φ , H , U , V für $t = 0$ mit φ , h , u , v , so hat man

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\Phi} = -1 - D^{-2} (1 - u \cos (\Phi + t) - v \sin (\Phi + t))^2 \\ H = h \\ U = u \cos t + v \sin t \\ V = -u \sin t + v \cos t \end{cases}$$

so daß nur eine Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen bleibt. Nach (10) ist $U^2 + V^2$ ein Integral, das aber von H, D abhängig ist; man findet nämlich

$$(11) \quad U^2 + V^2 = 1 - \frac{2D^2}{r} + D^2(y_1^2 + y_2^2) = 1 + 2D^2(H - D).$$

Man beweist, daß die Kreislösungen (2) dadurch charakterisiert sind, daß für sie die rechte Seite von (11) verschwindet, für sie ist also $U = V = 0$ für alle t . Gerade hierin besteht der Vorteil der neuen Variablen U, V . Die Kreislösung (2) erhält die Form

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{\Phi} = \omega t \\ H = h_0 = -\frac{1}{2\varrho} - (\omega + 1)\varrho^2 \\ U = 0 \\ V = 0. \end{cases}$$

Es ist nun leicht, periodische Lösungen mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ des Differentialgleichungssystems (1) für kleine Werte von μ nachzuweisen. Durch die Transformation \mathfrak{T} geht (1) über in

$$(10') \quad \begin{cases} \dot{\Phi} = f_1 \\ \dot{H} = f_2 = 0 \\ \dot{U} = f_3 \\ \dot{V} = f_4, \end{cases}$$

wobei die $f_k = f_k(\Phi, H, U, V; \mu)$ in der Umgebung der Kreislösung analytische Funktionen aller Variablen sind. Wir betrachten nun die Lösungen von (10') mit $\varphi = 0$, für die die Anfangswerte h, u, v in der Nähe von $h_0, 0, 0$ liegen. Diese Lösungen liegen in der Nähe der Kreislösung (12). Soll die Lösung in den alten Koordinaten x_k, y_k die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ haben, so muß

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\pi, \quad H = h \\ U - u &= 0 \\ V - v &= 0 \end{aligned}$$

für $t = \frac{2\pi}{\omega}$ gelten. Da H ein Integral ist, gilt ohnehin $H = h$. Die anderen drei Gleichungen sind für $\mu = 0$ und für die Lösung (12) erfüllt. Daher lassen sich diese Gleichungen auch für kleine Werte von μ erfüllen, wenn die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_h & \Phi_u & \Phi_v \\ U_h & U_u - 1 & U_v \\ V_h & V_u & V_v - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_h & \Phi_u & \Phi_v \\ 0 & -1 + \cos \frac{2\pi}{\omega} & \sin \frac{2\pi}{\omega} \\ 0 & -\sin \frac{2\pi}{\omega} & -1 + \cos \frac{2\pi}{\omega} \end{vmatrix} = \Phi_h \cdot 4 \left(\sin \frac{\pi}{\omega} \right)^2$$

für $u = v = 0, h = h_0$ nicht verschwindet. Φ_h erhält man aus (10): Es wird

nämlich $\dot{\Phi}_h = 3 D_h D^{-4}$ für $u = v = 0$. Durch Differentiation von (11) findet man

$$0 = 4 D D_h h + 2 D^2 - 6 D^2 D_h = 2 D [(2 h - 3 D) D_h + D];$$

hieraus folgt $D_h = D (3 D - 2 h)^{-1} = -\frac{1}{\omega}$ für $h = h_0$, $u = v = 0$. Daher wird $\dot{\Phi}_h = -\frac{3}{\omega \varrho^3}$, also für $t = \frac{2\pi}{\omega}$ wird $\Phi_h = -\frac{3}{\omega \varrho^3} \frac{2\pi}{\omega} = -\frac{6\pi}{\omega^2 \varrho^3}$, mithin

$$\Delta = -\frac{24\pi}{\omega^2 \varrho^3} \left(\sin \frac{\pi}{\omega} \right)^2 \neq 0 \text{ für } \omega \neq \frac{1}{n} \ (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Unter dieser letzten Voraussetzung ist demnach die Existenz periodischer Lösungen von (1) mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ für kleine μ gewährleistet. Dabei ergeben sich die Anfangswerte h, u, v als Potenzreihen in μ ; folglich werden auch die Anfangswerte von den x_k, y_k reguläre Funktionen von μ . Der Fall, daß $\frac{1}{\omega}$ ganzzahlig ist, wurde übrigens von E. HÖLDER⁶⁾ untersucht.

III. Das Ziel ist es nun, die Abbildung \mathfrak{A} für $\mu = 0$ auf die Normalform (6) zu bringen und das Polynom χ zu berechnen⁷⁾. Durch (3), (3') wurden die Variablen $x, y; X, Y$ erklärt; für $\mu = 0$ hat man wegen $\xi_1 = \varrho, \eta_1 = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho (1 + x), & x_2 &= 0 \\ y_1 &= (\omega + 1) \varrho y, & H &= h_0 = -\frac{1}{2\varrho} - (\omega + 1) \varrho^2 \end{aligned} \quad \text{für } t = 0$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho (1 + X), & x_2 &= 0 \\ y_1 &= (\omega + 1) \varrho Y, & H &= h_0 \end{aligned} \quad \text{für } t = T.$$

Für kleine Werte von x, y lassen sich die x, y umkehrbar eindeutig auf die u, v transformieren, denn nach (9) wird für $t = 0$ ($x_2 = 0$):

$$(13) \quad \begin{cases} u = 1 - x_1 y_2 = 1 - \frac{D_1^2}{1+x} \\ v = -D y_1 = D_1 y \\ x = -1 + \frac{D_1^2}{1-u} \\ y = D_1^{-1} v. \end{cases} \quad \text{mit } D_1 = -(\omega + 1) \varrho D$$

Hierbei ist für die Kreislösung $D_1 = 1 \neq 0$. Wir schreiben diese Abbildung

⁶⁾ E. HÖLDER, Die Verzweigungsgleichungen für die kritischen Kreise des restringierten Dreikörperproblems. Ber. über die Verh. der sächs. Akad. der Wiss., math. phys. Kl. 83, 179–184 (1931).

⁷⁾ Zusatz bei der Korrektur: Ein anderer, kürzerer Weg zur Berechnung von χ findet sich in meiner demnächst in den Nachr. der Ak. der Wiss. Göttingen 1953 erscheinenden Arbeit „Über periodische Lösungen kanonischer Differentialgleichungssysteme“. Die dort benutzte Methode verwendet nicht Koeffizientenvergleich und liefert mehr als das Polynom χ .

symbolisch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathfrak{C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wenn U, V die in (9) erklärten Größen für $t = T$ bedeuten, so gilt entsprechend

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mathfrak{C} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix};$$

dabei wird benutzt, daß die Größe D_1 als Integral nicht von T abhängt.

Durch (13) wird die Abbildung \mathfrak{A} auf $\mathfrak{C} = \mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C}^{-1}$ transformiert. Nach (10) hat \mathfrak{C} aber die einfache Form

$$\begin{aligned} U &= u \cos T + v \sin T \\ V &= -u \sin T + v \cos T, \end{aligned}$$

wobei T noch von u, v abhängt. Die Berechnung von T erfordert die Lösung der Differentialgleichung in (10). Es ist das Ziel, eine inhaltstreuere Transformation \mathfrak{T} zu finden, daß $\mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{T} = \mathfrak{B}$ die Normalform (6) erhält. Das bedeutet für \mathfrak{C} :

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{T} = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{C} \mathfrak{R} \text{ mit } \mathfrak{R} = \mathfrak{C} \mathfrak{T}.$$

Da \mathfrak{T} inhaltstreu ist, besitzen \mathfrak{R}^{-1} und \mathfrak{C}^{-1} dieselbe Funktionaldeterminante:

$$a_u b_v - a_v b_u = x_u y_v - x_v y_u = \vartheta(u, v),$$

die sich aus (13) berechnen läßt. Für das folgende ist die Entwicklung von ϑ bis zu den Gliedern zweiten Grades einschließlich erforderlich. Dazu entwickeln wir zunächst D_1 nach u, v . Aus (11) folgt

$$u^2 + v^2 = 1 + 2 D_1^2 \varrho (h_0 + (\omega + 1) \varrho^2 D_1).$$

Demnach ist D_1 eine Funktion von $u^2 + v^2$, und durch Koeffizientenvergleich findet man

$$D_1 = 1 - \frac{\omega + 1}{2\omega} (u^2 + v^2) + \dots,$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder mindestens von viertem Grade sind. Setzt man diese Potenzreihe für D_1 in (13) ein, so berechnet man

$$(14) \quad \vartheta(u, v) = 1 - \frac{2}{\omega} u + \left[\frac{\omega - 2}{2\omega} (u^2 + v^2) - \frac{3}{2\omega} (u^2 - v^2) \right] + \dots$$

Aus der bisherigen Kenntnis von \mathfrak{B} und \mathfrak{C} läßt sich \mathfrak{R} genügend genau angeben. Zunächst folgt für die linearen Glieder in (13)

$$\begin{aligned} x &= u + \dots \\ y &= v + \dots \end{aligned}$$

Daher wird \mathfrak{A} in erster Näherung eine Drehung wie \mathfrak{C} , und man kann in \mathfrak{T} für die linearen Glieder

$$\begin{aligned} x &= a + \dots \\ y &= b + \dots \end{aligned}$$

annehmen. Dann hat man für \mathfrak{R}^{-1} : $a = u + \dots$, $b = v + \dots$. Ferner ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{C} \mathfrak{R}$. Aus der Tatsache, daß \mathfrak{C} eine Drehung um den (von u, v ab-

hängigen) Winkel T ist und \mathfrak{B} die Form (6) hat, schließt man, etwa durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung $\mathfrak{B} \mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{E}$, daß unter der Voraussetzung $\omega \neq \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, 0$ die Transformation \mathfrak{R}^{-1} notwendig die Form

$$\begin{aligned} a &= (1 + \kappa(u^2 + v^2)) [u \cos \varphi + v \sin \varphi] + \dots \\ b &= (1 + \kappa(u^2 + v^2)) [-u \sin \varphi + v \cos \varphi] + \dots \end{aligned}$$

hat, wobei die nicht hingeschriebenen Glieder mindestens von viertem Grade in u, v sind und φ ein Polynom zweiten Grades in u, v ohne konstantes Glied ist.

Setzt man $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, wobei φ_1 ein lineares Polynom und φ_2 ein homogenes Polynom zweiten Grades in u, v ist, so findet man

$$\begin{aligned} \vartheta(u, v) &= a_u b_v - a_v b_u = 1 + (v \varphi_{1u} - u \varphi_{1v}) + \\ &\quad + [v \varphi_{2u} - u \varphi_{2v} + 4 \kappa(u^2 + v^2)] + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit (14) liefert

$$\varphi_1 = \frac{2}{\omega} v, \quad \varphi_2 = \frac{3}{2\omega} u v + \sigma(u^2 + v^2), \quad \kappa = \frac{\omega - 2}{8\omega}.$$

Dabei ist der Faktor σ beliebig. Damit ist \mathfrak{R}^{-1} genügend genau bestimmt; für die Reziproke \mathfrak{R} erhält man:

$$(15) \quad \begin{cases} u = (1 - \kappa(a^2 + b^2)) [a \cos \tilde{\varphi} - b \sin \tilde{\varphi}] + \dots \\ v = (1 - \kappa(a^2 + b^2)) [a \sin \tilde{\varphi} + b \cos \tilde{\varphi}] + \dots \\ \tilde{\varphi}(a, b) = \frac{2}{\omega} b + \frac{3\omega + 8}{2\omega^2} a b + \sigma(a^2 + b^2), \quad \kappa = \frac{\omega - 2}{8\omega}. \end{cases}$$

Die in den Transformationsgleichungen nicht hingeschriebenen Glieder sind von mindestens viertem Grade in a, b .

Bildet man nun $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{E} \mathfrak{R}$, so folgt aus der einfachen Form von \mathfrak{E} :

$$\begin{aligned} U &= u \cos T + v \sin T \\ V &= -u \sin T + v \cos T \end{aligned}$$

für die Abbildung \mathfrak{B} :

$$(16) \quad \begin{aligned} A &= a \cos \chi(a, b) + b \sin \chi(a, b) + \dots \\ B &= -a \sin \chi(a, b) + b \cos \chi(a, b) + \dots \\ \chi(a, b) &= T(u(a, b), v(a, b)) + \tilde{\varphi}(A, B) - \tilde{\varphi}(a, b) + \mathfrak{P}_3(a, b). \end{aligned}$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder in (16) sind von mindestens viertem Grade, und \mathfrak{P}_3 bedeutet eine Potenzreihe in a, b , die nur Glieder dritten und höheren Grades enthält. Benutzt man, daß nach (6) der Ausdruck $\chi = c_0 + c_1(a^2 + b^2)$ keine linearen Glieder enthält, so folgt

$$\begin{aligned} A &= \alpha + 0 + \dots & \text{mit} & \quad \alpha = a \cos c_0 + b \sin c_0 \\ B &= \beta + 0 + \dots & & \quad \beta = -a \sin c_0 + b \cos c_0, \end{aligned}$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder von mindestens drittem Grade sind. Setzt man diese Entwicklung in den gewonnenen Ausdruck von $\chi(a, b)$ ein und

^{*)} Man benutzt dabei mit Vorteil komplexe Variable $u + iv, u - iv$ und statt $\cos \varphi, \sin \varphi$ die Exponentialausdrücke $e^{\pm i\varphi}$.

benutzt $\tilde{\varphi}(a, b)$ aus (15), so findet man

$$(17) \quad \begin{cases} \chi(a, b) = T + \frac{2}{\omega}(\beta - b) + \frac{3\omega + 8}{2\omega^2}(\alpha\beta - ab) + \Omega_3(a, b) \\ \alpha = a \cos c_0 + b \sin c_0 \\ \beta = -a \sin c_0 + b \cos c_0; \end{cases}$$

dabei bedeutet $\Omega_3(a, b)$ eine Potenzreihe, deren Glieder von mindestens drittem Grade sind. Damit ist die Frage nach der Entwicklung von χ bis zu Gliedern zweiter Ordnung auf die von T zurückgeführt. Gl. (17) zeigt, daß die Entwicklung von χ von dem willkürlichen Faktor σ unabhängig wird.

Es bleibt schließlich noch die Entwicklung von T nach a, b bis zu den Gliedern zweiten Grades einschließlich zu berechnen. Dazu wird die Differentialgleichung aus (10) verwendet. Indem man t als Funktion von Φ auf faßt, erhält man

$$(18) \quad \frac{dt}{d\Phi} = \{-1 + (\omega + 1) D_1^{-3} (1 - u \cos(\Phi + t) - v \sin(\Phi + t))^2\}^{-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird nach a, b entwickelt. Dann werden rekursiv die ersten Entwicklungskoeffizienten von $t = t(\Phi)$ nach a, b bei der Anfangsbedingung $t(0) = 0$ bestimmt. Dann ergibt sich T aus $T = t(2\pi)$.

Bedeutet in dem Ansatz $t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots$ die t_k ($k = 0, 1, \dots$) homogene Polynome vom Grade k in den a, b , die noch von Φ abhängen, so wird nach (15)

$$\begin{aligned} u \cos(t + \Phi) + v \sin(t + \Phi) &= a \cos\left(t + \Phi - \frac{2b}{\omega}\right) + b \sin\left(t + \Phi - \frac{2b}{\omega}\right) + \dots \\ &= \alpha \cos\left(t + \Phi - c_0 - \frac{2b}{\omega}\right) + \beta \sin\left(t + \Phi - c_0 - \frac{2b}{\omega}\right) + \dots \\ &= \alpha c + \beta s + (-\alpha s + \beta c)\left(t_1 - \frac{2b}{\omega}\right) + \dots; \end{aligned}$$

dabei sind α, β die in (17) erklärten Größen und

$$c = \cos(t_0 + \Phi - c_0), \quad s = \sin(t_0 + \Phi - c_0).$$

Setzt man diese und die schon früher benutzte Entwicklung von D_1 in die rechte Seite von (18) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\Phi} &= \frac{1}{\omega} + \frac{2(\omega + 1)}{\omega^2}(\alpha c + \beta s) + \\ &+ \frac{\omega + 1}{\omega^2} \left[\frac{3\omega + 4}{\omega}(\alpha c + \beta s)^2 + 2(-\alpha s + \beta c)\left(t_1 - \frac{2b}{\omega}\right) - \frac{3(\omega + 1)}{2\omega}(a^2 + b^2) \right] + \dots \end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man durch Koeffizientenvergleich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2}{\omega}(b - \beta) + \frac{3\omega + 8}{2\omega^2}(ab - \alpha\beta) - \frac{3(\omega + 1)\pi}{\omega^2}(a^2 + b^2) + \dots$$

Einsetzen in (17) liefert

$$\chi(a, b) = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{3(\omega + 1)\pi}{\omega^2}(a^2 + b^2),$$

und das ist die Behauptung (7).

Man kann schließlich die Transformation \mathfrak{T} noch näher bestimmen. Benutzt man $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{R}$ und die Formeln (13), (15), so findet man, daß sich \mathfrak{T} in der Form

$$y = F_a(x, b)$$

$$a = F_b(x, b)$$

mit der erzeugenden Funktion

$$F(x, b) = x b + \frac{1}{3\omega} (3x^3 + (\omega + 3)b^3) b + \\ + \frac{1}{8\omega^3} x b \{ (\omega^3 + 6\omega + 16)x^3 + (3\omega^3 + 22\omega + 32)b^3 \} + \frac{\sigma}{4} (x^3 + b^3)^2 + \dots$$

schreiben läßt; dabei ist σ noch ein willkürlicher Faktor, und die nicht hingeschriebenen Glieder sind von mindestens fünftem Grade. Aus dieser Darstellung der Transformation \mathfrak{T} mit einer erzeugenden Funktion folgt, daß \mathfrak{T} inhaltstreu ist. Man erhält also das Resultat, daß durch jede solche inhaltstreue Transformation \mathfrak{T} mit einer erzeugenden Funktion F der angegebenen Art die Abbildung \mathfrak{A} auf die Normalform (6) gebracht wird.

(Eingegangen am 12. Januar 1953.)

Eigenschaften von ebenen Viergeweben allgemeiner Lage.

Von

RAFAEL ARTZY in Haifa (Israel).

Die Schließungssätze, die die 4-Gewebe kennzeichnen, sind nur in den beiden Fällen bestimmt worden, in denen entweder alle Träger der vier Gewebescharen (4-Gewebe „*erster Art*“) oder nur drei von ihnen (4-Gewebe „*zweiter Art*“) auf einer Linie liegen, d. h. im Falle der Abbildbarkeit auf ein Parallelengewebe der affinen Ebene oder auf ein Gewebe von 3 Parallelscharen und einem Geradenbüschel der affinen Ebene¹⁾. Diese beiden Gewebearten sind nicht nur projektiv, sondern auch topologisch voneinander verschieden, und ebenso sind sie verschieden von dem 4-Gewebe „*dritter Art*“, dessen Träger nicht zu dreien auf einer Linie liegen²⁾.

In dieser Arbeit soll das 4-Gewebe dritter Art behandelt werden. Es werden Schließungssätze angegeben, die notwendig zu seinem Aufbau sind und hinreichen, es zu einer affinen Ebene zu erweitern. Stetigkeitsannahmen werden nicht gemacht.

Die Anregung zu dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. K. REIDEMEISTER.

1. Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Es seien 4 Punkte A, B, C, D vorgegeben, die wir *Träger* nennen. Jede Gewebelinie inzidiert mit wenigstens einem Träger und mit mindestens noch einem anderen Punkt. Eine Linie, die mit A inzidiert, heiße eine *A-Linie*; die mit B inzidiert, eine *B-Linie* usw. Zwei Linien inzidieren beide mit mindestens einem gemeinsamen Punkt; inzidieren sie mit zwei gemeinsamen Punkten, so sind die Linien identisch. Jeder Punkt inzidiert mit genau einer *A-Linie*, genau einer *B-Linie*, genau einer *C-Linie* und genau einer *D-Linie*. Keine Linie inzidiert mit mehr als zwei Trägern.

Wir bezeichnen mit PQ die Linie durch die Punkte P und Q . Mit (a, b) bezeichnen wir den Schnittpunkt der Linien a und b .

Aus Gründen der Bequemlichkeit wollen wir zwei Linien g und h dann und nur dann *parallel* nennen, wenn (g, h) auf AB liegt. Diese „Parallelität“ ist nach den obigen Voraussetzungen transitiv, symmetrisch und reflexiv. Ebenso ergibt sich, daß zu jeder Linie je eine und nur eine parallele Linie durch C und D existiert, die allerdings mit der Linie selbst identisch sein kann.

2. Multiplikation im *A-B-C*-Gewebe.

Das Teilgewebe, das nur aus *A*-, *B*- und *C*-Linien besteht, nennen wir *A-B-C*-Gewebe. Es ist bekannt (REIDEMEISTER, loc. cit., Kap. 4), daß in

¹⁾ K. REIDEMEISTER: Grundlagen der Geometrie, Berlin 1930.

²⁾ BLASCHKE-BOL: Geometrie der Gewebe . . ., Berlin 1938.

einem solchen 3-Gewebe die Schließung der „Reidemeister-Figur“ R_{ABC} notwendig und hinreichend für die Existenz einer Gruppe von Vektoren auf A -Linien und einer isomorphen Gruppe von Vektoren auf B -Linien ist. Diese Gruppen sind dann und nur dann kommutativ, wenn die „Thomsen-Figur“ T_{ABC} sich schließt. (Wir benennen hier die beiden Schließungsfiguren wie BLASCHKE-BOL, loc. cit.; bei REIDEMEISTER, loc. cit., heißen sie $\Sigma 1$ und $\Sigma 2$.)

Wir wollen die Gruppen multiplikativ schreiben. Das Einselement der A -Vektorgruppe sei der Vektor CX_1 , wobei $X_1 = (AC, BD)$ (Fig. 1). Die Isomorphie zwischen der A - und der B -Vektorgruppe sei durch die folgende Operation vermittelt: Sei CX_a ein A -Vektor mit der Maßzahl a . Dann sei $P = (BX_a, CD)$ und $Y_a = (AP, BC)$. Der CX_a entsprechende Vektor der B -Gruppe sei dann CY_a . Es sei auch $X_0 = Y_0 = C$.

Die Multiplikation zweier Vektoren mit den Maßzahlen a, b wird folgendermaßen durchgeführt:

$$(BX_a, AD) = Q; (CQ, AY_b) = M; (BM, AC) = X_{a+b}.$$

3. Addition im 4-Gewebe.

Die Addition zweier Vektoren $CX_a + CX_b$ für $a \neq 1$ sei folgendermaßen erklärt: Die zu DX_a parallele C -Linie schneide BX_b in N . Sei $(AN, DX_b) = L$ und schließlich $(BL, AC) = X_{a+b}$.

Die Kommutativität der Addition entspricht dem folgenden Schließungssatz (Fig. 2):

Θ : Liegen $C, J, K; M, N; P, Q$ auf drei verschiedenen A -Linien, J, M und K, P auf zwei verschiedenen B -Linien, ist ferner CM parallel zu der D -Linie KN und ist CP parallel zur D -Linie JQ , so liegen N und Q auf einer B -Linie.

In der Tat, wenn wir $J = X_a$ und $K = X_b$ setzen, erhalten wir $X_{a+b} = (BQ, AC)$ und $X_{b+a} = (BN, AC)$. Der Forderung $X_{a+b} = X_{b+a}$ entspricht also $BN = BQ$, d. h. die Schließung der Θ -Figur.

Es ist bemerkenswert, daß Θ in die Thomson-Figur übergehen würde, wenn D mit AB inzidierte, wenn also statt unseres 4-Gewebes ein 4-Gewebe erster oder zweiter Art betrachtet würde. In gewissem Sinne kann also Θ als Verallgemeinerung der Thomsen-Figur gelten, der ja im Parallelengewebe das kommutative Gesetz der Addition entspricht.

Die Schließungsfigur Θ kann auch an anderen Stellen „geschlossen“ werden. Wir wollen das für das Beispiel der Schließung in KP beweisen:

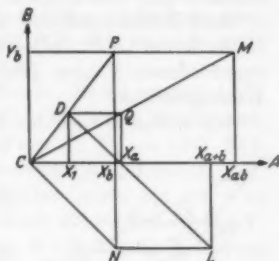


Fig. 1.

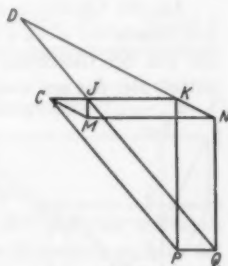


Fig. 2. Θ .

Es sei $AC = AJ = AK$, $AM = AN$, $AP = AQ$, $BJ = BM$, $BQ = BN$, CM parallel zur D -Linie KN , und CP parallel zur D -Linie JQ . Dann bestimmen K, P eine B -Linie.

Zum Beweise nehmen wir an, daß $BK \neq BP$ und $(BK, CP) = P' \neq P$. Es sei ferner $(AP', DJ) = Q' \neq Q$. Nun kann aber BN mit DJ keine zwei verschiedenen Punkte gemeinsam haben. Daher ist $BQ \neq BN$, was ein Widerspruch ist.

Wir wollen Θ auch den Schließungssatz nennen, der aus Θ durch formelle Vertauschung der Buchstaben C und D entsteht.

Wir wenden uns jetzt einem anderen Schließungssatz zu (Fig. 3).

Φ : Liegen $P, Q; V, W; U, S; M, N$ auf 4 verschiedenen A -Linien; $P, U; V, S; Q, M$ auf 3 verschiedenen B -Linien; $U, M; P, V$ auf 2 verschiedenen C -Linien; $S, N; Q, W$ auf 2 verschiedenen D -Linien; sei ferner UM parallel zu SN und PV parallel zu QW . Dann liegen N und W auf einer B -Linie.

Dieser Satz entspricht der Vektorgleichung

$$c + (a + b) = a + (c + b).$$

Denn, wenn wir $X_a = (QW, AC)$; $X_b = (PU, AC)$; $X_c = (NS, AC)$ setzen, erhalten wir $X_{a+b} = (BQ, AC)$ und $X_{c+b} = (BS, AC)$ und daraus $X_{c+(a+b)} = (BN, AC)$ und $X_{a+(c+b)} = (BW, AC)$. Der Gleichung entspricht also die Schließung $BW = BN$, wie behauptet.

Aus der Gleichung $c + (a + b) = a + (c + b)$ folgt für $b = 0$ das kommutative Gesetz $c + a = a + c$. Mit Hilfe des kommutativen Gesetzes folgt wiederum aus der Gleichung das assoziative Gesetz. Der Schließungssatz Φ vermittelt also das assoziative Gesetz der Addition, und es muß aus ihm auch die dem kommutativen Gesetz entsprechende Figur Θ folgen. In der Tat ist Θ ein Spezialfall von Φ , nämlich der Fall, in dem P und U mit C zusammenfallen.

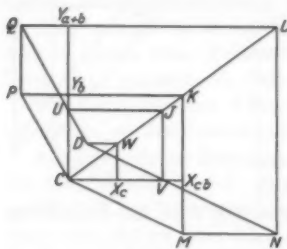


Fig. 4. Γ .

4. Distributives Gesetz.

Wir betrachten den Schließungssatz (Fig. 4):

Γ : Liegen $Q, L; P, K; C, V; U, J; M, N$ auf 5 verschiedenen A -Linien, $P, Q; C, U; V, J; M, K$ auf 4 verschiedenen B -Linien; J, K und L auf einer C -Linie; ist ferner CP parallel zur D -Linie QU und ist CN parallel

zur D -Linie VN , so liegen L und N auf einer B -Linie.

Wir wollen den Namen Γ auch anwenden, wenn der Satz gemeint ist, der aus Γ durch formelle Vertauschung der Buchstaben C und D entsteht.

Zunächst sei bemerkt, daß ein Spezialfall von Γ die oben erwähnte Isomorphie der A - und der B -Vektoren auch bezüglich der Addition vermittelt.

Es sei nämlich $CJ = CD$; dann erhält man, von X_a und X_b ausgehend, die Punkte X_{a+b} , Y_a , Y_b und Y_{a+b} auf die oben erwähnte Weise. Man kann die Vektoren CY_a und CY_b ebenso addieren, wie es für die A -Vektoren erklärt wurde. Man erhält so den Punkt Q und $L' = (CJ, BX_{a+b})$. Es kann aber $AQ = AY_{a+b}$ dann und nur dann stattfinden, wenn $BN = BL'$ ist, d. h. wenn der Spezialfall von Γ , in dem $CJ = CD$ ist, erfüllt ist.

Der Satz Γ vermittelt das linke distributive Gesetz. Es sei nämlich $(AD, CJ) = W$ und $(BW, AC) = X_c$; $U = Y_a$; $(AK, BC) = Y_b$. Dann erhält man, wie soeben bewiesen, auf Grund des Spezialfalles von Γ : $Y_{a+b} = (AQ, BC)$. Ferner ist $(BK, AC) = X_{cb}$ und $V = X_{ca}$, und daraus folgt $(BN, AC) = X_{ca+cb}$. Andererseits ist $(BL, AC) = X_{c(a+b)}$. Das distributive Gesetz $c(a+b) = ca + cb$ wird also durch $BL = BN$ vermittelt, d. h. durch die Schließung von Γ .

Es sei bemerkt, daß in demselben Sinne, in dem Θ eine Verallgemeinerung der Thomsenfigur darstellt, der Satz Γ eine Verallgemeinerung des Satzes $\Sigma 3$ ist (REIDEMEISTER, loc. cit., S. 93). Auch dieser Satz vermittelt einen Isomorphismus zwischen A - und B -Vektoren, und auch er entspricht dem distributiven Gesetz. $\Sigma 3$ würde aus Γ entstehen, wenn DN und DQ parallel wären, d. h. wenn D auf AB läge, was aber unser 4-Gewebe in ein 4-Gewebe zweiter Art überführen würde.

Ein Spezialfall von Γ , den wir später benutzen wollen, sei der, in dem DU parallel zu CJ ist. Wir wollen diesen Spezialfall Γ' nennen.

Es ist nicht schwer, einen Schließungssatz anzugeben, der dem rechten distributiven Gesetz entspricht. Es ist mir aber nicht gelungen, diesen Schließungssatz in unkomplizierter Form darzustellen, und wir wollen uns auf die folgende Zusammenfassung beschränken:

a) Ein Viergewebe dritter Art, in dem die Schließungssätze R_{ABC} , Φ und Γ gelten, entspricht einem einseitig distributiven Zahlensystem mit kommutativer Addition.

b) Ein Viergewebe dritter Art, in dem die Schließungssätze T_{ABC} , Φ , Γ gelten, entspricht einem kommutativen Zahlkörper.

5. Die Gleichungen der Gewebelinien.

Ein Punkt P , für den $(BP, AC) = X_a$ und $(AP, BC) = Y_b$ ist, soll auch in der Form $P = [a, b]$ geschrieben werden, und wir wollen sagen, er habe die Koordinaten $x = a$, $y = b$. Wir wollen, den Definitionen entsprechend, festsetzen: $C = [0, 0]$; $D = [1, 1]$; $X_a = [a, 0]$; $Y_a = [0, a]$. Die Punkte A , B und alle anderen Punkte auf AB seien uneigentliche Punkte.

Für die Punkte auf einer A -Linie gilt dann $y = \text{const.}$ Für die Punkte auf einer B -Linie gilt $x = \text{const.}$, und für die Punkte auf einer C -Linie gilt $x = \text{const.}$

Diese Aussagen folgen aus der Definition der Koordinaten und der Definition der Vektormultiplikation. Wir behaupten nun, daß für die Punkte auf einer D -Linie die Gleichung

$$x - 1 = a(y - 1)$$

gilt, wobei a konstant ist.

Wir wollen jetzt klären, wie sich Punkte auf Gewebelinien nach Dilatationen verhalten.

Es läßt sich leicht bestätigen, daß die Punkte einer A -Linie wieder in Punkte auf einer A -Linie übergehen, oder, wie wir sagen wollen, daß A -Linien in A -Linien übergehen. Ebenso gehen B -Linien in B -Linien über. Diese Aussagen folgen ohne weiteres aus der Definition der Dilatationen.

Die Punkte $[x, y]$ einer C -Linie mögen die Gleichung $x = ay$ erfüllen, $a \neq 0$. Eine A -Dilatation um α ergebe $\xi = \alpha x$, und für die Punkte $[\xi, y]$, in die die Punkte der C -Linie übergehen, gilt $\alpha^{-1} \xi = ay$; $\xi = \alpha (ay) = (\alpha a) y$. Die Punkte liegen also auf einer C -Linie. Dieses Ergebnis läßt sich auch leicht konstruktiv verfolgen, unter Benutzung von R_{ABC} , um die Assoziativität von αay sicherzustellen.

Der Punkt $[x, y]$ auf der D -Linie $x - 1 = a(y - 1)$ gehe bei einer A -Dilatation um α und einer B -Dilatation um β in $[\xi, \eta]$ über, wobei $\xi = \alpha x$; $\eta = \beta y$. Die neuen Punkte erfüllen also die Gleichung $\alpha^{-1} \xi - 1 = a(\beta^{-1} \eta - 1)$. Wir wollen die Menge dieser Punkte eine *Linie* nennen. Wir gelangen also zu einer Erweiterung des Gewebes durch Zufügung von neuen Linien. Im folgenden sollen die Eigenschaften der Linien untersucht werden, wobei unter „Linien“ sowohl die Gewebelinien als auch die neuen Linien verstanden werden sollen. Dagegen soll die „uneigentliche Linie“ AB im folgenden nicht als Linie gelten. Parallele Linien haben also im folgenden keinen Punkt gemeinsam.

a) Auf jeder Linie gibt es mindestens zwei Punkte.

Dieser Satz folgt für andere als Gewebelinien daraus, daß jede D -Linie mindestens zwei Punkte enthält.

b) Zwei nicht parallele Linien haben entweder einen Punkt oder alle ihre Punkte gemeinsam.

Beweis: Für Gewebelinien war diese Eigenschaft vorausgesetzt worden. Den Linien, die keine Gewebelinien sind, entsprechen Gleichungen der Form $\alpha^{-1}x - 1 = a(\beta^{-1}y - 1)$. Wenn die Koeffizienten einem kommutativen Zahlkörper entnommen sind, haben zwei Gleichungen dieser Art oder eine Gleichung dieser Art und die Gleichung einer Gewebelinie entweder keine Lösung oder eine einzige Lösung $[x, y]$, oder sie sind bis auf einen konstanten Faktor identisch.

c) Durch zwei verschiedene Punkte geht immer genau eine Linie.

Beweis: Diese Tatsache läßt sich durch Berechnung beweisen, wenn die Koeffizienten der Liniengleichungen einem Zahlkörper entnommen sind. Um die Linie, die die beiden gegebenen Punkte $[x_1, y_1]$ und $[x_2, y_2]$ enthält, zu konstruieren (es sei $x_1 y_1 \neq 0$), führen wir zunächst eine A -Dilatation um $1/x_1$ und eine B -Dilatation um $1/y_1$ aus. Dadurch geht $[x_1, y_1]$ in D und $[x_2, y_2]$ in einen Punkt Q über. Die D -Linie DQ geht durch A -Dilatation um x_1 und B -Dilatation um y_1 in eine Linie über, die die beiden gegebenen Punkte enthält. Wenn $x_1 y_1 = 0$, aber $x_2 y_2 \neq 0$ ist, können die entsprechenden Dilatationen um $1/x_2$ und $1/y_2$ ausgeführt werden. Wenn $x_1 = y_1 = 0$ oder $x_2 = y_2 = 0$ ist, liegen die Punkte auf Gewebelinien. Es bleibt nur noch der Fall, daß einer der

Punkte auf CA und der andere auf CB liegt und beide von C verschieden sind. Seien diese Punkte $[x_1, 0]$ und $[0, y_2]$, wobei $x_1 y_2 \neq 0$. Die A -Dilatation um $2/x_1$ und die B -Dilatation um $2/y_2$ führen die Punkte in $[2, 0]$ und $[0, 2]$ über, die beide auf der D -Linie $x - 1 = -1(y - 1)$ liegen. Durch die inversen Dilatationen erhält man aus dieser D -Linie eine Linie, die die gegebenen Punkte enthält.

Die Forderung, daß die Punkte, die durch Dilatation der Punkte einer D -Linie hervorgehen, auf einer Linie liegen, läßt sich auch als Schließungssatz ausdrücken:

Spezieller DESARGUESscher Satz (Fig. 6): Es liege E auf CD und G auf BC (oder AC); FQ und PE seien B - (A -)Linien, PQ , DH und EF seien A - (B -)Linien, HF sei eine C -Linie. Dann liegen Q , H und G auf einer Linie.

Wir nennen die Gesamtheit der Punkte und Linien eine *verallgemeinerte affine Ebene*. Wir haben sie erhalten, indem wir durch Dilatationen den Träger D in alle anderen Punkte überführten und die Gesamtheit der entstandenen Viergewebe betrachteten.

(Eingegangen am 28. Januar 1953.)

Über das Partitionenproblem eines reell-quadratischen Zahlkörpers*).

Von

GÜNTER MEINARDUS in Göttingen.

Das Partitionenproblem des rationalen Zahlkörpers wurde von HARDY [1], RAMANUJAN [1] und RADEMACHER [2] behandelt. Ihr Ergebnis war eine exakte Darstellung der Zerlegungsanzahl $p(n)$ durch eine konvergente Reihe. Unter dem Partitionenproblem des reell-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ der Diskriminante d verstehen wir die Aufgabe, die Anzahl $P(\mu)$ sämtlicher additiven Zerlegungen der total-positiven ganzen Zahl μ in total-positive ganze Zahlen μ_i dieses Körpers zu bestimmen

$$(1) \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r.$$

Die Anzahl r der Summanden ist dabei beliebig, und es werden zwei Zerlegungen, die durch eine Permutation der μ_i auseinander hervorgehen, nur einmal gezählt.

Während die Methode zur Berechnung der Funktion $p(n)$ auf der Transformationstheorie der DEDEKINDSchen η -Funktion beruht, besitzt die erzeugende Funktion von $P(\mu)$ keine einfachen Transformationseigenschaften gegenüber der Gruppe der HILBERTSchen Modulsstitutionen, so daß man zu Aussagen über $P(\mu)$ nicht wie im rationalen Fall gelangen kann. Auf diese Schwierigkeit wies bereits RADEMACHER [3] hin.

Ist η_1 eine total-positive Einheit, so gilt

$$(2) \quad P(\eta_1 \mu) = P(\mu),$$

woraus folgt, daß die Funktion $P(\mu)$ nur von dem Hauptideal (μ) abhängt. Das Hauptideal wiederum ist durch die Werte der beiden Funktionen

$$N(\mu) = \mu \cdot \mu' = N; \quad \lambda(\mu) = e^{\frac{\pi i}{\log \eta} \log \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)} = \lambda$$

eindeutig bestimmt. Dabei ist μ' die zu μ konjugierte Zahl und η die kleinste total-positive Einheit > 1 . Es sind für die Logarithmen die Hauptwerte zu nehmen. Demnach ist $P(\mu)$ nur von N und λ abhängig.

Eine obere Abschätzung von $P(\mu)$ ist zuerst von RADEMACHER [3] gegeben worden. Für $N \rightarrow \infty$ gilt

$$(3) \quad P(\mu) = O\left(e^{N^{\frac{5}{14} + \delta}}\right)$$

mit beliebigem positiven δ . In dieser Arbeit soll für $P(\mu)$ die asymptotische

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

Gleichung bewiesen werden

$$(4) \quad P(\mu) = e^{3 \cdot \sqrt{\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}} N + \alpha_1 \log^2 N + \alpha_2 \log N + \mathcal{O}(\lambda, N)} \cdot \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{21}}\right)\right)$$

für $N \rightarrow \infty$. Darin sind α_1 und α_2 reelle Konstanten, $\zeta(s)$ ist die RIEMANNsche Zetafunktion. Der Ausdruck $\mathcal{O}(\lambda, N)$ ist als Funktion von μ beschränkt und wird in Gestalt einer unendlichen Reihe gegeben werden. Während andere Anzahlfunktionen der additiven Zahlentheorie, welche die Eigenschaft (2) besitzen, im Hauptglied ihrer asymptotischen Entwicklung für $N \rightarrow \infty$ noch keine Abhängigkeit vom dem HECKESchen Größencharakter λ zeigen, scheint dies hier der Fall zu sein. Die Analogie des Ergebnisses zur entsprechenden Aussage im rationalen Fall

$$p(n) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} e^{2 \cdot \sqrt{\frac{\zeta(2)}{3}} n} \cdot (1 + o(1))$$

für $n \rightarrow \infty$ ist ebenfalls von anderer Art als bei den bisher untersuchten Funktionen.

Der Beweis von (4) wird ohne Verwendung der Methode der Farey-Zerschneidung geführt. Bei der Approximation der erzeugenden Funktion stütze ich mich auf die Untersuchungen von HECKE [4] über das asymptotische Verhalten der „geometrischen Reihe“ des Körpers $R(\sqrt{d})$. Hierbei treten unendlich viele Zetafunktionen mit Größencharakteren auf. Für einen Teil des Integrationsgebietes schätzen wir die erzeugende Funktion in elementarer Weise ab. Zur asymptotischen Auswertung eines Integrals wird im letzten Kapitel die Sattelpunktmethode in zwei Variablen herangezogen. Ein scharfes additives Fehlerglied ist bei diesem Verfahren nicht zu erwarten.

Im Kapitel 3 gewinnen wir als Nebenresultat auf elementarem Wege eine obere Abschätzung für $P(\mu)$, die schon genauer ist als die Aussage (3). Es gilt für alle μ

$$(5) \quad P(\mu) < e^{3 \cdot \sqrt{\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}} N + c_1 N^{\frac{1}{3}}}$$

Die Konstante c_1 ist positiv und nur vom Körper abhängig, wie es auch im folgenden für alle Konstanten c_2, c_3, \dots vorausgesetzt wird. Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$(6) \quad b = \frac{\pi}{\log \eta}; \quad M = \sqrt[3]{\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}} N,$$

wobei $M > 1$ angenommen sei. Da wir nun zwei Konstanten c_2, c_3 geeignet wählen können, so daß es zu jeder total-positiven ganzen Zahl μ_1 stets eine assoziierte total-positive Zahl μ gibt, die den Ungleichungen

$$(7) \quad c_2 N^{\frac{1}{3}} < \mu < c_3 N^{\frac{1}{3}}; \quad c_2 N^{\frac{1}{3}} < \mu' < c_3 N^{\frac{1}{3}}$$

genügt, dürfen wir uns bei sämtlichen Rechnungen auf solche „reduzierten“ Zahlen μ beschränken, denn nach Gl. (2) ist $P(\mu_1) = P(\mu)$.

1. Die geometrische Reihe.

Es seien τ und τ' komplexe Variable mit positiven Realteilen. Als „geometrische Reihe des Körpers $R(\sqrt{d})$ “ bezeichnen wir nach HECKE die Reihe

$$(8) \quad g(\tau, \tau') = \sum_{\nu > 0} e^{-\nu\tau - \nu'\tau'}.$$

Das Zeichen $\nu > 0$ soll bedeuten, daß ν alle total-positiven ganzen Zahlen des Körpers durchläuft, zunächst in einer beliebigen, aber festen Reihenfolge. Die geometrische Reihe (8) ist absolut und gleichmäßig konvergent, falls $\Re(\tau) \geq \tau_0 > 0$ und $\Re(\tau') \geq \tau'_0 > 0$ ist. Mit $\tau_1 = \min(\tau_0, \tau'_0)$ gilt nämlich

$$|e^{-\nu\tau - \nu'\tau'}| \leq e^{-\tau_1(\nu + \nu')} = e^{-n_1\tau_1},$$

woraus sich für die Reihe (8) die Majorante

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} c_4 \cdot n_1 \cdot e^{-n_1\tau_1}$$

ergibt, denn die Anzahl der total-positiven ganzen Zahlen ν mit $\nu + \nu' = n_1$ ist höchstens $c_4 \cdot n_1$.

Für die Reihe (8) geben wir eine Umformung an. Hierzu wählen wir die spezielle Basis 1, $\omega = 1/2(d + \sqrt{d})$ der ganzen Zahlen des Körpers. Es ist dann $\nu = n + m\omega$ mit ganzrationalen n und m zu setzen, und die Bedingung $\nu > 0$ ist äquivalent mit

$$n \geq \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0, \\ -[m\omega'] & \text{für } m > 0, \\ [m|\omega] + 1 & \text{für } m < 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\omega' = 1/2(d - \sqrt{d})$. Führen wir die folgenden Ausdrücke ein

$$(9) \quad \begin{cases} A_1(\tau, \tau') = \frac{1}{e^{\tau + \tau'} - 1}, \\ A_2(\tau, \tau') = \frac{1}{e^{\tau + \tau'} - 1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(\omega\tau + \omega'\tau') + ([m\omega'] + 1)(\tau + \tau')}, \\ A_3(\tau, \tau') = \frac{1}{e^{\tau + \tau'} - 1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{m(\omega\tau + \omega'\tau') - [m\omega](\tau + \tau')}, \end{cases}$$

so ergibt sich aus (8)

$$(10) \quad g(\tau, \tau') = A_1(\tau, \tau') + A_2(\tau, \tau') + A_3(\tau, \tau').$$

Für spätere Zwecke geben wir noch Abschätzungen der Ausdrücke (9) an. Es ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(\omega\tau + \omega'\tau') + ([m\omega'] + 1)(\tau + \tau')} = e^{\tau + \tau'} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\sqrt{d}\tau} + R_1$$

mit

$$\begin{aligned} R_1 &= e^{\tau + \tau'} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(\omega\tau + \omega'\tau')} \cdot \{e^{[m\omega'](\tau + \tau')} - e^{m\omega'(\tau + \tau')}\} \\ &= (\tau + \tau') e^{\tau + \tau'} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(\omega\tau + \omega'\tau')} \cdot \int_{m\omega'}^{[m\omega']} e^x(\tau + \tau') dx. \end{aligned}$$

Also wird

$$|R_1| \leq |(\tau + \tau') e^{\tau + \tau'}| \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\sqrt{d}y}; \quad y = \Re(\tau),$$

$$\leq \frac{|(\tau + \tau') e^{\tau + \tau'}|}{e^{y\sqrt{d}} - 1}.$$

Analog ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{m(\omega\tau + \omega'\tau') - [m\omega](\tau + \tau')} = e^{\tau + \tau'} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\sqrt{d}\tau'} + R_2$$

mit

$$R_2 = e^{\tau + \tau'} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{m(\omega\tau + \omega'\tau')} \cdot \{e^{-([m\omega] + 1)(\tau + \tau')} - e^{-m\omega(\tau + \tau')}\}$$

$$= (\tau + \tau') e^{\tau + \tau'} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{m(\omega\tau + \omega'\tau')} \cdot \int_{[m\omega] + 1}^{m\omega} e^{-x(\tau + \tau')} dx,$$

somit

$$|R_2| \leq |(\tau + \tau') e^{\tau + \tau'}| \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\sqrt{d}y'}; \quad y' = \Re(\tau'),$$

$$\leq \frac{|(\tau + \tau') \cdot e^{\tau + \tau'}|}{e^{y'\sqrt{d}} - 1}.$$

Es gelten also die Abschätzungen

$$(11) \quad \left| A_2(\tau, \tau') - \frac{e^{\tau + \tau'}}{(e^{\tau + \tau'} - 1) \cdot (e^{\sqrt{d}\tau} - 1)} \right| \leq \left(|\tau + \tau'| + \left| \frac{\tau + \tau'}{e^{\tau + \tau'} - 1} \right| \right) \frac{1}{y\sqrt{d}},$$

$$\left| A_3(\tau, \tau') - \frac{e^{\tau + \tau'}}{(e^{\tau + \tau'} - 1) \cdot (e^{\sqrt{d}\tau'} - 1)} \right| \leq \left(|\tau + \tau'| + \left| \frac{\tau + \tau'}{e^{\tau + \tau'} - 1} \right| \right) \frac{1}{y'\sqrt{d}}.$$

Da ferner für reelle τ und τ' , $\tau = y > 0$, $\tau' = y' > 0$, die Fehlerglieder R_1 und R_2 offenbar negativ sind, erhält man noch

$$(12) \quad \begin{cases} A_1(y, y') < \frac{1}{y + y'}, \\ A_2(y, y') < \left(1 + \frac{1}{y + y'} \right) \frac{1}{y\sqrt{d}}, \\ A_3(y, y') < \left(1 + \frac{1}{y + y'} \right) \frac{1}{y'\sqrt{d}}. \end{cases}$$

2. Die erzeugende Funktion.

Das Produkt

$$(13) \quad f(\tau, \tau') = \prod_{r > 0} (1 - e^{-r\tau - r'\tau'})^{-1}$$

konvergiert absolut für $\Re(\tau) > 0$, $\Re(\tau') > 0$, weil dies für die geometrische Reihe gilt. Es besteht ferner ein enger Zusammenhang von $\log f(\tau, \tau')$ und $g(\tau, \tau')$. Aus (13) folgt

$$\log f(\tau, \tau') = - \sum_{r > 0} \log (1 - e^{-r\tau - r'\tau'})$$

$$= \sum_{r > 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-rk\tau - r'k\tau'},$$

und somit

$$(14) \quad \log f(\tau, \tau') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} g(k\tau, k\tau'),$$

denn die Doppelreihe konvergiert absolut für $\Re(\tau) > 0, \Re(\tau') > 0$. Wir zeigen im folgenden Hilfssatz, daß $f(\tau, \tau')$ die erzeugende Funktion des Partitionenproblems ist.

Hilfssatz 1. Für $\Re(\tau) > 0, \Re(\tau') > 0$ gilt mit der in (13) definierten Funktion

$$(15) \quad f(\tau, \tau') = 1 + \sum_{\nu > 0} P(\nu) e^{-\nu\tau - \nu'\tau'}.$$

Beweis. Eine Partition von μ kann durch Zusammenfassung gleicher Summanden auf die Gestalt gebracht werden

$$(16) \quad \mu = n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 + \dots + n_k \mu_k + \dots,$$

n_l ganz-rational und $\geq 0, l = 1, 2, \dots, k, \dots$, wobei die μ_l die sämtlichen total-positiven ganzen Zahlen von $R(\sqrt{d})$ in irgendeiner festen Anordnung sind. Demnach wird $P(\mu)$ gleich der Anzahl der Lösungen der diophantischen Gleichung (16) in nicht-negativen ganz-rationalen Zahlen n_l . Es bedeute $\text{Sp}(\nu) = \nu + \nu'$ die Spur von ν . Betrachten wir das endliche Produkt

$$f_m(\tau, \tau') = \prod_{\substack{\nu > 0 \\ \text{Sp}(\nu) \leq m}} (1 - e^{-\nu\tau - \nu'\tau'})^{-1}$$

mit $m \geq 1$, so folgt durch Multiplikation der Reihen

$$(1 - e^{-\nu\tau - \nu'\tau'})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu n\tau - \nu' n\tau'}$$

die Beziehung

$$f_m(\tau, \tau') = 1 + \sum_{\nu > 0} P_m(\nu) e^{-\nu\tau - \nu'\tau'}.$$

Hier ist $P_m(\nu)$ die Anzahl der nicht-negativen ganz-rationalen Lösungen von

$$\nu = n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + \dots + n_r \nu_r,$$

wobei die $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ die sämtlichen total-positiven ganzen Zahlen mit $\text{Sp}(\nu) \leq m$ bedeuten. Offenbar ist $P_m(\nu) = P(\nu)$ für $\text{Sp}(\nu) \leq m$ und stets $P_m(\nu) \leq P(\nu)$, so daß gilt

$$f(\tau, \tau') = 1 + \sum_{\substack{\nu > 0 \\ \text{Sp}(\nu) \leq m}} P(\nu) e^{-\nu\tau - \nu'\tau'} + \sum_{\substack{\nu > 0 \\ \text{Sp}(\nu) > m}} P_m(\nu) e^{-\nu\tau - \nu'\tau'}.$$

Sind für den Augenblick τ und τ' reell und positiv, so gilt die Ungleichung

$$1 + \sum_{\substack{\nu > 0 \\ \text{Sp}(\nu) \leq m}} P(\nu) e^{-\nu\tau - \nu'\tau'} \leq f_m(\tau, \tau') \leq f(\tau, \tau'),$$

aus welcher man die Konvergenz der Reihe

$$1 + \sum_{\nu > 0} P(\nu) e^{-\nu\tau - \nu'\tau'}$$

entnimmt. Für komplexe τ und τ' mit positiven Realteilen ergibt sich hiernach

die absolute Konvergenz dieser Reihe, so daß

$$\sum_{\substack{v > 0 \\ \text{Sp}(v) > m}} P(v) e^{-v\Re(\tau) - v'\Re(\tau')} < \frac{\delta_1}{2}$$

ist, mit beliebig vorgegebenem $\delta_1 > 0$ für $m > m_0(\delta_1)$. Ebenfalls gilt

$$|f(\tau, \tau') - f_m(\tau, \tau')| < \frac{\delta_1}{2}$$

für $m > m_1(\delta_1)$. Somit folgt

$$\begin{aligned} & \left| f(\tau, \tau') - 1 - \sum_{\substack{v > 0 \\ \text{Sp}(v) \leq m}} P(v) e^{-v\tau - v'\tau'} \right| \leq \\ & \leq |f(\tau, \tau') - f_m(\tau, \tau')| + |f_m(\tau, \tau') - 1 - \sum_{\substack{v > 0 \\ \text{Sp}(v) \leq m}} P(v) e^{-v\tau - v'\tau'}| \\ & \leq \frac{\delta_1}{2} + \left| \sum_{\substack{v > 0 \\ \text{Sp}(v) > m}} P_m(v) e^{-v\tau - v'\tau'} \right| \leq \frac{\delta_1}{2} + \sum_{\substack{v > 0 \\ \text{Sp}(v) > m}} P(v) e^{-v\Re(\tau) - v'\Re(\tau')} \\ & \leq \delta_1 \quad \text{für } m > \text{Max}(m_0, m_1), \end{aligned}$$

womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

3. Eine obere Abschätzung für $P(\mu)$.

Wir setzen in diesem Kapitel $\tau = y$, $\tau' = y'$, wobei y und y' reelle positive Zahlen sind. Aus (10) und (12) folgt

$$g(y, y') < \frac{1}{y + y'} + \frac{1}{y\sqrt{d}} + \frac{1}{y'\sqrt{d}} + \frac{1}{yy'\sqrt{d}},$$

und mit (14)

$$(17) \quad \log f(y, y') < \left(\frac{1}{y + y'} + \frac{1}{y\sqrt{d}} + \frac{1}{y'\sqrt{d}} \right) \zeta(2) + \frac{\zeta(3)}{yy'\sqrt{d}}.$$

Da in der Reihe (15) jetzt alle Summanden positiv sind, gilt

$$P(\mu) < f(y, y') e^{\mu y + \mu' y'},$$

mit (17) somit

$$P(\mu) < e^{\frac{\zeta(3)}{yy'\sqrt{d}} + \mu y + \mu' y' + \zeta(2) \cdot \left\{ \frac{1}{y + y'} + \frac{1}{y\sqrt{d}} + \frac{1}{y'\sqrt{d}} \right\}}.$$

Wir wählen nun y und y' derart, daß der Ausdruck

$$\frac{\zeta(3)}{yy'\sqrt{d}} + \mu y + \mu' y'$$

ein Minimum wird. Man erreicht dieses durch

$$(18) \quad y = \frac{M}{\mu}; \quad y' = \frac{M}{\mu'}.$$

Da μ reduziert ist, gilt nach (6) und (7)

$$(19) \quad c_5 M^{-\frac{1}{2}} < y < c_6 M^{-\frac{1}{2}}; \quad c_5 M^{-\frac{1}{2}} < y' < c_6 M^{-\frac{1}{2}}.$$

Aus (6) ergibt sich die mit (5) gleichbedeutende Aussage

Satz 1. Für alle μ gilt

$$P(\mu) < e^{3M + c_1 M^{\frac{1}{2}}}.$$

4. Die Integraldarstellung für $P(\mu)$.

In diesem und dem folgenden Kapitel sei

$$(20) \quad \tau = y + 2\pi i \xi; \quad \tau' = y' + 2\pi i \xi'$$

mit y und y' nach Gl. (18). Dabei sind ξ und ξ' reelle Variable. Mit Hilfe der bereits benutzten Basis 1, ω der ganzen Zahlen des Körpers $R(\sqrt{d})$ führen wir die Größen ein

$$(21) \quad \xi = \frac{x_1 + \omega x_2}{\sqrt{d}}; \quad \xi' = -\frac{x_1 + \omega' x_2}{\sqrt{d}}.$$

Die Formel (15) liefert dann eine Fourier-Entwicklung der Funktion $f(\tau, \tau')$, welche die Periodizität sowohl in x_1 als auch in x_2 mit der Periode 1 in Evidenz setzt, denn $\text{Sp}(\nu \xi) = \nu \xi + \nu' \xi'$ ist ganz-rational, wenn x_1 und x_2 ganz-rational sind. Multiplizieren wir (15) mit $e^{2\pi i \text{Sp}(\mu \xi)}$ und integrieren wir gliedweise über das Periodenquadrat

$$\Omega: |x_1| \leq \frac{1}{2}; \quad |x_2| \leq \frac{1}{2},$$

so folgt

$$P(\mu) = e^{\mu y + \mu' y'} \cdot \iint_{\Omega} f(y + 2\pi i \xi, y' + 2\pi i \xi') e^{2\pi i \text{Sp}(\mu \xi)} dx_1 dx_2,$$

denn es gilt

$$\iint_{\Omega} e^{2\pi i \text{Sp}(\mu - \nu) \xi} dx_1 dx_2 = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Wir führen noch die Substitution (21) aus und erhalten

$$(22) \quad P(\mu) = \sqrt{d} e^{\mu y + \mu' y'} \iint_{\mathfrak{P}} f(y + 2\pi i \xi, y' + 2\pi i \xi') e^{2\pi i \text{Sp}(\mu \xi)} d\xi d\xi'.$$

Dabei ist \mathfrak{P} das durch die Transformation (21) aus Ω hervorgehende Parallelogramm.

Wir werden später \mathfrak{P} durch einen kleinen Kreis

$$(23) \quad \mathfrak{R}: \xi^2 + \xi'^2 \leq M^{-\frac{13}{7}}$$

ersetzen, der für $M > c_a$ vollständig in \mathfrak{P} liegt. In dem Gebiet $\mathfrak{P} - \mathfrak{R}$ gewinnen wir eine obere Abschätzung der erzeugenden Funktion zum Teil auf elementarem Wege, zum Teil durch Verwendung einer genaueren Approximation nach einer HECKESchen Formel. Das zurückbleibende Integral über den Kreis \mathfrak{R} wird dann durch Anwendung der Sattelpunktmethode asymptotisch ausgewertet.

5. Eine elementare Abschätzung der erzeugenden Funktion.

Es bedeute \mathfrak{R}_0 den Kreis

$$(24) \quad \mathfrak{R}_0: \xi^2 + \xi'^2 \leq M^{-\frac{1}{4}}.$$

Hilfssatz 2. Im Gebiet $\mathfrak{P} - \mathfrak{R}_0$ gilt mit Formel (20)

$$|f(\tau, \tau')| < e^{M - c_8 M^{\frac{1}{2}}}$$

für $M > c_{10} \geq c_8$.

Beweis. Es ist nach (14)

$$(25) \quad \log |f(\tau, \tau')| = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} g(k\tau, k\tau') \right\} \\ \leq \log f(y, y') + \Re \{g(\tau, \tau')\} - g(y, y').$$

Nach (17) ist mit (6), (18) und (19)

$$(26) \quad \log f(y, y') < M + c_7 M^{\frac{1}{2}}.$$

Da $\tau + \tau' = y + y' + 2\pi i x_2$ mit $|x_2| \leq 1/2$ ist, folgt

$$\frac{1}{e^{\tau + \tau'} - 1} = \frac{1}{\tau + \tau'} + B_0; \quad \frac{e^{\tau + \tau'}}{e^{\tau + \tau'} - 1} = \frac{1}{\tau + \tau'} + B_1, \quad \text{mit } |B_0| \leq c_{11}; \quad |B_1| \leq c_{11}.$$

Also ist wegen (9), (10) und (11)

$$g(\tau, \tau') = \frac{1}{\tau + \tau'} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{d}\tau} - 1} + \frac{1}{e^{\sqrt{d}\tau'} - 1} \right) + B_2,$$

wobei

$$|B_2| \leq c_{12} M^{\frac{1}{2}}$$

ist, denn in \mathfrak{P} gilt

$$\left| \frac{\tau + \tau'}{e^{\tau + \tau'} - 1} \right| \leq c_{13}.$$

Aus Gl. (21) folgt

$$\sqrt{d}\tau = \sqrt{d}y + 2\pi i(x_1 + \omega x_2); \quad \sqrt{d}\tau' = \sqrt{d}y' - 2\pi i(x_1 + \omega' x_2).$$

Betrachten wir die Funktionen

$$\frac{1}{e^{\sqrt{d}\tau} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{e^{\sqrt{d}\tau'} - 1}$$

im Gebiet $|x_1 + \omega x_2 - r_1| \leq 1/4$ bzw. $|x_1 + \omega' x_2 - r_2| \leq 1/4$; r_1, r_2 ganz-rational und $\neq 0$, so ist dort wegen $|x_1| \leq 1/2$ sicher $|x_2| \geq c_{14}$, d. h. $|\tau + \tau'| \geq c_{15}$. Im ganzen Integrationsgebiet \mathfrak{P} erhalten wir deshalb die Darstellung

$$g(\tau, \tau') = \frac{1}{\sqrt{d}\tau\tau'} + B_3; \quad |B_3| \leq c_{16} M^{\frac{1}{2}},$$

und insbesondere für $\tau = y, \tau' = y'$

$$g(y, y') = \frac{1}{\sqrt{d}yy'} + B_4; \quad |B_4| \leq c_{16} M^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist

$$\Re \left\{ \frac{1}{\tau\tau'} \right\} - \frac{1}{yy'} \leq \frac{1}{|\tau\tau'|} - \frac{1}{yy'} = \frac{1}{yy'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 + 4\pi^2 \xi^2 y^{-2})(1 + 4\pi^2 \xi'^2 y'^{-2})}} - 1 \right\} \\ \leq \frac{1}{yy'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2(\xi^2 y^{-2} + \xi'^2 y'^{-2})}} - 1 \right\}.$$

Nach (18) und (19) gilt also in $\mathfrak{P} - \mathfrak{R}_0$

$$\Re \left\{ \frac{1}{\tau \tau'} \right\} - \frac{1}{y y'} \leq c_{17} M \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + c_{18} M^{-\frac{1}{2}}}} - 1 \right\} \leq c_{17} M \left\{ \frac{1}{1 + c_{18} M^{-\frac{1}{2}}} - 1 \right\} \\ \leq -c_{30} M^{\frac{1}{2}} \text{ für } M > c_{21} \geq c_8.$$

Deshalb ist für $M > c_{22} \geq c_{21}$

$$(27) \quad \Re \{g(\tau, \tau')\} - g(y, y') \leq -c_{23} M^{\frac{1}{2}}.$$

Mit (25), (26) und (27) ergibt sich die Behauptung des Hilfssatzes 2.

6. Heranziehung einer Transformationsformel von HECKE.

In diesem und den folgenden Kapiteln seien τ und τ' beliebige komplexe Variable mit positiven Realteilen. Wir betrachten die Reihe

$$(28) \quad \Phi(\tau, \tau'; v) = \sum_{n \neq 0} \tau(n) e^{-|v|\tau - |v'|\tau'}.$$

Summiert wird über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen des Körpers $R(\sqrt{d})$, und $v(v)$ ist ein Vorzeichencharakter, nämlich entweder $v(v) = v_0(v) = 1$ oder $v(v) = v_1(v) = \text{sgn}(v \cdot v')$. Die Konvergenzeigenschaften der Reihe (28) sind die gleichen, wie bei der geometrischen Reihe $g(\tau, \tau')$. Es gilt die Beziehung

$$(29) \quad g(\tau, \tau') = \frac{1}{4} \{ \Phi(\tau, \tau'; v_0) + \Phi(\tau, \tau'; v_1) \}.$$

Die nun folgende Zurückführung der Funktion (28) auf eine Reihe von komplexen Integralen vom MELLINSchen Typus über Zetafunktionen mit Größencharakteren wurde von HECKE [4] gegeben. Es sei wieder η die kleinste totalpositive Einheit > 1 , also

$$\eta = \begin{cases} \varepsilon, & \text{wenn } N(\varepsilon) = +1, \\ \varepsilon^2, & \text{wenn } N(\varepsilon) = -1 \text{ ist,} \end{cases}$$

wobei ε die Grundeinheit > 1 des Körpers bedeutet. Es gilt die Invarianzeigenschaft

$$\Phi(\eta \tau, \eta' \tau'; v) = \Phi(\tau, \tau'; v),$$

welche für die Funktion

$$(30) \quad \psi(u) = \sum_{n \neq 0} v(n) e^{-|v|\tau e^u - |v'|\tau' e^{-u}}$$

die Periodizität in der Variablen u mit der Periode $\log \eta$ zur Folge hat. Da die Reihe (30) bei festen τ, τ' in jedem abgeschlossenen Bereich mit $\Re(\tau e^u) > 0$, $\Re(\tau' e^{-u}) > 0$ gleichmäßig in u konvergiert, existiert für sie eine FOURIERsche Reihenentwicklung

$$\psi(u) = \frac{1}{\log \eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n e^{\frac{2\pi i n u}{\log \eta}},$$

welche auch für $u = 0$ konvergiert und dort $\Phi(\tau, \tau'; v)$ zur Summe hat

$$(31) \quad \Phi(\tau, \tau'; v) = \frac{1}{\log \eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n.$$

Dabei ist

$$H_n = \int_0^{\log \eta} \psi(u) e^{-\frac{2\pi i n u}{\log \eta}} du.$$

Wir zerlegen die Reihe (30) nach der Vorschrift

$$\sum_{\nu \neq 0} r(\nu) = \sum_{\substack{(\nu)_0 \\ \nu \neq 0}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r(\eta^m \cdot \nu),$$

wobei das Zeichen $(\nu)_0$ bedeutet, daß über ein System von solchen ganzen Zahlen ν zu summieren ist, die sich paarweise nicht nur um eine total-positive Einheit als Faktor unterscheiden. Dann wird

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{\substack{(\nu)_0 \\ \nu \neq 0}} v(\nu) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\log \eta} e^{-|v| \frac{u}{\eta} m} e^{-|v'| \frac{u}{\eta} m} e^{-\frac{2\pi i n u}{\log \eta}} du \\ &= \sum_{\substack{(\nu)_0 \\ \nu \neq 0}} v(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|v| \frac{u}{\eta} \tau} e^{-|v'| \frac{u}{\eta} \tau} e^{-\frac{2\pi i n u}{\log \eta}} du. \end{aligned}$$

Eine bekannte Transformationsformel von HECKE [4] ergibt

$$(32) \quad H_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\Gamma(s+i n b) \Gamma(s-i n b)}{\tau^{s+i n b} \tau'^{s-i n b}} \sum_{\substack{(\nu)_0 \\ \nu \neq 0}} \frac{\lambda^n(\nu) v(\nu)}{|N \nu|^s} ds,$$

wobei die Potenzen im Nenner durch die Hauptwerte erklärt sind. Hier wurde die Abkürzung (6) benutzt, und es ist

$$\lambda(\nu) = e^{i \cdot b \cdot \log \left| \frac{\nu'}{\nu} \right|}$$

der erzeugende Größencharakter der ganzen Zahl ν des Körpers. Es sei $\epsilon(1)$ die Anzahl der verschiedenen Einheiten, die sich paarweise nicht nur um eine total-positive Einheit als Faktor unterscheiden, also

$$\epsilon(1) = \begin{cases} 2 & \text{für } \eta = \epsilon, \\ 4 & \text{für } \eta = \epsilon^2. \end{cases}$$

Ist für jede Einheit ϵ_1 des Körpers bei festem n die Zahl $\lambda^n(\epsilon_1) v(\epsilon_1) = +1$, so wird

$$(33) \quad \sum_{\substack{(\nu)_0 \\ \nu \neq 0}} \frac{\lambda^n(\nu) v(\nu)}{|N \nu|^s} = \epsilon(1) \sum_{(\nu)} \frac{\lambda^n(\nu) v(\nu)}{|N \nu|^s} = \epsilon(1) \zeta_n(s, v).$$

Summiert wird in der zweiten Reihe über alle von Null verschiedenen Hauptideale des Körpers, und ν ist eine beliebige Erzeugende des Ideals (ν) . Die durch Gl. (33) in der Halbebene $\Re(s) = \sigma > 1$ definierte Funktion $\zeta_n(s, v)$ heißt die HECKESche Zetafunktion mit Größencharakteren. Gibt es jedoch mindestens eine Einheit ϵ_2 in $R(\sqrt{d})$, so daß $\lambda^n(\epsilon_2) v(\epsilon_2) \neq +1$, also $= -1$ ist, so ist

$$\sum_{\substack{(\nu)_0 \\ \nu \neq 0}} \frac{\lambda^n(\nu) v(\nu)}{|N \nu|^s} = 0,$$

da sich die Glieder mit ν und $\epsilon_2 \cdot \nu$ aufheben. In diesem Fall soll unter $\zeta_n(s, v)$

der Wert Null verstanden werden. Es ergibt sich daher aus (32)

$$(34) \quad H_n = \frac{e(1)}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\Gamma(s+inb)\Gamma(s-inb)}{\tau^{s+inb}\tau'^{s-inb}} \zeta_n(s, v) ds.$$

Verwenden wir noch $e(1) \log \varepsilon = 2 \log \eta$, so folgt aus (29), (31) und (34) der folgende

Hilfssatz 3. Für $\Re(\tau) > 0$, $\Re(\tau') > 0$ gilt

$$g(\tau, \tau') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') Z_n(s) ds,$$

mit

$$G_n(s; \tau, \tau') = \frac{\Gamma(s+inb)\Gamma(s-inb)}{\tau^{s+inb}\tau'^{s-inb}}; \quad Z_n(s) = \frac{1}{2 \log \eta} \{\zeta_n(s, v_0) + \zeta_n(s, v_1)\}.$$

Die analytischen Eigenschaften von $Z_n(s)$ bestimmen sich aus denen von $\zeta_n(s, v)$. Nach HECKE [4] sind die Funktionen $\zeta_n(s, v)$ ganz-transzendent, wenn nicht gleichzeitig $n = 0$ und $v = v_0$ ist. Ist dies jedoch der Fall, so ist $\zeta_0(s, v_0)$ die DEDEKINDSche Zetafunktion des Körpers $R(\sqrt{d})$ für die Klasse der Hauptideale. Diese ist bekanntlich regulär in der ganzen s -Ebene mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{2 \log \varepsilon}{\sqrt{d}}$ vorliegt. Somit ist $Z_n(s)$ für $n \neq 0$ ganz-transzendent, und

$$(35) \quad Z_0(s) = Z(s)$$

besitzt bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{\sqrt{d}}$ und ist sonst in der ganzen s -Ebene regulär. Wir werden später noch Gebrauch machen von der Funktionalgleichung

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit} \\ \xi_n(s, v) = \left(\frac{\sqrt{d}}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2} + \frac{inb}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+a}{2} - \frac{inb}{2}\right) \zeta_n(s, v) \\ \text{und} \\ a = \begin{cases} 0 & \text{für } v = v_0, \\ 1 & \text{für } v = v_1. \end{cases} \end{array} \right. \quad \xi_n(s, v) = \xi_{-n}(1-s, v)$$

7. Anwendung von Hilfssatz 3.

Wir ersetzen τ durch $k\tau$, τ' durch $k\tau'$ und erhalten aus Hilfssatz 3 und Gl. (14)

$$(37) \quad \log f(\tau, \tau') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') \zeta(2s+1) Z_n(s) ds.$$

Die hier durchgeführten Vertauschungen bedürfen einer Rechtfertigung. Wir

setzen wie üblich $s = \sigma + it$. Da $\sigma = 2$ ist, erkennt man leicht

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') Z_n(s) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2s-1} ds = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') Z_n(s) k^{-2s-1} ds. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Doppelreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') Z_n(s) k^{-2s-1} ds$$

absolut konvergiert. Von nun an machen wir die wichtige Einschränkung

$$(38) \quad |\arg \tau| \leq \frac{\pi}{4}; \quad |\arg \tau'| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Dann ist

$$(39) \quad |\tau^{-\sigma-i(t+nb)} \tau'^{-\sigma-i(t-nb)}| \leq |\tau \tau'|^{-\sigma} \cdot e^{\frac{\pi}{4}(|t+nb| + |t-nb|)}$$

Auf der Geraden $\sigma = 2$ ist jeder Integrand regulär. Im Streifen $-1/2 \leq \sigma \leq 2$ der s -Ebene gilt nach der STIRLINGschen Formel die Ungleichung

$$|\Gamma(\sigma + it)| \leq c_{24} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} (|t| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}},$$

gleichmäßig in σ , wenn wir den Pol der Gammafunktion bei $s = 0$ etwa durch einen Kreis vom Radius $1/4$ ausschließen. Schließen wir entsprechend den Pol bei $s = \mp i n b$ aus, so folgt

$$(40) \quad |\Gamma(\sigma + i(t \pm nb))| \leq c_{24} (|t \pm nb| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t \pm nb|}$$

Also ist unter den erwähnten Voraussetzungen

$$(41) \quad \begin{aligned} & |G_n(s; \tau, \tau')| \leq \\ & \leq c_{25} |\tau \tau'|^{-\sigma} (|t + nb| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}} (|t - nb| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}(|t+nb| + |t-nb|)} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$|c_n(2 + it, v)| \leq c_{26}, \quad \text{also } |Z_n(2 + it)| \leq c_{27}.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') Z_n(s) k^{-2s-1} ds \right| \leq \\ & \leq c_{28} \frac{|\tau \tau'|^{-2}}{k^2} \int_0^{\infty} (|t + nb| + 1)^{\frac{3}{2}} (|t - nb| + 1)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}(|t+nb| + |t-nb|)} dt \\ & \leq c_{28} \frac{|\tau \tau'|^{-2}}{k^2} \left\{ \int_0^{|b|n|} (b|n| + 1)^3 e^{-\frac{\pi}{2}|n|b} dt + \int_{|b|n|}^{\infty} (t + 1)^3 e^{-\frac{\pi}{2}t} dt \right\} \\ & \leq c_{29} \frac{|\tau \tau'|^{-2}}{k^2} e^{-\frac{\pi}{4}|n| \cdot b} \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung geht die absolute Konvergenz der Doppelreihe hervor. Damit ist Gl. (37) unter der Bedingung (38) bewiesen.

Wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, gilt bei festem n

$$(42) \quad \zeta(2s+1) Z_n(s) = O(|t|^{c_n}),$$

für $|t| \rightarrow \infty$, gleichmäßig in σ im Streifen $-1/2 \leq \sigma \leq 2$. Hieraus und aus (41) folgt, daß man in jedem Integral der Reihe (37) die Integrationsgerade nach $\sigma = -1/2$ verschieben darf. Es treten dabei die Residuen der einzelnen Integranden im Streifen $-1/2 \leq \sigma \leq 2$ auf. Für $n=0$ haben wir die Residuen der Funktion

$$(\tau \tau')^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s+1) Z(s)$$

zu bestimmen. Bei $s=1$ liegt ein einfacher Pol mit dem Residuum

$$\frac{\zeta(3)}{\tau \tau' \sqrt{d}}$$

vor. Bei $s=0$ liegt ein Pol von dritter Ordnung. Sein Residuum ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$\frac{Z(0)}{4} \log^2 \tau \tau' - \frac{Z'(0)}{2} \log \tau \tau' + \frac{Z''(0)}{4} + Z(0) \left\{ a_1 + \frac{\pi^2}{12} - \gamma^2 \right\}.$$

Dabei ist γ die EULERSche Konstante, und es wurde benutzt

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \zeta(s+1))' = - \lim_{s \rightarrow 0} (s \Gamma(s))' = -\Gamma'(1) = \gamma,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \Gamma(s))'' = \Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \zeta(s+1))'' = a_1.$$

Für $n \neq 0$ hat der Integrand

$$G_n(s; \tau, \tau') \zeta(2s+1) Z_n(s)$$

drei einfache Pole bei $s=0$ und $s = \pm i n b$. Die Residuen sind

$$\text{bei } s=0: \frac{1}{2} \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^{i n b} \Gamma(i n b) \Gamma(-i n b) Z_n(0),$$

$$\text{bei } s = +i n b: \tau^{-2 i n b} \Gamma(2 i n b) \zeta(1+2 i n b) Z_n(i n b),$$

$$\text{bei } s = -i n b: \tau'^{2 i n b} \Gamma(-2 i n b) \zeta(1-2 i n b) Z_n(-i n b).$$

Durch Summation dieser unendlich vielen Residuen erhalten wir eine Reihe, deren Konvergenz im nächsten Kapitel gezeigt werden soll. Wir dürfen sie deshalb aus der ursprünglichen Reihe herausnehmen. Es ergibt sich der folgende

Hilfssatz 4. Für $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{4}$; $|\arg \tau'| \leq \frac{\pi}{4}$ gilt

$$\begin{aligned} \log f(\tau, \tau') &= \frac{\zeta(3)}{\tau \tau' \sqrt{d}} + \frac{Z(0)}{4} \log^2 \tau \tau' - \frac{Z'(0)}{2} \log \tau \tau' + L + \\ &+ S_1(\tau \tau') + S_2(\tau) + S_3(\tau') + R_0(\tau, \tau'), \end{aligned}$$

mit

$$L = \frac{Z''(0)}{4} + Z(0) \left\{ a_1 + \frac{\pi^2}{12} - \gamma^2 \right\},$$

$$S_1(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^{inb} \Gamma(inb) \Gamma(-inb) Z_n(0),$$

$$S_2(\tau) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \tau^{-2inb} \Gamma(2inb) \zeta(1+2inb) Z_n(inb),$$

$$S_3(\tau') = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \tau'^{2inb} \Gamma(-2inb) \zeta(1-2inb) Z_n(-inb)$$

und

$$R_0(\tau, \tau') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') \zeta(2s+1) Z_n(s) ds.$$

8. Reihenabschätzungen.

Wir schicken einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 5. Für $-1/2 \leq \sigma \leq 0$ gilt

$$|\zeta_n(\sigma + it, v)| \leq c_{31} (|t + nb| + 1) (|t - nb| + 1).$$

Beweis. Es sei nicht gleichzeitig $n = 0$, $v = v_0$, denn der Fall $n = 0$, $v = v_0$ folgt bereits in üblicher Schlußweise nach LANDAU [5], Satz 169. Nach HECKE [6] ist mit einer von n abhängigen Konstanten $C(n)$ für $-1/2 \leq \sigma \leq 2$

$$|\zeta_n(\sigma + it, v)| \leq c_{32} e^{C(n) \cdot |t|},$$

gleichmäßig in σ . Aus der Funktionalgleichung (36) folgt

$$\left| \zeta_n \left(-\frac{1}{2} + it, v \right) \right| \leq c_{33} (|t + nb| + 1) (|t - nb| + 1),$$

und es ist

$$|\zeta_n(2 + it, v)| \leq c_{34}.$$

Betrachten wir im Sinne der PHRAGMÉN-LINDELÖFSCHEN Methode mit einem positiven $\delta_2 < 1$ die Funktion

$$h(s) = \frac{\zeta_n(s, v) \cdot e^{\delta_2 \cdot s^2}}{(s + inb + 1) \cdot (s - inb + 1)},$$

so ist die Ungleichung

$$(43) \quad |h(s)| \leq c_{35}$$

offenbar auf den Geraden $\sigma = -1/2$ und $\sigma = 2$ erfüllt. Wegen $|e^{\delta_2 \cdot s^2}| = e^{\delta_2(s^2 - t^2)} \leq c_{36} e^{-\delta_2 t^2}$ gilt sie ferner auch für $-1/2 \leq \sigma \leq 2$ und $|t| \geq t_0(\delta_2, n)$. Nach dem Prinzip vom Maximum ist (43) also im ganzen Streifen $-1/2 \leq \sigma \leq 2$ richtig. Es folgt

$$|\zeta_n(s, v)| \leq c_{35} (|t + nb| + 1) (|t - nb| + 1) e^{\delta_2 t^2}.$$

Der Grenzübergang $\delta_2 \rightarrow 0$ liefert die Behauptung von Hilfssatz 5.

Wir verwenden die bekannte Abschätzung

$$(44) \quad |\zeta(s)| \leq c_{37}(|t| + 1)^{c_{38}},$$

gleichmäßig in σ für $0 \leq \sigma \leq 2$, $|s - 1| \geq b$. Aus dem Beweis von Hilfssatz 5 und aus (44) geht die Richtigkeit der Formel (42) hervor.

Die Aussage des Hilfssatzes 5 überträgt sich nun auf die Funktionen $Z_n(s)$. Mit Formel (41) ergibt sich dann

$$|S_1(\tau, \tau')| \leq c_{39} \sum_{n=1}^{\infty} n^{c_{40}} e^{-\frac{\pi}{2} n b},$$

also

$$(45) \quad |S_1(\tau, \tau')| \leq c_{41}.$$

Ebenso folgt unter Verwendung von (44)

$$(46) \quad |S_2(\tau)| \leq c_{41},$$

$$(47) \quad |S_3(\tau')| \leq c_{41}.$$

Damit ist der vor Hilfssatz 4 erwähnte Konvergenzbeweis erbracht. Außerdem ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihen $S_1(\tau, \tau')$, $S_2(\tau)$ und $S_3(\tau')$ in τ und τ' in dem Winkelraum $|\arg \tau| \leq \pi/4$, $|\arg \tau'| \leq \pi/4$ gezeigt. Wir geben nun noch eine Abschätzung von $R_0(\tau, \tau')$. In (41) setzen wir $\sigma = -1/2$ und erhalten mit (44)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} G_n(s; \tau, \tau') \zeta(2s+1) Z_n(s) ds \right| &\leq \\ &\leq c_{42} |\tau \tau'|^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (t+1)^{c_{43}} e^{-\frac{\pi}{4}(|t+nb|+|t-nb|)} dt \\ &\leq c_{43} |\tau \tau'|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}|n|b}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$|R_0(\tau, \tau')| \leq c_{44} |\tau \tau'|^{\frac{1}{2}}.$$

9. Verkleinerung des Integrationsgebietes.

Von nun an haben τ und τ' wieder die Bedeutung von (20). Es sei \mathfrak{R} der durch (23) definierte Kreis der ξ - ξ' -Ebene.

Hilfssatz 6. Im Gebiet $\mathfrak{P} - \mathfrak{R}$ gilt

$$|f(\tau, \tau')| \leq e^{M - c_{45} M^{\frac{1}{2}}}$$

für $M > c_{46} \geq c_{10}$.

Beweis. Wir dürfen uns auf das Gebiet $\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R}$ beschränken, denn für das Gebiet $\mathfrak{P} - \mathfrak{R}_0$ ist die Behauptung bereits in Hilfssatz 2 bewiesen. Es sei also

$$M^{-\frac{13}{7}} \leq \xi^2 + \xi'^2 \leq M^{-\frac{4}{3}}.$$

Wir verwenden den Hilfssatz 4. Es ist

$$\Re \left\{ \frac{1}{\tau \tau'} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{(y^2 + 4\pi^2 \xi^2)(y'^2 + 4\pi^2 \xi'^2)}} \\ \leq \frac{1}{y y'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + c_{47} M^{-\frac{1}{2}}}} \leq \frac{1}{y y'} \cdot \frac{1}{1 + c_{48} M^{-\frac{1}{2}}},$$

für $M > c_{49} \geq c_{10}$. Also ist

$$\Re \left\{ \frac{\zeta(3)}{\tau \tau' \sqrt{d}} \right\} \leq M - c_{50} M^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist

$$|\log \tau \tau'| \leq c_{51} \log M,$$

und, da $\xi^2 + \xi'^2 \leq M^{-\frac{1}{2}}$, also die Bedingung (38) für $M > c_{52} \geq c_{49}$ erfüllt ist, nach (45), (46), (47) und (48)

$$\log |f(\tau, \tau')| \leq M - c_{45} M^{\frac{1}{2}},$$

für $M > c_{46} \geq c_{10}$. Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

Wir gehen nun aus von der Integraldarstellung (22). Es ist

$$(49) \quad P(\mu) = \sqrt{d} e^{\mu y + \mu' y'} \iint_{\mathfrak{R}} f(y + 2\pi i \xi, y' + 2\pi i \xi') e^{2\pi i \operatorname{Sp}(\mu \xi)} d\xi d\xi' + K_1$$

mit

$$K_1 = \sqrt{d} e^{\mu y + \mu' y'} \iint_{\mathfrak{P} - \mathfrak{R}} f(y + 2\pi i \xi, y' + 2\pi i \xi') e^{2\pi i \operatorname{Sp}(\mu \xi)} d\xi d\xi'.$$

Da das Parallelogramm \mathfrak{P} den Flächeninhalt $\frac{1}{\sqrt{d}}$ besitzt, folgt mit (18) und Hilfssatz 6

$$(50) \quad |K_1| \leq e^3 M - c_{53} M^{\frac{1}{2}}.$$

10. Anwendung der Sattelpunktmethode.

In dem Integral aus Gl. (49) führen wir die Substitution $2\pi \xi = y w$; $2\pi \xi' = y' w'$ aus. Man erhält

$$(51) \quad P(\mu) = \frac{\sqrt{d} \cdot y \cdot y'}{4\pi^2} e^{\mu y + \mu' y'} \cdot \iint_{\mathfrak{E}} e^{\varphi_0(w, w')} dw dw' + K_1,$$

wobei

$$\varphi_0(w, w') = \log f(y(1 + iw), y'(1 + iw')) + i\mu y w + i\mu' y' w'$$

ist und \mathfrak{E} die Ellipse

$$\mathfrak{E}: \left(\frac{y w}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{y' w'}{2\pi} \right)^2 \leq M^{-\frac{13}{7}}$$

bedeutet. Für

$$(52) \quad |w| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; |w'| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist $|\arg(1 + iw)| \leq \pi/4$; $|\arg(1 + iw')| \leq \pi/4$. Aus Kapitel 8 folgt nun, daß $S_1(y(1 + iw), y'(1 + iw'))$, $S_2(y(1 + iw))$ und $S_3(y'(1 + iw'))$ reguläre Funktionen von w und w' im Gebiet (52) darstellen, welche gleichmäßig in y

und y' beschränkt sind. Folglich ist

$$\begin{aligned} S_1(y(1+iw), y'(1+iw')) &= S_1(y, y') + O(|w| + |w'|), \\ S_2(y(1+iw)) &= S_2(y) + O(|w|), \\ S_3(y'(1+iw')) &= S_3(y') + O(|w'|), \end{aligned}$$

wobei hier und im folgenden die O -Aussagen im ganzen Gebiet (52) gleichmäßig in y und y' gelten. In \mathfrak{E} gilt wegen (19)

$$(53) \quad |w| \leq c_{33} M^{-\frac{2}{3}}, \quad |w'| \leq c_{33} M^{-\frac{2}{3}},$$

so daß die Ungleichungen (52) für $M > c_{34} \geq c_{40}$ erfüllt sind. Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta(3)}{y \cdot y' \cdot \sqrt{d} \cdot (1+iw)(1+iw')} + i\mu y w + i\mu' y' w' = \\ &= \frac{\zeta(3)}{y y' \sqrt{d}} \{1 - w^2 - w w' - w'^2 + O((|w| + |w'|)^3)\} \end{aligned}$$

und

$$\log y y' (1+iw)(1+iw') = \log y y' + O(|w| + |w'|).$$

Nach (48) ist noch

$$R_0(\tau, \tau') = (y y')^{\frac{1}{2}} \cdot O(1).$$

Wir haben nach (6), (18) und Hilfssatz 4 also die Entwicklung

$$(54) \quad \varphi_0(w, w') = Y - MQ + \varphi_1(w, w')$$

mit

$$\begin{aligned} Y &= M + \frac{Z(0)}{4} \log^2 y y' - \frac{Z'(0)}{2} \log y y' + L + S_1(y, y') + S_2(y) + S_3(y'), \\ Q &= Q(w, w') = w^2 + w w' + w'^2, \end{aligned}$$

und

$$\varphi_1(w, w') = O(|w| + |w'|) + M \cdot O((|w| + |w'|)^3) + \log M \cdot O(|w| + |w'|) + M^{-\frac{1}{2}} \cdot O(1).$$

Mit (53) ist für $M > c_{35} \geq c_{34}$

$$(55) \quad |\varphi_1(w, w')| \leq c_{36} M^{-\frac{2}{3}}.$$

Nun ist

$$(56) \quad \iint_{\mathfrak{E}} e^{-MQ + \varphi_1(w, w')} dw dw' = \iint_{\mathfrak{E}} e^{-MQ} dw dw' + K_2$$

mit

$$K_2 = \iint_{\mathfrak{E}} e^{-MQ} \{e^{\varphi_1(w, w')} - 1\} dw dw'.$$

Da Q definit und der Flächeninhalt der Ellipse \mathfrak{E} kleiner als $c_{37} M^{-\frac{2}{3}}$ ist, folgt nach (55)

$$(57) \quad |K_2| \leq c_{38} M^{-\frac{2}{3}}.$$

Die quadratische Form Q bringen wir auf die Gestalt einer Quadratsumme durch die Substitution

$$w = M^{-\frac{1}{2}} \left(z + \frac{z'}{\sqrt{3}} \right); \quad w' = M^{-\frac{1}{2}} \left(-z + \frac{z'}{\sqrt{3}} \right).$$

Dabei geht die Ellipse \mathfrak{E} in eine Ellipse \mathfrak{Z} der $z-z'$ -Ebene über

$$\mathfrak{Z}: \left\{ \frac{y}{2\pi} \left(z + \frac{z'}{\sqrt{3}} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{y'}{2\pi} \left(z - \frac{z'}{\sqrt{3}} \right) \right\}^2 \leq M^{-\frac{1}{3}}.$$

Für einen Punkt außerhalb \mathfrak{Z} gilt wegen (19)

$$z^2 + z'^2 \geq c_{39} M^{\frac{1}{3}}.$$

Also wird

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{E}} e^{-MQ} dw dw' &= \frac{2}{M\sqrt{3}} \iint_{\mathfrak{Z}} e^{-z^2 - z'^2} dz dz' \\ &= \frac{2}{M\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2 - z'^2} dz dz' + K_3 \end{aligned}$$

mit

$$(58) \quad |K_3| \leq e^{-c_{39} M^{\frac{1}{3}}},$$

für $M > c_{31} \geq c_{35}$. Aus (56), (57) und (58) folgt mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2 - z'^2} dz dz' = \pi$$

die Beziehung

$$(59) \quad \iint_{\mathfrak{E}} e^{-MQ + \varphi_1(w, w')} dw dw' = \frac{2\pi}{M\sqrt{3}} + K_4$$

mit

$$|K_4| \leq c_{32} M^{-\frac{1}{3}}.$$

Aus (50), (51), (54) und (59) erhalten wir

$$P(\mu) = \frac{\sqrt{d} \cdot y \cdot y'}{2\pi M \sqrt{d}} e^{\mu y + \mu' y' + Y} (1 + O(M^{-\frac{1}{3}}))$$

für $M \rightarrow \infty$. Mit (6), (18) und (54) ergibt sich der in (4) behauptete Satz.

Satz 2. Für $N \rightarrow \infty$ gilt

$$P(\mu) = e^{3 \cdot \sqrt{\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}} N + s_1 \log^2 N + s_2 \log N + \mathfrak{O}(\lambda, N)} \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{21}}\right) \right)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{Z(0)}{36},$$

$$\alpha_2 = -\frac{2}{3} + \frac{Z'(0)}{6} - \frac{Z(0)}{9} \log \left(\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}} \right),$$

$$\mathfrak{O}(\lambda, N) = \alpha_3 + \mathfrak{O}_1(\mu) + \mathfrak{O}_2(\mu) + \mathfrak{O}_3(\mu),$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \frac{Z''(0)}{4} + Z(0) \left\{ \alpha_1 + \frac{\pi^2}{12} - \gamma^2 \right\} + \frac{Z(0)}{9} \log^2 \left(\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}} \right) + \\ + \left(\frac{1}{3} - \frac{Z'(0)}{3} \right) \log \left(\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}} \right) + \log \left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_1(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \lambda^{-n} \cdot \Gamma(inb) \Gamma(-inb) Z_n(0),$$

$$\mathcal{E}_2(\mu) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \lambda^{-n} \left(\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}} \right)^{-\frac{2inb}{3}} N^{\frac{inb}{3}} \Gamma(2inb) \zeta(1+2inb) Z_n(inb),$$

$$\mathcal{E}_3(\mu) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 2}}^{+\infty} \lambda^{-n} \left(\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}} \right)^{\frac{2inb}{3}} N^{-\frac{inb}{3}} \Gamma(-2inb) \zeta(1-2inb) Z_n(-inb).$$

Die Funktionen $Z(s)$ und $Z_n(s)$ sind durch Hilfssatz 3 und (35), die Größe b durch Formel (6) erklärt. Die Ausdrücke λ und N wurden in der Einleitung definiert. Ferner ist

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} (s \zeta(s+1))''$$

und γ die EULERSche Konstante.

Literaturverzeichnis.

- [1] G. H. HARDY und S. RAMANUJAN: "Asymptotic formulae in combinatory analysis." Proc. London Math. Soc., ser. 2. Vol. 17, 75—115 (1918). — [2] H. RADEMACHER: "On the partition function $p(n)$." Proc. London Math. Soc., ser. 2. Vol. 43, 241—254 (1937). — [3] H. RADEMACHER: "Additive algebraic number theory." Proc. Internat. Congress of Math., Cambridge, Mass. 1950, Vol. 1, 356—362. — [4] E. HECKE: „Analytische Funktionen und algebraische Zahlen I.“ Abh. Math. Sem. Hamburg 1, 102—126 (1922). — [5] E. LANDAU: „Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.“ Leipzig u. Berlin 1918. — [6] E. HECKE: „Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins.“ Abh. Math. Sem. Hamburg 1, 54—76 (1922).

(Eingegangen am 13. Januar 1953.)

Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von

HANS RICHTER in Freiburg i. Br.

Teil IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 13. Abgrenzung der Teilgebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Um dasjenige Teilgebiet der W.-Theorie, das wir W.-Rechnung nennen wollen, scharf abgrenzen zu können, ist es nützlich, sich an dieser Stelle zunächst einmal klarzulegen, welchen Standpunkt wir mit den bisherigen Teilen unserer Grundlegung¹⁾ erreicht haben. Wir waren davon ausgegangen, daß wir bereits vorwissenschaftlich zwei Ordnungsprinzipien besitzen, die wir „Sicherheit“ des Eintretens eines Versuchsergebnisses (bzw. einer Menge von solchen des gleichen Versuchsschemas) und „physikalische Abgeschlossenheit“ von Versuchen gegenüber der Umwelt (bzw. gegenüber anderen Versuchen) nannten. Unser Axiomensystem war der Ausdruck der Forderungen, die wir an eine Belegung der E/H mit Erwartungskoeffizienten als mathematischen Ausdruck der „Sicherheiten“ stellten, wobei der Ordnungsbegriff der „physikalischen Abgeschlossenheit“ gleichzeitig eine implizite Definition erfuhr.

Es zeigte sich, daß jedes solche Belegungssystem äquivalent ist einem System, das dem üblichen Additions- und Multiplikationssatz genügt. Sofern wir also die beiden genannten Prinzipien in einer (gemäß unseren Belegungsaxiomen) mathematisch präzisierten Gestalt zur Beschreibung der Erfahrungswelt anwenden wollen, können wir dies ohne Einschränkung der Allgemeinheit mit Hilfe einer W.-Belegung der üblichen Art tun. Mehr als diese Strukturaussage ist bisher noch nicht bewiesen. Insbesondere haben wir bei einer solchen Belegung der Erfahrungswelt im gegenwärtigen Stand unserer Untersuchung noch weitgehende Freiheit in der Wahl der numerischen Werte der W.en, da das Eintreten keines rein logisch möglichen Ereignisses durch die Axiome ausgeschlossen wird. Wir haben aber auch vorläufig noch Freiheit in den Setzungen der formalen Koppelung, da wir ja nur axiomatische Forderungen stellten für den Fall, daß formale Koppelung gesetzt ist. Wir können dies auch so ausdrücken, daß wir jetzt zunächst eine unendliche Menge von p -Systemen besitzen, die sich bezüglich der p -Werte und bezüglich der Setzung der formalen Koppelungen unterscheiden. Das Problem der Auffindung der in den praktischen Anwendungen zu benutzenden numerischen p -Werte wird bei dieser Auffassung zur Frage nach den Prinzipien einer Auswahl unter diesen p -Systemen auf Grund durchgeführter Experimente.

Die Untersuchung dieses Problems nennen wir *indirekte W.-Theorie*, die

¹⁾ Math. Ann. 125, S. 129—139, S. 223—234, S. 335—343.

wir in Teil V behandeln werden. Wie wir soeben sahen, gehört ihr Gegenstand nicht zu den Folgerungen, die allein aus dem bisher angegebenen, den W.-Begriff konstituierenden Axiomensystem gezogen werden können und die wir zusammenfassend als *direkte W.-Theorie* bezeichnen. Zu dieser letzteren ist dann außer unseren bisherigen Untersuchungen noch die *W.-Rechnung* im engeren Sinne als Lehre von den Sätzen zu rechnen, die in jedem *p*-System als Folgerungen aus Additions- und Multiplikationssatz gültig sind. Dem üblichen Sprachgebrauche folgend, wollen wir auch die Einführung der bedingten W.en zur W.-Rechnung zählen, obgleich wir wegen der in Teil I gezeigten Schwierigkeiten dieselben nicht formal mathematisch, sondern als Belegungswerte einführen werden, die zu einer Erweiterung des Anwendungsbereiches der W.-Theorie und entsprechender Erweiterung des Axiomensystems gehören. Die sonst vielfach übliche nachträgliche stillschweigende Zuerkennung dieser Bedeutung soll damit vermieden werden. Im übrigen können wir uns weitgehend sehr kurz fassen, da es uns nur darauf ankommt, die Beziehungen zur üblichen W.-Rechnung herzustellen.

§ 14. Unverfälschtheit und Unabhängigkeit.

Die formalen Koppelungen sind die einfachsten Koppelungen zweier Schemata. Sie wurden charakterisiert durch die Eigenschaften:

$$(14.1) \quad p((E_1, \Omega(H_2)) | F(H_1, H_2)) = p(E_1 | H_1)$$

und

$$(14.2) \quad p((E_1, E_2) | F(H_1, H_2)) = p(E_1 | H_1) \cdot p(E_2 | H_2).$$

Die erste dieser beiden Relationen sagte aus, daß die Mitnahme von H_2 bei anschließender Streichung seines Ergebnisses ohne Einfluß auf H_1 ist, während die zweite Relation die W.-Werte in der formalen Koppelung bestimmt. Bei beliebigen realen Koppelungen sind diese beiden Relationen im allgemeinen nicht erfüllt. Es kann jedoch sein, daß sie zufällig gelten. Diese besondere Eigenschaft erfassen wir durch die folgenden beiden Definitionen.

Definition 2: Gilt in der Koppelung K von H_1 mit H_2 die Gleichung $p((E_1, \Omega(H_2)) | K) = p(E_1 | H_1)$ für jedes $E_1 | H_1$, so heißt H_1 in K unverfälscht.

Die Unverfälschtheit bedeutet, daß man — jedenfalls im vorgegebenen W.-System — die Abschlußforderungen von H_1 so fassen kann, daß H_2 gestattet ist, solange man sich nur für H_1 interessiert. Wie man sich an Beispielen leicht überzeugt, ist die Beziehung „unverfälscht“ nicht symmetrisch.

Definition 3: Die Ereignisse $E_1 | H_1$ und $E_2 | H_2$ heißen unabhängig in der Koppelung K von H_1 und H_2 , wenn gilt:

$$p((E_1, E_2) | K) = p(E_1 | H_1) \cdot p(E_2 | H_2).$$

Mit dieser Definition wird der in der physikalischen Abgeschlossenheit mitgedachte Begriff einer absoluten Unabhängigkeit von Versuchen auf einen Unabhängigkeitsbegriff für Ereignisse erweitert. Es darf darauf hingewiesen werden, daß es möglich gewesen wäre, die beiden genannten Definitionen bereits für Systeme von EK auszusprechen, was klarlegt, daß keine Bezugnahme auf die noch nicht definierten bedingten W.en stattfindet.

Selbst im einfachsten Falle, daß H_1 und H_2 außer den trivialen Ereignissen 0 und Ω nur je zwei komplementäre Ereignisse E_v und \bar{E}_v besitzen, kann man sich leicht durch Zahlenbeispiele überzeugen, daß in einer Koppelung K beide H_v unverfälscht sein können, ohne daß Ereignisse unabhängig sind. Andererseits ist auch die Unabhängigkeit einiger Ereignisse durchaus vereinbar damit, daß eines der H_v in der Koppelung verfälscht ist. Dagegen gilt der einfache Zusammenhang:

Ist in der Koppelung K von H_1 mit H_2 das H_1 unverfälscht, sind weiter $E_1 | H_1$ und $E_2 | H_2$ unabhängig, so sind auch $E_1 | H_1$ und $\bar{E}_2 | H_2$ unabhängig.

Sind insbesondere H_1 und H_2 beide unverfälscht, so folgt im genannten Falle die Unabhängigkeit aller Ereignisse bereits aus der Unabhängigkeit eines einzigen (nichttrivialen) Ereignispaars.

Am Ende von § 7 haben wir eine besonders einfache Art von realen Koppelungen kennengelernt: Bei Vorgabe von zwei Vergrößerungen \tilde{H}_1 und \tilde{H}_2 eines H konnte eine geeignete Vergrößerung \tilde{H} von H als reale Koppelung der \tilde{H}_v aufgefaßt werden. In diesem Falle ist natürlich einerseits die Unverfälschtheit der \tilde{H}_v in dem \tilde{H} definitorisch sichergestellt. Andererseits nimmt die Unabhängigkeitsdefinition 3 in diesem Falle eine besonders einfache Gestalt an. Da nämlich hier (E_1, E_2) durch $E_1 E_2$ erklärt wurde, gelangen wir zu

Definition 3a: Die Ereignisse $E_1 | H$ und $E_2 | H$ heißen unabhängig, wenn $p(E_1 E_2 | H) = p(E_1 | H) \cdot p(E_2 | H)$ gilt.

Dies ist die übliche Definition der Unabhängigkeit in denjenigen W.-Theorien, die nur von einem einzigen W.-Feld sprechen; bei uns jedoch ist sie ein Spezialfall.

Da im Falle der Definition 3a mit dem Paar (E_1, E_2) auch die anderen Paare (E_1, \bar{E}_2) , (\bar{E}_1, E_2) und (\bar{E}_1, \bar{E}_2) unabhängig sind, können wir die Unabhängigkeit des Paares (E_1, E_2) auch als eine Unabhängigkeit der durch $E_1 + \bar{E}_1 = \Omega$ und $E_2 + \bar{E}_2 = \Omega$ definierten Vergrößerungen auffassen. Dementsprechend verallgemeinern wir Definition 3a zu

Definition 3b: Die Vergrößerungen \tilde{H}' und \tilde{H}'' von H mit den definierenden Ereignisdisjunktionen $E'_1 + \dots + E'_m = \Omega$ und $E''_1 + \dots + E''_n = \Omega$ heißen unabhängig, wenn $p(E'_\mu E''_\nu) = p(E'_\mu) \cdot p(E''_\nu)$ für alle μ und ν gilt.

Damit werden $m \cdot n$ Forderungen gestellt, die aber nicht unabhängig voneinander sind. Bevor wir uns um die Frage der Anzahl der unabhängigen Bedingungen kümmern, verallgemeinern wir noch Definition 3 auf mehr als zwei Schemata und entsprechend Definition 3a und 3b auf mehr als zwei Ereignisse, bzw. Vergrößerungen im gleichen Versuchsschema.

Definition 4: Die Ereignisse $E_v | H_v$ mit den W.en $p_v = p(E_v | H_v)$ heißen unabhängig in der Koppelung K der Versuche H_v , wenn gilt:

$$p(E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^* | K) = p_1^* \cdot \dots \cdot p_n^*$$

für alle (E_1^*, \dots, E_n^*) , wo $E_v^* = E_v$ mit $p_v^* = p_v$ für mindestens zwei der H_v und $E_v^* = \Omega(H_v)$ mit $p_v^* = 1$ für die übrigen H_v ist.

Es werden also genau $2^n - (n + 1)$ Relationen verlangt.

Definition 5a: Die Ereignisse E_1, \dots, E_n von H mit den W.en p_i heißen unabhängig, wenn $p(E_{i_1} \cdot \dots \cdot E_{i_k}) = \prod_{s=1}^k p_{i_s}$ gilt für jede Kombination aus den E_i zu $k \geq 2$ Elementen.

Die Anzahl der verlangten Relationen ist wieder $2^n - (n + 1)$.

Definition 5b: Die Vergrößerungen $\tilde{H}^{(v)}$ ($v = 1, \dots, n$) von H mit den definierenden Ereignisdisjunktionen $E_{\mu_v}^{(v)}$ ($\mu_v = 1, \dots, m_v$; $m_v \geq 2$) heißen unabhängig, wenn $E_{\mu_1}^{(1)}, E_{\mu_2}^{(2)}, \dots, E_{\mu_n}^{(n)}$ unabhängig sind für jede Wahl der $\mu_v \leq m_v$.

Insbesondere sind in einer formalen Koppelung $F = F(H_1, \dots, H_n)$ die den H_v zugeordneten Vergrößerungen \tilde{H}_v von F sicher unabhängig. Die in Definition 5b verlangten Relationen sind teilweise entbehrlich; genau gilt

Satz 3: Die Vergrößerungen $\tilde{H}^{(v)}$ von Definition 5b sind genau dann unabhängig, wenn $E_{\mu_1}^{(1)}, \dots, E_{\mu_n}^{(n)}$ unabhängig sind für jede Wahl der $\mu_v \leq m_v - 1$. Diese in der Anzahl $A = \prod m_v - \sum m_v + n - 1$ bestehenden Relationen sind algebraisch unabhängig.

Beweis: Die im Satz angegebenen Relationen P_a sind jedenfalls notwendig für die Unabhängigkeit der $\tilde{H}^{(v)}$. Ihre Anzahl A ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, Kombinationen zu 2 bis n Ereignissen aus zueinander fremden Disjunktionen zu bilden. Dies liefert sofort obigen Ausdruck für A .

Die in der Anzahl $B = \prod m_v$ vorhandenen Durchschnitte $E_{\mu_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot E_{\mu_n}^{(n)}$ bilden eine vollständige Disjunktion. Ihre zunächst als komplexe Zahlen angesetzten W.en bezeichnen wir mit y_1, y_2, \dots . Die W.en aller Durchschnitte aus wenigen Ereignissen sind dann gewisse Summen $\sum_{(d)} y_i$ aus den y_i . Insbesondere bezeichnen wir speziell die $p(E_{\mu_v}^{(v)})$ bei $\mu_v \leq \tilde{m}_v = m_v - 1$ mit $\sum_{(v)} y_i$. In den y_i geschrieben haben dann die P_a die Gestalt:

$$\text{I)} \quad \sum_{(d)} y_i = \prod_k \sum_{(a_k)} y_i.$$

Zu diesen Gleichungen schreiben wir noch die Beziehung

$$\text{II)} \quad \sum y_i = 1 \quad \text{bei Summation über alle } y_i.$$

Seien jetzt $\xi_{\mu_v}^{(v)}$ für $\mu_v \leq \tilde{m}_v$ Unbestimmte in der Anzahl $C = \sum_1^n m_v - n$, so fordern wir noch:

$$\text{III)} \quad \sum_{(v)} y_i = p(E_{\mu_v}^{(v)}) = \xi_{\mu_v}^{(v)}.$$

Damit haben wir ein Gleichungssystem von $A + 1 + C = B$ Gleichungen für

die B Unbekannten y_i . Setzen wir $p(E_{\mu_v}^{(v)}) = 1 - \sum_{\mu_v=1}^{\tilde{m}_v} \xi_{\mu_v}^{(v)}$ und bestimmen die y_i

nach dem Produktsatz, so erhalten wir jedenfalls eine Lösung y_1, y_2, \dots unseres Systems, die außerdem noch alle übrigen Unabhängigkeitsrelationen

von Definition 5b befriedigt. Andererseits geht bei Einsetzen der Gleichungen III in die rechten Seiten der Gleichungsgruppe I unser Gesamtsystem in ein lineares Gleichungssystem für die y_i über, dessen rechte Seite ein Vektor mit linear unabhängigen Komponenten ist. Da wir soeben gesehen haben, daß das System lösbar ist, folgt, daß die Gleichungsmatrix nicht singulär ist und es daher auch *nur* die eine angegebene Lösung gibt. Dies zeigt, daß die P_a hinreichend sind und daß das Gesamtsystem algebraisch unabhängig ist. Erst recht sind die P_a also algebraisch unabhängig, womit der Satz bewiesen ist.

Sind speziell alle $m_a = 2$, so wird in Satz 3 das $A = 2^n - (n + 1)$. Dies zeigt, daß auch die in Definition 5a genannten Relationen algebraisch unabhängig sind und damit erst recht die Relationen des allgemeineren Falles von Definition 4. Besonders merken wir an, daß für die Unabhängigkeit von 3 Ereignissen nicht die paarweise Unabhängigkeit genügt, sondern als vierte Relation $p(E_1 E_2 E_3) = p_1 p_2 p_3$ hinzutreten muß.

§ 15. Aleatorische Größen.

Die Einführung der zufälligen (aleatorischen) Größen kann nun wie in der maßtheoretischen Begründung der W.-Rechnung geschehen. Der Unterschied liegt nur darin, daß wir stets sagen müssen, zu welchem Versuchsschema die betreffende Größe gehört, da wir unendlich viele W.-Felder betrachten. Andererseits wird die Frage der Übertragung der aleatorischen Größen bei formalen und realen Koppelungen auftreten. Schließlich müssen wir das BERNOULLISCHE Theorem etwas vorsichtiger formulieren, wenn wir nicht von beliebig oft wiederholbaren Schemata reden wollen.

Definition 6: Es sei H ein Versuchsschema mit den Ergebnissen x_v . Jedem x_v sei eine Zahl $a(x_v)$ zugeordnet. Die Menge aller a heiße A . Ist $a_1 \in A$, so setzen wir $p(a_1 | H) = \sum p(x_v | H)$, wo über alle x_v mit $a(x_v) = a_1$ summiert wird. $a(x_v)$ heißt aleatorische Größe zu H mit der Häufigkeitsfunktion $p(a | H)$.

Fassen wir jeweils die x_v mit gleichen $a(x_v)$ zusammen, so wird durch a eine vollständige Ereignisdisjunktion in \mathfrak{H} und damit eine Vergrößerung \tilde{H} von H definiert. a können wir dann auch als aleatorische Größe zu \tilde{H} auffassen. Umgekehrt ist jede aleatorische Größe zu einer Vergrößerung \tilde{H} gleichzeitig eine solche zu H .

Definition 7: Die aleatorischen Größen a_1, \dots, a_m von H heißen unabhängig, wenn die durch sie definierten Vergrößerungen unabhängig sind gemäß Definition 5b.

Sind H_1 und H_2 Versuchsschemata mit den bzw. Ergebnissen x'_μ und x''_ν , K eine formale oder reale Koppelung, dann ist jeder aleatorischen Größe a zu H_1 eindeutig eine aleatorische Größe b zu K zugeordnet gemäß $b(x'_\mu, x''_\nu) = a(x'_\mu)$. Ist speziell H_1 in K unverfälscht, so hat b die gleiche Häufigkeitsfunktion, und wir wollen b mit a identifizieren. Insbesondere können wir jedes a_1 von H_1 auf formale Koppelungen $F = F(H_1, H_2)$ übertragen. Im letzteren Falle ist jedes a_1 zu H_1 in F unabhängig von jedem a_2 zu H_2 .

Ist endlich $f(a)$ eine beliebige über A definierte Funktion, so ist auch $b = f(a)$ eine aleatorische Größe zu H , die evtl. eine weitere Vergrößerung der durch a definierten Vergrößerung erzeugt.

Definieren wir nun wie üblich den Erwartungswert $E\{a\}$ durch

$$(15.1) \quad E\{a\} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_v a(x_v) \cdot p(x_v | H) = \sum_{a \in A} a \cdot p(a | H),$$

so ist $E\{a\}$ invariant gegen für a zulässige Vergrößerungen und Übertragungen auf Koppelungen, und es gelten die bekannten Regeln

$$(15.2) \quad E\{a_1 + a_2\} = E\{a_1\} + E\{a_2\}$$

$$(15.3) \quad \text{var}(a) \stackrel{\text{Def.}}{=} E\{(a - E\{a\})^2\} = E\{a^2\} - (E\{a\})^2.$$

Weiter ist

$$(15.4) \quad E\{\prod_v f_v(a_v)\} = \prod_v E\{f_v(a_v)\}$$

für alle Funktionen f_v genau dann, wenn die a_v unabhängig sind.

Genau wie üblich folgt nun die TSCHEBYSCHEFFSche Ungleichheit

$$(15.5) \quad p(|a| \geq C) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{|a| \geq C} p(a | H) \leq \frac{E\{a^2\}}{C^2}$$

und hieraus nur in etwas anderer Formulierung das

Theorem von BERNOULLI:

Es seien H_1, H_2, \dots, H_n Versuchsschemata mit existierendem $F = F(H_1, \dots, H_n)$. Jedes H_v enthalte ein $E_v | H_v$ mit $m \leq p_v = p(E_v | H_v) \leq M$. Sei weiter $a_v(E_v) = 1$ und $a_v(\bar{E}_v) = 0$ gesetzt. Zu F bilde man die aleatorische Größe $h = \frac{1}{n} \sum_v a_v$. Dann ist für jedes $\zeta > 0$

$$p(m - \zeta \leq h \leq M + \zeta) \geq 1 - \frac{1}{4n\zeta^2}.$$

h entspricht der relativen Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses bei Versuchswiederholung in der üblichen Formulierung des BERNOULLISchen Theorems:

Ist H beliebig wiederholbar, h_n die relative Häufigkeit eines fest gewählten Ereignisses $E | H$ bei n -maliger Realisierung, so ist bei $p_0 = p(E | H)$:

$$p(|p_0 - h_n| > \zeta) < \frac{1}{4n\zeta^2}$$

für jedes $\zeta > 0$.

§ 16. Bedingte Wahrscheinlichkeiten.

a) Relaisversuche.

Das Ordnungsprinzip der physikalischen Abgeschlossenheit haben wir bis jetzt nur in der Setzung der formalen Koppelung und ihrer impliziten Definition im Rahmen unserer Axiomatik erfaßt. Es gibt aber in den praktischen Anwendungen der W.-Theorie noch eine weitere Klasse von Verbindungen, die sich allerdings von der formalen Koppelung so wenig unterscheiden, daß man in den älteren Theorien sie stillschweigend als solche behandelte.

Gehen wir von den beiden formal koppelbaren Versuchsschemata H_1 und H_2 mit den bzw. Ergebnissen x_v ($v = 1, \dots, n$) und y_μ ($\mu = 1, \dots, m$) aus, so können wir in $F = F(H_1, H_2)$ die zur vollständigen Ereignisdisjunktion

$$(x_1, \Sigma y_\mu) + (x_2, \Sigma y_\mu) + \dots + (x_k, \Sigma y_\mu) + (x_{k+1}, y_1) + \\ + (x_{k+1}, y_2) + \dots + (x_n, y_m) = \Omega(F)$$

gehörige Vergrößerung \tilde{F} bilden. Dieses \tilde{F} werden wir nun als äquivalent ansehen zu dem Versuchsschema G gemäß folgender

Definition 8: Es werde H_1 realisiert. Ist in \hat{H}_1 ein x_v mit $v \leq k$ eingetreten, so gilt x_v als Ergebnis von \hat{G} . Ist dagegen ein x_v mit $v > k$ eingetreten, so wird noch H_2 realisiert, und (x_v, y_μ) gilt als in \hat{G} eingetreten, wenn y_μ bei \hat{H}_2 eingetreten ist. G heißt eine partielle formale Koppelung von H_1 mit H_2 .

Im Gegensatz zur gewöhnlichen oder totalen formalen Koppelung kommt es hier auf die Reihenfolge der H_v an. Wegen der erwähnten Äquivalenz der partiellen formalen Koppelung mit einer geeigneten Vergrößerung der totalen formalen Koppelung werden wir auch hier den Produktsatz axiomatisch fordern. Es ist zu beachten, daß hier eine Setzung vorliegt, die nicht bereits aus den Axiomen folgt, wenn auch diese Setzung fast selbstverständlich ist. Dies gilt auch noch, wenn H_2 gar nicht mehr gegen H_1 abgeschlossen realisierbar ist in den Fällen, wo H_1 eines der x_v mit $v \leq k$ liefert. Auch hier können wir Definition 8 bilden und fordern nun allgemein

Axiom 7: Ist zu H_1 und H_2 mit den bzw. Ergebnissen x_v ($v = 1, \dots, n$) und y_μ ($\mu = 1, \dots, m$) das Schema G eine partielle formale Koppelung mit den Ergebnissen $x_1, \dots, x_k, (x_{k+1}, y_1), \dots, (x_n, y_m)$, so ist $p(x_v | G) = p(x_v | H_1)$ für $v \leq k$ und $p((x_v, y_\mu) | G) = p(x_v | H_1) \cdot p(y_\mu | H_2)$ für $v > k$.

Es darf bemerkt werden, daß wir Axiom 7 als erweiterte Fassung von Axiom 5 bereits bezüglich der EK mit Hilfe der unbekannten Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ hätten aussprechen können, wodurch dann obiges Axiom 7 als Satz für W.-Systeme erschienen wäre. Wie selbstverständlich Axiom 7 ist, erhellt aus der Tatsache, daß es in der W.-Rechnung allgemein angewendet wird, ohne genannt zu werden.

Eine Erweiterung der partiellen formalen Koppelung ist der folgende Typ von Versuchsverbindungen, der in den praktischen Anwendungen laufend vorkommt.

Definition 9: Es sei K ein Versuchsschema mit Ergebnissen x_v ($v = 1, \dots, n$). Die H_v mit den bzw. Ergebnissen y_μ seien Schemata der Eigenschaft: Ist in \hat{K} das x_v eingetreten, so kann H_v physikalisch abgeschlossen gegen \hat{K} realisiert werden. Man bilde nun den Gesamtversuch G mit den Ergebnissen (x_v, y_μ) : Es werde K realisiert; ist x_v eingetreten, so werde H_v gegen \hat{K} abgeschlossen realisiert. Liefert \hat{H}_v das y_μ , so heißt (x_v, y_μ) in \hat{G} eingetreten. G heißt Relaisversuch mit W.-Relais K bezüglich der Varianten H_v .

In diesem Sinne ist der in Teil I diskutierte Münzen-Urnen-Versuch ein Relaisversuch, wo der Münzenwurf das Relais darstellt bezüglich der beiden Urnen als Varianten.

Für Relaisversuche gilt wegen Axiom 7:

$$(16.1) \quad p((x_\nu, y_\mu) | G) = p(x_\nu | K) \cdot p(y_\mu | H),$$

da G durch fortgesetzte formale Koppelung erhalten werden kann. Dies ist auch im Falle des Münzen-Urnen-Versuches gerade die erwartete Lösung. Überhaupt sind in der W.-Rechnung viele Aufgaben, die als solche über bedingte W.en angesehen werden, nur Aufgaben über Relaisversuche und daher logisch von wesentlich einfacherer Struktur.

b) Bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Im Gegensatz zu den soeben behandelten Relaisversuchen bedeutet die Einführung der bedingten W.en (bed. W.) eine wesentliche Neusetzung, die einer Erweiterung des Anwendungsgebietes der W.-Theorie entspricht. Bis jetzt konnten wir die p -Werte wahlweise deuten als Belegung der $E | H$ oder als Belegung der Aussagen, daß bei \hat{H} das E eintreten wird. Dabei handelt es sich um Aussagen, deren Verifizierbarkeit erst in der Zukunft möglich ist: *Aussagen in die Zukunft*. Dieser Charakter liegt auch dann vor, wenn H bereits stattgefunden hat, aber über sein Ergebnis noch nichts bekannt ist außer der für Aussagen in die Zukunft sicheren Aussage bezüglich 0 und $\Omega(H)$: *Aussagen in die Gegenwart* (bzw. Vergangenheit). Diese speziellen Aussagen in die Gegenwart werden wir als gleichwertig mit den entsprechenden Aussagen in die Zukunft ansehen und daher mit den gleichen p -Werten belegen.

Es kann nun aber auch sein, daß von H bereits bekannt ist, daß ein bestimmtes E realisiert wurde, während wir nicht wissen, welches der das E konstituierenden x , eingetreten ist. Diese Situation führt zu einem wesentlich neuen Typ von Aussagen in die Gegenwart:

Wenn in H das E eingetreten ist, so ist das $E' \subset E$ eingetreten.

Solche Aussagen nennen wir *bedingte Aussagen*. Formal können wir ihnen auch ein Versuchsschema $(H; E)$ entsprechen lassen, dessen Ereigniskörper der direkte Summand \mathfrak{H}/\bar{E} von \mathfrak{H} ist: *bedingte Versuchsschemata*. E wird dann zum Eins-Element im Ereigniskörper, so daß $(H; E)$ ein Versuchsschema wäre, bei dessen Realisierung das E sicher auftritt. Solche Schemata sind aber nur als gedankliche Korrelate zu den bedingten Aussagen aufzufassen, da für alle *eigentlichen Versuchsvorschriften* kein nicht bereits logisch sicheres E bei einer Realisierung als sicher eintretend angesehen werden darf.

Da bei $E = \Omega(H)$ die bedingten Aussagen und die bedingten Schemata in die alten übergehen, haben wir eine Erweiterung des Anwendungsfeldes vor uns, in die das bisherige Anwendungsfeld eingebettet ist. Es ergibt sich nun die Frage, wie wir die neuen Aussagen mit p -Werten belegen wollen. Hierfür brauchen wir neue Axiome.

Die Vornahme der Neusetzung wird niedergeschrieben als

Axiom C 1: Jedem Ereignispaar $E' \subset E$ mit $p(E | H) \neq 0$ ist eindeutig eine bedingte Wahrscheinlichkeit $p(E' | H; E)$ zugeordnet.

Den Fall $p(E | H) = 0$ müssen wir ausschließen, da wir in der p -Belegung nicht zwischen Ereignissen, die zufällig im betrachteten System den Wert

Null erhalten haben, und solchen Ereignissen unterschieden haben, die logisch unmöglich sind. Für die letzteren würde aber die Neusetzung eine Belegung für Aussagen mit logisch sich widersprechender Prämisse sein.

Da wir das Versuchsschema H w.-theoretisch durch die $p(x_r | H)$ als beschrieben ansehen, fordern wir weiter

Axiom C 2: $p(E' | H; E)$ ist eine stetige Funktion der $p(x_r | H)$.

Gehen wir von H zu einer Vergrößerung \tilde{H} über, die E' und E enthält, so werden wir fordern, daß der vorgenommene, E' und E ungeändert lassende Verzicht auf Ablesegenauigkeit die bed. W. nicht ändert. Dies liefert

Axiom C 3: Ist $E' \in \tilde{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}$, so ist $p(E' | \tilde{H}; E) = p(E' | H; E)$.

Ist nun $F = F(H_1, H_2)$, so werden wir der Aussage in die Gegenwart, daß in H_2 das E_2 eingetreten ist, den gleichen p -Wert zuerteilen wie der Aussage, daß (E_1, E_2) in F eingetreten ist, wenn wir schon wissen, daß $(E_1, \Omega(H_2))$ in F eintrat. Dies liefert

Axiom C 4: $p((E_1, E_2) | F; (E_1, \Omega(H_2))) = p(E_2 | H_2)$.

Aus diesen Axiomen folgt

Satz 4: Es ist $p(E' | H; E) = \frac{p(E' | H)}{p(E | H)}$.

Beweis: Sei $E' \subset E \in \mathfrak{H}$ mit $p(E | H) \neq 0$ gegeben. Dann bilden wir die Vergrößerung \tilde{H} von H , die zu $E' + \bar{E}' \cdot E + \bar{E} = \Omega(H)$ gehört und die nur die p -Werte $p(E' | \tilde{H}) = p(E' | H)$, $p(\bar{E}' \cdot E | \tilde{H}) = p(E | H) - p(E' | H)$ und $p(\bar{E} | \tilde{H}) = 1 - p(E | H)$ als p -Werte der Ergebnisse enthält. Nach C 2 und C 3 ist also

$$(*) \quad p(E' | H; E) = \chi(p(E' | H), p(E | H))$$

mit stetigem χ . Nach geläufigem Verfahren²⁾ konstruieren wir nun zwei formal koppelbare Schemata H_1 und H_2 mit bzw. Ereignissen E_1 und E_2 , so daß für die $p_r = p(E_r | H_r)$ gilt:

$$|p_1 - p(E | H)| < \delta \text{ und } \left| p_2 - \frac{p(E' | H)}{p(E | H)} \right| < \delta$$

bei vorgegebenen $\delta > 0$. Nach Axiom C 4 liefert dann (*) bei $E' = (E_1, E_2) | F$ und $E = (E_1, \Omega(H_2)) | F$ wegen $p((E_1, E_2) | F) = p_1 p_2$ und $p((E_1, \Omega(H_2)) | F) = p_1$ einfach: $p_2 = \chi(p_1 p_2, p_1)$, woraus wegen der Stetigkeit von χ bei $\delta \rightarrow 0$ folgt:

$$\frac{p(E' | H)}{p(E | H)} = \chi(p(E' | H), p(E | H)) = p(E' | H; E).$$

Aus Satz 4 folgt insbesondere, daß die Relation

$$p(E | H; \Omega(H)) = p(E | H)$$

erfüllt ist, so daß man diese als Axiom nicht besonders fordern muß. Auch Additions- und Multiplikationssatz für bedingte W.en sind nunmehr eine unmittelbare Folge von Satz 4.

²⁾ Vgl. § 10. Math. Ann. 125, 234.

Der angegebene Weg, die bed. W.en einzuführen, ist natürlich nicht der einzig mögliche. Die übliche Methode, Satz 4 als Definition zu verwenden, hat jedoch den Nachteil, daß man das Zwangsläufige dieser Setzung für die Belegung des neuen Aussagentyps nicht einsieht. Auch der Weg, Axiom C 4 durch die Forderung der Additionseigenschaft zu ersetzen, erscheint nunmehr als unnötig stark.

Von der physikalischen Anschauung aus liegt noch der folgende Weg der Einführung der bedingten W.en nahe: Bei vorgegebenem $E|H$ betrachtet man $E|H$ als Mißlingen des Versuches H und konstruiert nun einen Idealversuch $(H; E)$, für den das Mißlingen \bar{E} ausgeschlossen ist, durch die Vorschrift, H solange zu wiederholen, bis einmal E eintritt, und sieht das Ergebnis dann als Ergebnis von $(H; E)$ an. Wie man leicht nachrechnet, sind dann die obigen $p(x_r|H; E)$ für die $x_r \in E$ tatsächlich die p -Werte dieses Idealversuches $(H; E)$. Für die axiomatische Einführung hat man aber die Schwierigkeit, erstens auf beliebig wiederholbare Versuche angewiesen zu sein und zweitens Versuchstypen einzuführen, für die das Zeitintervall der Realisierung nicht beschränkt ist. Nachdem wir jedoch bereits die bed. W.en wie oben eingeführt haben, sehen wir umgekehrt, daß die geschilderte physikalische Anschauung im Rahmen des bisherigen erweiterten Anwendungsgebietes erlaubt ist.

§ 17. Rückschlußwahrscheinlichkeiten.

Das Problem der Rückschlußwahrscheinlichkeiten (R.-W.) erhebt sich durch die

BAYESSche Fragestellung: Gegeben sei für den Relaisversuch G das W.-Relais K mit den Ergebnissen x_v ($v = 1, \dots, n$) sowie die Varianten H_μ mit den Ergebnissen $y_{v\mu}$ ($\mu = 1, \dots, m$). Welches ist die W., daß x_v eintrat, wenn man weiß, daß $y_\mu = \sum_v (x_v, y_{v\mu})$ eingetreten ist?

Nach Satz 4 ist die Antwort sofort anzugeben: Es handelt sich um $p(x_v|G; y_\mu)$, und daher ist

$$p(x_v|G; y_\mu) = \frac{p(x_v, y_{v\mu}|G)}{\sum_v p(x_v, y_{v\mu}|G)}$$

und wegen (16.1) schließlich

$$(17.1) \quad p(x_v|G; y_\mu) = \frac{p(x_v|K) \cdot p(y_{v\mu}|H_v)}{\sum_v p(x_v|K) \cdot p(y_{v\mu}|H_v)}.$$

Diese BAYESSche Formel gilt als Lösung eigentlich nur unter der Voraussetzung, daß nur zunächst noch nicht bekannt ist, zu welchem H_v das gefundene $y_{v\mu}$ gehört, daß aber die mit $p(x_v|G; y_\mu)$ belegte Aussage als in der Zukunft verifizierbar oder falsifizierbar angesehen wird. Diese Voraussetzung ist aber in den meisten Fällen, wo (17.1) angewendet werden soll, gar nicht gegeben. Im Gegenteil wird meist gerade vorausgesetzt, daß prinzipiell nicht mehr entscheidbar sein soll, welches v das gefundene y_μ als Index trägt. Da aber die Verifizierbarkeit gar nicht in die Axiomatik einging, können wir nun auch

derartige Aussagen zulassen, die wir *Aussagen in die Vergangenheit* oder *R.-W.en* nennen und ohne Gefahr eines Widerspruchs mit denselben p -Werten gemäß (17.1) belegen, als wenn es gewöhnliche bed. W.en wären.

Eine andere Frage ist es, ob wir die Erweiterung des Anwendungsfeldes auf Aussagen, auf deren Verifizierbarkeit verzichtet wird, als sinnhaft ansprechen dürfen. Diese Frage ist jedenfalls dann bejahend zu beantworten, wenn wir zeigen können, daß die in (17.1) angegebenen p -Werte an die Stelle der alten $p(x_r | K)$ treten in den Fällen, wo über andere vom Relais K abhängige Größen z_r eine verifizierbare Aussage belegt werden soll unter der Bedingung, daß y_μ eintrat. Um dies zu prüfen, haben wir die BAYESSche Fragestellung so zu verallgemeinern, daß H_r die Ergebnisse $(y_{r\mu}, z_{r\tau})$ mit $\tau = 1, \dots, t$ besitzt und bei $z_r = \sum_{\nu} z_{r\nu}$ nach der bed. W. $p(z_r | G; y_\mu)$ gefragt wird. Hierfür ergibt sich aber sofort:

$$p(z_r | G; y_\mu) = \frac{\sum_{\nu} p(x_r | K) \cdot p(y_{r\mu}, z_{r\tau} | H_r)}{\sum_{\nu} p(x_r, y_{r\mu} | G)}$$

oder mit Hilfe von (17.1)

$$(17.2) \quad p(z_r | G; y_\mu) = \sum_{\nu} p(x_r | G; y_\mu) \cdot p(z_{r\tau} | H_r; y_{r\mu}).$$

Dies zeigt in der Tat, daß wir nach Kenntnis von y_μ „so tun müssen, als ob“ das Relais K nunmehr die „verbesserten“ p -Werte (17.1) erhalten hätte. Gleichzeitig sind jedoch die Varianten H_r durch ihre bedingten Schemata $(H_r; y_{r\mu})$ zu ersetzen; nur im Falle der Unabhängigkeit der Größen y und z in allen H_r werden in (17.2) die bed. W.en $p(z_{r\tau} | H_r; y_{r\mu})$ numerisch gleich den gewöhnlichen W.en $p(z_{r\tau} | H_r)$.

Gerade im letzteren Falle liegt es sehr nahe, bereits jetzt die BAYESSche Formel (17.1) umzudeuten als Vorschrift zur Verbesserung der numerischen Werte der $p(x_r | K)$. Demgegenüber wollen wir festhalten, daß (17.1) und (17.2) streng gültige Sätze der W.-Rechnung eines jeden p -Systems sind und von uns auch nur innerhalb eines als fest vorgegeben gedachten p -Systems bewiesen wurden, in welchem die $p(x_r | K)$ ihre Werte behalten und (17.1) nur R.-W.en liefert, die gar nicht als W.en eines eigentlichen Versuchsschemas gedeutet werden können. Für eine Interpretation, die über dieses p -System hinausführt, fehlt uns also vorläufig eine ausreichende Begründung.

§ 18. Klasseneinteilung der p -Systeme.

Die in § 13 eingeführte Menge aller p -Systeme wollen wir jetzt in Klassen einteilen, wobei zunächst einmal alle p -Systeme zur gleichen Klasse gehören sollen, die in den Satzungen der formalen Koppelung übereinstimmen. Die weiteren Ausführungen dieses Paragraphen sind stillschweigend innerhalb einer solchen Klasse gemeint. Zunächst gilt

Lemma 3: Es seien $E_r | H_r$ ($r = 1, \dots, n$) gegeben mit existierendem $F(H_1, \dots, H_n)$. p' und p'' seien zwei p -Systeme mit

$$p'(E_r | H_r) \leq a < b \leq p''(E_r | H_r).$$

Dann gibt es ein $E | H$ so, daß $p'(E | H) - p''(E | H) > 1 - \frac{2}{n(b-a)^2}$ ist.

Beweis: Sei h definiert wie im BERNOULLISCHEN Theorem und $E | H$ das Ereignis $0 \leq h \leq \frac{a+b}{2}$ von F . Die Anwendung des BERNOULLISCHEN Theorems mit $\zeta = \frac{b-a}{2}$ liefert im p' -System bei $m = 0$ und $M = a$: $p'(E | H) \geq 1 - \frac{1}{n(b-a)^2}$.

Dagegen haben wir im p'' -System bei $m = b$ und $M = 1$: $p''(E | H) < \frac{1}{n(b-a)^2}$, woraus die Behauptung folgt.

Aus diesem Lemma ergibt sich das

Corollar: Ist H ein beliebig wiederholbarer Versuch mit Ereignis $E | H$ so, daß $p'(E | H) \neq p''(E | H)$ ist, so gibt es eine Folge $E_\mu^ | H_\mu^*$ von Ereignissen mit der Eigenschaft:*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} p'(E_\mu^* | H_\mu^*) = 1 \text{ und } \lim_{\mu \rightarrow \infty} p''(E_\mu^* | H_\mu^*) = 0.$$

Allgemeiner treten solche Folgen $E_\mu^* | H_\mu^*$ immer dann auf, wenn die Voraussetzungen von Lemma 3 mit unendlich vielen $E_\nu | H_\nu$ gegeben sind. Sobald man also zu jeder p -Bewertung noch die Anweisung hinzunimmt, Ereignisse mit p -Werten sehr nahe bei Eins als praktisch sicher eintretend anzusehen (sog. COURNOTSches Prinzip), so würden zwei solche p -Systeme in manchen Fällen zu gegensätzlichen praktischen Folgerungen führen. Diese Möglichkeit ist im Rahmen unserer bisherigen Axiomatik nicht auszuschließen, sondern führt zunächst nur zu einer Verfeinerung der Klasseneinteilung gemäß

Definition 10: Zwei Systeme p' und p'' heißen vom gleichen Cournot-Typ, wenn es keine Folge $E_\mu^ | H_\mu^*$ von Ereignissen gibt mit*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} p'(E_\mu^* | H_\mu^*) = 1 \text{ und } \lim_{\mu \rightarrow \infty} p''(E_\mu^* | H_\mu^*) = 0.$$

Die Symmetrieeigenschaft dieser Vorschrift zur Klassenbildung ergibt sich aus dem Übergang von $E_\mu^* | H_\mu^*$ zu $\bar{E}_\mu^* | \bar{H}_\mu^*$.

Aus Lemma 3 folgt nun unmittelbar:

Satz 5: Sind p' und p'' vom gleichen Cournot-Typ und ist $E_\nu | H_\nu$ eine unendliche Menge von Ereignissen aus formal koppelbaren Versuchen mit $a \leq p'(E_\nu | H_\nu) \leq b$, so ist $\liminf p''(E_\nu | H_\nu) \geq a$ und $\limsup p''(E_\nu | H_\nu) \leq b$.

Insbesondere stimmen in p -Systemen vom gleichen Cournot-Typ die p -Werte der Ereignisse überein, die zu beliebig wiederholbaren Versuchen gehören.

Setzen wir in Satz 5 speziell $a = 0$ und $b < 1/2$, so daß alle $E_\nu | H_\nu$ im p' -System „unsicherer“ als ihr Komplement sind, so haben fast alle $E_\nu | H_\nu$ diese Eigenschaft auch im p'' -System. Die Verschärfung dieser Eigenschaft nehmen wir nun als Grundlage einer noch engeren Klasseneinteilung gemäß

Definition 11: Zwei Systeme p' und p'' heißen gleichsinnig, wenn aus $p'(E | H) \leq 1/2$ folgt $p''(E | H) \leq 1/2$.

Zunächst überzeugen wir uns von der Symmetrie dieser Vorschrift der Klasseneinteilung. Da beim Übergang zum Komplement sofort die entsprechende Relation mit \geq folgt, ist hierzu nur zu zeigen, daß bei $p'(E | H) < 1/2$

ebenfalls $p''(E|H) < \frac{1}{2}$ gelten muß. Sei nun $E_0|H_0$ gegeben mit $p' = p'(E_0|H_0) < \frac{1}{2}$, so konstruieren wir in bekannter Weise ein mit H_0 formal koppelbares H , für dessen Ergebnisse y_r gilt: $\xi'_r = p'(y_r|H) < \frac{1-p'}{1-p}$. Die $p''(y_r|H)$ können nicht alle verschwinden; sei also $p''(y_1|H) = \xi'_1 \neq 0$. In $F = F(H_0, H)$ gilt dann: $p'(E_0 + \bar{E}_0 y_1|F) = p' + (1-p')\xi'_1 < \frac{1}{2}$. Nach Definition 11 haben wir damit, da jedenfalls $p''(\bar{E}_0|H_0) \geq \frac{1}{2}$ ist:

$$\frac{1}{2} \geq p''(E_0 + \bar{E}_0 y_1|F) \geq p''(E_0|H_0) + \frac{1}{2}\xi'_1 > p''(E_0|H_0);$$

also $p''(E_0|H_0) < \frac{1}{2}$.

Es sieht zunächst so aus, als ob die mit Definition 11 eingeführte Einteilung nur eine geringe Verschärfung gegenüber der von Definition 10 sei. Es gilt aber

Satz 6: Sind die Systeme p' und p'' gleichsinnig, so sind sie gleich.

Beweis: Es sei $\xi = p'(E_0|H_0)$ und $\eta = p''(E_0|H_0)$. Gegebenenfalls nach Übergang zu \bar{E}_0 können wir annehmen, daß $\xi \geq \frac{1}{2}$ ist. Es ist dann auch $\eta \geq \frac{1}{2}$. Es sei nun $\xi \neq \eta$, also etwa $\frac{1}{2} \leq \xi < \eta$; dann konstruieren wir wieder in bekannter Weise mit Hilfe von Axiom 6 eine Folge von Ereignissen $E_r|H_r$ mit den Eigenschaften: $F(H_0, H_1, \dots, H_n)$ existiert für jedes n ; $\lim_{r \rightarrow \infty} p'(E_r|H_r) = \frac{1}{\xi + \eta} < 1$. Da die beiden Systeme bei Gleichsinnigkeit erst recht vom gleichen Cournot-Typ sind, muß wegen Satz 5 auch $\lim_{r \rightarrow \infty} p''(E_r|H_r) = \frac{1}{\xi + \eta}$ sein. Es ist dann

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p'((E_0, E_r)|F(H_0, H_r)) = \frac{\xi}{\xi + \eta} < \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p''((E_0, E_r)|F(H_0, H_r)) = \frac{\eta}{\xi + \eta} > \frac{1}{2},$$

so daß sich für genügend großes r ein Widerspruch zur Gleichsinnigkeit ergibt.

Satz 6 kann man etwa wie folgt eine philosophische Wendung geben: Wenn es in der Natur objektiv festliegt, ob ein Ereignis sicherer eintritt als sein Komplement oder nicht, so gibt es nur ein p -System, das diese Eigenschaft durch die entsprechende Ungleichheit richtig beschreibt. Damit ist das objektivistische Postulat von der Existenz eines absoluten Systems²⁾ auf ein einfacheres Postulat zurückgeführt, über dessen Legitimität wir jedoch zunächst nichts weiter aussagen können.

²⁾ Vgl. Teil I, § 2, S. 121, unten.

Bemerkung über eine Relation in freien Gruppen.

Von
HELMUT SCHIEK in Bonn.

Der kleinste Normalteiler \mathfrak{N} einer Gruppe, der ein Element T enthält, kann dadurch charakterisiert werden, daß sich jedes Element von \mathfrak{N} schreiben läßt als Produkt von Transformaten von $T^{\pm 1}$. Herr KRULL¹⁾ äußerte nun die Vermutung, daß in einer freien Gruppe, in der T ein Wort bedeutet, ein solches Transformatenprodukt nur dann äquivalent e sein könne, wenn die zu T gehörige Exponentensumme 0 ist. Da in der Literatur kein Beweis dieses Satzes gefunden werden konnte, soll hier eine kurze Ableitung gegeben werden.

Satz: Seien S_1, S_2, \dots, S_n beliebige Worte, sei T ein Wort, das nichtäquivalent e ist, und sei $R = \prod_{i=1}^n S_i T^{\varepsilon_i} S_i^{-1}$ eine Relation in der freien Gruppe,

dann gilt: $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$.

Beweis: Zunächst ist anzumerken, daß bei gegebenem R die Aufteilung in Faktoren nicht eindeutig zu sein braucht (z. B. bei $S_j = T A$); wir verabreden eine solche Aufteilung, daß sich für n eine maximale Zählung ergibt — hierbei ändert sich $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ nicht. Indem wir eventuell zum Kern übergehen, wollen wir verabreden, daß T Kurzwort ist, also nicht die Form besitzt: $a X a^{-1}$. Durch $S T^{\varepsilon} S^{-1} = (S T S^{-1})^{\varepsilon}$ formen wir zunächst R um in ein äquivalentes Wort, bei dem für T nur die Exponenten ± 1 auftreten; auch hierbei ändert sich die Exponentensumme nicht. Wir setzen also voraus $\varepsilon_i = \pm 1$.

Da T Kurzwort ist, ist es nicht möglich, daß der letzte Buchstabe von S_i das Inverse des ersten Buchstabens ist von T^{ε_i} und gleichzeitig der letzte Buchstabe von T^{ε_i} das Inverse des ersten Buchstabens von S_i^{-1} . Es kann höchstens eine dieser Möglichkeiten auftreten. Sei etwa $S_i = S'_i X_i$ und X_i der maximale hintere Abschnitt von S_i , so daß X_i^{-1} vorderer Abschnitt ist von T . So ist $X_i T X_i^{-1}$ äquivalent einem Wort T'_i , das durch zyklische Vertauschung der Buchstaben von T entsteht, also auch nicht das Leerwort ist, da ja T nichtäquivalent e angenommen wurde. $S'_i T'_i S_i'^{-1}$ ist dann reduziert und nicht leer. Analog verfahren wir, wenn der letzte Buchstabe von T^{ε_i} invers ist zum ersten Buchstaben von S_i^{-1} .

In dem zu R äquivalenten Wort $R' = \prod_{i=1}^n S'_i T'^{\varepsilon_i} S_i'^{-1}$ suchen wir nun den

¹⁾ Vgl. die unmittelbar folgende Arbeit.
Mathematische Annalen. 126.

minimalen vorderen Abschnitt V' , der äquivalent e ist. Es ist unmittelbar klar, daß V' die Form haben muß: $A A^{-1}$. Da die Transformierten in R' bereits reduziert sind, ist der letzte Buchstabe von A letzter Buchstabe eines der Transformierten $S'_i T_i^{\varepsilon_i} S_i'^{-1}$, und der erste Buchstabe von A^{-1} ist erster Buchstabe von $S'_{i+1} T_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} S_{i+1}'^{-1}$. Das bedeutet aber, daß $V' = A A^{-1}$ die Form besitzt:

$$V' = \prod_{i=1}^{2m} S'_i T_i^{\varepsilon_i} S_i'^{-1}, \quad 0 < 2m \leq n,$$

mit $\sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i = 0$. Folglich besitzt der zu V' gehörige vordere Abschnitt V von R die Form:

$$V = \prod_{i=1}^{2m} S_i T_i^{\varepsilon_i} S_i^{-1}, \quad 0 < 2m \leq n \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i = 0.$$

Da $S T S^{-1}$ nur dann äquivalent e sein kann, wenn T äquivalent e ist, so ist nach dem obigen der Satz bewiesen durch vollständige Induktion nach n .

(Eingegangen am 10. Februar 1953.)

Über gewisse Homomorphismen von Polynomgruppen.

Von

WOLFGANG KRULL in Bonn.

Im folgenden soll ein von Herrn SCHUFF in dieser Zeitschrift für „Gruppenpolynome“ bewiesener Satz unter Benutzung eines von Herrn SCHIEK gewonnenen Resultats wesentlich verallgemeinert werden¹⁾. — Es sei \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{F}_n bzw. \mathfrak{A}_n eine beliebige Gruppe bzw. die freie Gruppe mit den Erzeugenden x_1, \dots, x_n bzw. die freie ABELSche Gruppe mit den Erzeugenden Y_1, \dots, Y_n . Mit e bzw. e_f bzw. e_a bezeichnen wir das Einheitsselement von \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{F}_n bzw. \mathfrak{A}_n , mit a bzw. $\pi(x)$ bzw. $\pi(y)$ ein beliebiges Element aus \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{F}_n bzw. \mathfrak{A}_n . Unter $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_n$ bzw. $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}_n$ verstehen wir die Gruppe aller Paare $(a, \pi(x))$ bzw. $(a, \pi(y))$ mit der Multiplikationsregel

$$(a_1, \pi_1(x)) \cdot (a_2, \pi_2(x)) = (a_1 a_2, \pi_1(x) \cdot \pi_2(x)) \text{ bzw.}$$

$$(a_1, \pi_1(y)) \cdot (a_2, \pi_2(y)) = (a_1 \cdot a_2, \pi_1(y) \cdot \pi_2(y));$$

(\mathfrak{G}, e_f) bzw. (\mathfrak{G}, e_a) sei die zu \mathfrak{G} isomorphe Untergruppe aller (a, e_f) bzw. (a, e_a) aus $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_n$ bzw. $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}_n$. Schließlich sei $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ das (unter Identifizierung von e und e_f gebildete) *freie Produkt* von \mathfrak{G} und \mathfrak{F}_n , also die *Polynomgruppe* in x_1, \dots, x_n über \mathfrak{G} im Sinne von SCHUFF²⁾. — Jedes $F(x)$ aus $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ besitzt (unendlich viele) Darstellungen der Form $F(x) = a_1 \pi_1(x) \dots a_n \pi_n(x) a_{n+1}$, wobei $a = a_1 \dots a_{n+1}$ bzw. $\pi(x) = \pi_1(x) \dots \pi_n(x)$ durch $F(x)$ allein eindeutig bestimmt ist. Die Zuordnung $F(x) \rightarrow (a, \pi(x))$ definiert den *kanonischen Homomorphismus* H_x von $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ auf $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_n$, bei dem insbesondere \mathfrak{G} in die isomorphe Gruppe (\mathfrak{G}, e_f) übergeht. Ent-

¹⁾ Das Resultat von Herrn SCHIEK ist in der dieser Note unmittelbar vorangehenden Arbeit abgeleitet. Im übrigen vgl.: H. K. SCHUFF: Über Wurzeln von Gruppenpolynomen, diese Zeitschrift 124 (1952), S. 294—297. In der Terminologie schließe ich mich nicht an Herrn SCHUFF, sondern an die geläufige Sprache der Gruppentheorie an. Außerdem benutze ich zur Wurzeldefinition im Gegensatz zu SCHUFF nicht den Begriff der Spezialisierung, sondern den des Homomorphismus, was natürlich praktisch auf das gleiche herauskommt.

²⁾ Zu den Begriffen „freie Gruppe“ und „freies Produkt“ vgl. z. B.: W. MAGNUS: Allgemeine Gruppentheorie, Enzyklopädie d. Math. Wiss. I 1,9 (2. Aufl., 1939); Nr. 14 und 15. Es sei daran erinnert, daß man die freie Gruppe und das freie Produkt folgendermaßen charakterisieren kann: \mathfrak{F}_n ist die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) kleinste Gruppe derart, daß jede Gruppe mit höchstens n Erzeugenden homomorphes Bild von \mathfrak{F}_n ist. Das freie Produkt der Gruppen \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ist die kleinste Gruppe \mathfrak{H} mit der Eigenschaft, daß \mathfrak{H} homomorphes Bild von \mathfrak{H} sein muß, wenn \mathfrak{H} die kleinste gemeinschaftliche Obergruppe zweier Untergruppen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ darstellt, die ihrerseits homomorphe Bilder von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 sind. — Ferner sei darauf hingewiesen, daß man $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_n$ als das *direkte Produkt* von \mathfrak{G} und \mathfrak{F}_n bezeichnen könnte. (Genau genommen ist $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_n$ direktes Produkt von (\mathfrak{G}, e_f) und (e, \mathfrak{F}_n)).

sprechend erhalten wir den kanonischen Homomorphismus $H_{x,y}$ von $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ auf $\mathfrak{G} x \mathfrak{A}_n$, wenn wir einem beliebigen Element $f(x) = (a, x_{\mu_1}^{e_1} \dots x_{\mu_N}^{e_N})$ ($e_i = \pm 1$) aus $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ jeweils das Element $f(y) = (a, \pi(y)) = (a, y_{\mu_1}^{e_1} \dots y_{\mu_N}^{e_N})$ aus $\mathfrak{G} x \mathfrak{A}_n$ zuordnen²⁾. Schließlich wird der kanonische Homomorphismus H_y von $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ auf $\mathfrak{G} x \mathfrak{A}_n$ durch die Hintereinanderausführung von H_x und H_y gewonnen.

Im Anschluß an die SCHUFFSche Arbeit, wo allerdings nur $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ betrachtet wurde, definieren wir jetzt: $F(x) \in \mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ bzw. $f(x) \in \mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ bzw. $f(x) \in \mathfrak{G} x \mathfrak{A}_n$ besitzt eine Wurzel, wenn ein Homomorphismus θ existiert, bei dem zwar $F(x)$ bzw. $f(x)$ bzw. $f(y)$, aber kein a bzw. (a, e_f) bzw. (a, e_a) mit $a \neq e$ dem Einheitsselement der Bildgruppe zugeordnet wird. — Aus dieser Definition folgt unmittelbar: $F(x)$ bzw. $f(x)$ bzw. $f(y)$ besitzt dann und nur dann eine Wurzel, wenn die kleinste, $F(x)$ bzw. $f(x)$ bzw. $f(y)$ enthaltende, invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ bzw. $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ bzw. $\mathfrak{G} x \mathfrak{A}_n$ mit \mathfrak{G} bzw. (\mathfrak{G}, e_f) bzw. (\mathfrak{G}, e_a) nur das Einheitsselement gemein hat. Ist $f(x)$ bzw. $f(y)$ das Bild von $F(x)$ hinsichtlich H_x bzw. H_y , so besitzt sicher $F(x)$ eine Wurzel, falls $f(x)$ oder $f(y)$ eine Wurzel hat.

Satz 1. $f(x) = (a, \pi(x))$ ($\pi(x) \neq e_f$) hat dann und nur dann eine Wurzel, wenn a dem Zentrum \mathfrak{Z} von \mathfrak{G} angehört.

a) Es sei b beliebig aus \mathfrak{G} . Dann enthält eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ mit $(a, \pi(x))$ stets auch $(b^{-1} a^{-1} b, e_f^{-1} \pi(x)^{-1} e_f) \cdot (a, \pi(x)) = (b^{-1} a^{-1} b a, e_f)$. Soll nun $(a, \pi(x))$ eine Wurzel haben, so muß immer $e = b^{-1} a^{-1} b a$, $b a = a b$ werden. Wir haben also $a \in \mathfrak{Z}$, d. h. die Bedingung von Satz 1 ist notwendig.

b) Liegt $a = G$ in \mathfrak{Z} , so besteht, wie mühelos zu sehen, die kleinste $(G, \pi(x))$ enthaltende invariante Untergruppe von $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ aus allen Elementen der Form:

$$(1) \quad (G^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N}, \prod_{k=1}^N \pi_k(x)^{-1} \pi(x)^{\varepsilon_k} \pi_k(x)) \quad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

Soll in einem solchen Elemente die zweite Komponente gleich e_f werden, so muß, wie SCHIEK gezeigt hat³⁾, stets $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N = 0$ sein, d. h. das betreffende Element muß das Einheitsselement aus $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ darstellen. Unsere Bedingung $a = G \in \mathfrak{Z}$ ist also auch hinreichend.

Da sicher $\pi(x) \neq e_f$ sein muß, wenn $(a, \pi(x)) \neq (e, e_f)$ eine Wurzel haben soll, ist durch Satz 1 das Wurzelexistenzproblem für $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ gelöst. — Wie unmittelbar zu sehen, gilt Satz 1 ohne weitere Änderung des Wortlauts auch dann, wenn wir $\mathfrak{G} x \mathfrak{F}_n$ durch $\mathfrak{G} x \mathfrak{A}_n$, $f(x) = (a, \pi(x))$ durch $f(y) = (a, \pi(y))$ ersetzen. Der Beweis von b) wird in diesem Falle trivial, da an Stelle von (1)

$$(2) \quad (G^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N}, \pi(y)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N}) \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

²⁾ Beachte, daß jedes $\pi(x)$ in der Form $x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{\mu_N}^{\varepsilon_N}$ darstellbar ist.

³⁾ Vgl. die in ¹⁾ zitierte Arbeit von SCHIEK.

tritt und es unmittelbar klar ist, daß aus $\pi(y)^e = e_a$, $\pi(y) \neq e_a$ stets $a = 0$ folgt. — Aus Satz 1 ergibt sich unmittelbar:

Satz 2. $F(x) \in \mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ hat sicher eine Wurzel, wenn bei dem homomorphen Bild $(a, \pi(x))$ von $F(x)$ hinsichtlich H_x das Element a in \mathfrak{G} liegt und $\pi(x) \neq e_f$ ist.

Um aus Satz 2 das Kriterium von SCHUFF herzuleiten, führen wir noch den Bewertungsbegriff ein. Unter einer (diskreten) *Bewertung* B der beliebigen Gruppe \mathfrak{H} versteht man einen Homomorphismus von \mathfrak{H} auf die additive Gruppe der ganzen Zahlen; ist m das Bild von $a \in \mathfrak{H}$ bei B , so schreiben wir: $W(a) = m$. Jedes Element $\pi(y) \in \mathfrak{A}_n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung $\pi(y) = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$ ($m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Durch die Festsetzung $w_e((a, y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n})) = m_e$ erhalten wir eine Bewertung $B_{y,e}$ von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}_n$ ($e = 1, \dots, n$). Durch Hintereinanderausführung der Homomorphismen H_y und $B_{y,e}$ bzw. $H_{x,y}$ und $B_{y,e}$ entsteht eine Bewertung B_e bzw. $B_{y,e}$ von $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ bzw. $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_n$. Stellt man (was auf unendlich viele Weisen möglich ist), $F(x) \in \mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ in der Form $F(x) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M$ dar, wobei α_i jeweils ein a_i oder eines der $2n$ Elemente $x_e^{\pm 1}$ aus \mathfrak{F}_n bedeutet, so gilt offenbar: Es wird $W_e(F(x)) = a_e - b_e$, falls x_e bzw. x_e^{-1} unter den α_i etwa a_e -mal bzw. b_e -mal vorkommt; $w_e(F(x)) \neq 0$ besagt also soviel wie $a_e - b_e \neq 0$. Unter Berücksichtigung dieser Bemerkung kann man das SCHUFFsche Kriterium in der Terminologie der Bewertungstheorie so formulieren:

Satz 3: $F(x) \in \mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ hat sicher eine Wurzel, wenn bei dem homomorphen Bild $(a, \pi(y))$ von $F(x)$ hinsichtlich H_y das Element $a = G$ zum Zentrum von \mathfrak{G} gehört und wenn außerdem $w_e(F(x)) \neq 0$ ist für mindestens ein q .

In der Tat, ist $w_e(F(x)) \neq 0$, so ist auch $w_e(a, \pi(y)) \neq 0$ und damit $\pi(y) \neq e_a$. Wir haben somit erst recht $\pi(x) \neq e_f$, falls $(a, \pi(x))$ das homomorphe Bild von $F(x)$ hinsichtlich H_x bedeutet, und können Satz 2 anwenden. Das SCHUFFsche Kriterium entsteht also aus Satz 2 durch Spezialisierung. Nur für $n = 1$ sind Satz 2 und Satz 3 gleichwertig. Für $n \geq 2$ hat z. B. jedes Element $F(x) = x_1^{-1} a_1 x_2^{-1} a_2 x_1 a_3 x_2$ mit $a_1 a_2 a_3 \in \mathfrak{G}$ nach Satz 2 eine Wurzel, während sich Satz 3 auf $F(x)$ nicht anwenden läßt. Über Satz 2 hinaus führt das von B. H. NEUMANN⁵⁾ bewiesene Theorem, daß jedes Polynom der Form $a x^n$ eine Wurzel besitzt (auch für $a \in \mathfrak{G}$). Will man das Problem der Wurzelexistenz in $\mathfrak{G}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ allgemein angreifen, so liegt es nach unseren Resultaten nahe, zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Das Element $F(x)$ wird durch den Homomorphismus H_x auf ein Element der Form (a, e_f) abgebildet. Hier sieht man sofort, daß z. B. kein Element der Form

$$(3) \quad F(x) = \pi_1(x)^{-1} a_1^{-1} \dots a_r^{-1} \pi_{r+1}(x)^{-1} a \pi_{r+1}(x) a_r \dots a_1 \pi_1(x) \quad (a \neq e)$$

eine Wurzel besitzt. Gilt also in diesem Falle überhaupt ein allgemeiner Satz, so kann er nur besagen, daß nie eine Wurzel existiert⁶⁾.

⁵⁾ Adjunction of elements to groups, J. London Math. Soc. 18, 4—11.

⁶⁾ Persönlich möchte ich eher annehmen, daß es auch im Falle a) Elemente mit Wurzeln gibt.

b) Bei dem homomorphen Bild $(a, \pi(x))$ ist $\pi(x) \neq e_f$. Hier hat man Satz 2 zur Verfügung, und im übrigen gilt nach dem Beweise von Satz 1 b) bzw. nach dem von H. SCHIEK gewonnenen Resultat allgemein:

Satz 4. Ist $\pi(x) \neq e_f$ bei dem H_x -Bild $(a, \pi(x))$ von $F(x)$ und ist $G(x) = a$ ein zu \mathfrak{G} gehöriges Element aus der kleinsten $F(x)$ enthaltenden, in $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ invarianten Gruppe, so muß $G(x)$ die folgende Gestalt besitzen:

$$(4) \quad G(x) = \prod_{k=1}^N F_k(x)^{-1} F(x)^{\varepsilon_k} F_k(x) \quad (\varepsilon_k = \pm 1; \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N = 0).$$

(Man beachte die Definition von H_x und die Tatsache, daß $G(x) = a$ soviel besagt wie die Gültigkeit von $\pi(x) = e_f$ bei dem H_x -Bild $(a, \pi(x))$ von $G(x)$. — Vielleicht kann man Satz 4 als Ausgangspunkt wählen zum Beweis der Vermutung, daß $F(x)$ im Falle b) stets eine Nullstelle besitzt.

(Eingegangen am 10. Februar 1953.)

Über das Auswahlaxiom.

Von
G. KUREPA in Zagreb.

1. M sei eine durch \leq geordnete Menge¹⁾. Die Menge aller maximalen Ketten bzw. maximalen Antiketten von M (vgl. KUREPA [1, 2]) werde durch

(1) OM bzw. $\bar{O}M$

bezeichnet. Mit Hilfe des Auswahlaxioms läßt sich zeigen, daß die Mengen OM , $\bar{O}M$ nicht leer sind, weil dann die folgenden Prinzipien beweisbar sind:

(K) Das Prinzip der Existenz maximaler Ketten: Jede geordnete Menge enthält eine maximale Kette (cf. HAUSDORFF [1], p. 140, BIRKHOFF [1], p. 42).

(\bar{K}) Das Prinzip der Existenz maximaler Antiketten: Jede geordnete Menge enthält eine maximale Antikette.

Bekanntlich ist das Auswahlaxiom mit dem Prinzip der Existenz maximaler Ketten äquivalent (vgl. BIRKHOFF [1], p. 43). Dagegen ist offen, ob auch (\bar{K}) und das Auswahlaxiom äquivalent sind.

2. Eine einfache Folge des Auswahlaxioms bzw. des Totalwohlordnungsprinzips ist das folgende Prinzip:

(V) Total- oder Vollordnungsprinzip: Jede Menge kann totalgeordnet werden.

Nach MOSTOWSKI (vgl. MOSTOWSKI [1]) ist (V) schwächer als das Totalwohlordnungsprinzip, da das ZERMELOSche Prinzip aus (V) nicht ableitbar ist.

3. Theorem 3.1. Das Auswahlaxiom ist äquivalent mit dem logischen Produkt der Prinzipien (\bar{K}) und (V), d. h. aus dem Auswahlaxiom folgen (\bar{K}) und (V) und umgekehrt: Aus (\bar{K}) und (V) folgt das Auswahlaxiom.

Es ist hinreichend, aus (\bar{K}) und (V) das ZERMELOSche Prinzip abzuleiten. Es sei also

(1) F

irgendeine nichtleere Menge nichtleerer Mengen. Es ist die Existenz einer Menge S nachzuweisen, die mit jedem $X \in F$ einen einzigen Punkt gemeinsam hat. Nach (V) kann jedes $X \in F$ als vollgeordnet vorausgesetzt werden. Nun betrachten wir für jedes $X \in F$ die Menge

(2) $/X$

¹⁾ Wir wenden die folgenden Redeweisen an (cf. WIRT [1]): *geordnet*, bisher teilweise *geordnet*; *wohlgeordnet*, bisher teilweise *wohlgeordnet*, d. h. jede nichtleere Teilmenge von vergleichbaren Elementen besitzt ein erstes Element; *voll- oder totalgeordnet* oder *Kette*, bisher *geordnet*; *total- oder vollwohlgeordnet*, bisher *wohlgeordnet*; *total- oder vollanti-geordnet* oder *Antikette*, bisher ohne ungleiche vergleichbare Elemente.

aller geordneten Paare

$$(3) \quad (X, a), a \in X,$$

die so geordnet werden, daß

$$(4) \quad (X, a) \leq (X, a')$$

in fX genau dann gilt, wenn $a, a' \in X$ und $a \leq a'$ in X . Man sieht, daß fX vollgeordnet ist. Man bilde nun

$$(5) \quad F_0 = \bigcup_X fX, X \in F.$$

In F_0 werde eine Ordnung so eingeführt, daß

$$(6) \quad (X, a) \leq (X', a')$$

in F_0 genau dann gilt, wenn $X = X'$, $a, a' \in X$ und $a \leq a'$ in X . Nach (\bar{K}) enthält F_0 eine maximale Antikette A ; man sieht, daß A aus jedem fX ($X \in F$) genau einen Punkt

$$(7) \quad (X, \varphi(X))$$

enthält. Die Menge S aller Punkte $\varphi(X)$ hat also mit jedem $X \in F$ genau einen Punkt gemeinsam, womit das ZERMELOSche Prinzip bewiesen ist.

4. Fixpunktfreie Permutationen und das Auswahlaxiom.

4.1 S sei eine nichtleere Menge und f eine eindeutige Abbildung von S auf sich. Mit $x \in S$ sei

$$(1) \quad [x]_f = \bigcup_n f^n(x), n \in D^2,$$

$$(2) \quad f^0(x) = x, f^{n+1}(x) = f^{\pm 1}(f^n(x)).$$

Die Ordnung von f ist das Infimum der Kardinalzahlen

$$(3) \quad k[x]_f, x \in S^3.$$

4.2. Für jede natürliche Zahl n betrachten wir nun die folgende Aussage:

$\Pi[n]$ (Permutationsprinzip): In jeder Menge, die mindestens n Punkte enthält, gibt es eine fixpunktfreie Permutation der Ordnung $\geq n$.

Theorem 4.2. $\Pi[3]$ ist eine Folge des Auswahlaxioms.

Wegen der Voraussetzung des Auswahlaxioms reicht es hin, $\Pi[3]$ für jeden Anfangsabschnitt $W = [0, \alpha)$ von Ordnungszahlen mit $\alpha > 2$ zu beweisen. Für endliche W leistet die zyklische Permutation das Verlangte. Wenn W unendlich ist, so können wir voraussetzen, daß jeder Punkt von W unendlich viele Nachfolger besitzt; andernfalls ordne man W so um, daß man die Kette W_0 aller $x \in W$ mit endlich vielen Nachfolgern vor die Restmenge setzt. Im Falle der Menge $N = 1, 2, 3, \dots$ der natürlichen Zahlen genügt es, die folgende Permutation zu betrachten:

$$p(3n-2) = 3n, p(3n-1) = 3n-2, p(3n) = 3n-1.$$

^{*)} Die Bezeichnung D für die Menge der ganzen Zahlen ist das Initial von Differenz. Sie erinnert an die Entstehungsweise der ganzen Zahlen.

^{**)} Die Kardinalzahl einer Menge X werde durch kX bezeichnet.

Ist W eine beliebige unendliche Menge, so zerlegen wir W so in ω -Abschnitte, daß zwei Punkte $x, y \in W$ dann und nur dann in demselben Abschnitt liegen, wenn

$$k[x, y]_W < \aleph_0.^4)$$

Da jeder Abschnitt X von W der Folge $N = 1, 2, 3, \dots$ ähnlich ist, kann man die Permutation p von N in X übertragen; führt man das für jeden maximalen ω -Abschnitt von W aus, so gewinnt man eine fixpunktfreie Permutation von W von der Ordnung ≥ 3 .

5. Das Auswahlaxiom und die Zerlegung einer Menge M in fremde höchstens abzählbare Mengen.

Sei f eine Permutation von S . Wird $[x]_f$ wie in 4. erklärt, so liefert $[x]_f$ eine Zerlegung (Partition) von S , d. h. mit $x, y \in S$ ist entweder $[x]_f = [y]_f$ oder $[x]_f \cap [y]_f = \emptyset$ (leer). Sei nämlich $z \in [x]_f \cap [y]_f$, so gibt es ein $k \in D$ und ein $k' \in D$, so daß

$$f^k(x) = z = f^{k'}(y), \text{ also } f^k(x) = f^{k'}(y), \text{ also}$$

$$x = f^{k-k'}(y); \text{ d. h. } x \in [y]_f \text{ und daher}$$

$$[x]_f \subseteq [y]_f.$$

Analog beweist man die duale Inklusion.

Insbesondere folgt, falls f eine Ordnung ≥ 3 hat, daß jedes $[x]_f$ ($x \in S$) mindestens drei Punkte enthält. Das Permutationsprinzip Π [3] zieht also die folgende Aussage nach sich:

5.1. $P[3, \aleph_0]$ (Partitionsprinzip): Jede unendliche Menge ist zerlegbar in disjunkte Teilmengen X derart, daß

$$3 \leq kX \leq \aleph_0.$$

Umgekehrt kann man den folgenden Satz beweisen:

Theorem 5.2. Aus dem Partitionsprinzip $P[3, \aleph_0]$ folgt das Permutationsprinzip Π [3].

M sei irgendeine Menge mit mindestens drei Elementen und P eine Partition von M mit

$$(1) \quad M = \bigcup_X X, \quad 3 \leq kX \leq \aleph_0 \quad (X \in P).$$

Da jedes $X \in P$ höchstens abzählbar ist und mindestens 3 Punkte enthält, gibt es in ihm eine fixpunktfreie Permutation f_x der Ordnung ≥ 3 (X ist durch eine ähnliche Transformation φ_x auf einen Anfangsabschnitt $\varphi_x X$ der Zahlenreihe $[0, \omega)$ abbildbar). Definiert man dann eine Abbildung f von M auf sich so, daß f in jedem $X \in P$ mit f_x übereinstimmt, so ist f eine gewünschte Permutation von M .

Man kann 5.1 und 5.2 zusammenfassen in

Theorem 5.3. Für jede Menge, die mindestens drei Punkte enthält, ist das Permutationsprinzip Π [3] äquivalent mit dem Partitionsprinzip $P[3, \aleph_0]$.

⁴⁾ $[a, b]_S$ bedeutet die Menge aller $x \in S$, die zwischen a und b liegen oder mit a oder b gleich sind.

Offen ist die Frage, ob aus $II[3]$ das Auswahlaxiom folgt (und somit $II[3]$ ein Äquivalent für das Auswahlaxiom darstellt), ob für zwei verschiedene natürliche Zahlen n, n' die Prinzipien $II[n]$ und $II[n']$ äquivalent sind und ob insbesondere $II[2] \Rightarrow II[3]$.

6. Die Anzahl der Permutationen unendlicher Mengen und das Auswahlprinzip. Wenn für jede Kardinalzahl a die Fakultät von a

$$a!$$

als die Kardinalzahl von der Menge $S!$ aller Permutationen von S bedeutet, wo $kS = a$, so hat man den

Satz 3.1. *Es ist $a! = 2^a$ für jedes Aleph a .*

Der Beweis des Satzes 3.1 ist nicht schwer; in einem anderen Aufsatz werde ich 3 verschiedene Beweise geben und zugleich durchanalysieren, insofern ich dieselben nicht auf beliebige unendliche Kardinalzahlen a übertragen kann. In diesem Zusammenhang können wir noch das folgende Problem formulieren.

Problem 6.1. Wenn für jede unendliche Kardinalzahl a die Gleichung $a! = 2^a$ vorausgesetzt wird, ist dann das Auswahlprinzip beweisbar?

Literaturverzeichnis.

- [1] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory*, New York, 1948, 2nd edition. — [1] F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig 1914. — [1] G. KUREPA: *Sur les ensembles partiellement ordonnés*. Proc. Internat. Math. Congress Cambridge, Mass. 1950; **1**, 460 bis 461 (1952). — [2] G. KUREPA: *On a characteristic property of finite sets*. Pacific J. of Math. **2** (1952). — [1] A. MOSTOWSKI: *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*. Fundam. Math., Warszawa, **32**, 201—252 (1939). — [1] R. L. VAUGHT: *On the equivalence of the Axiome of Choice and a maximal principle*. Bull. Amer. Math. Soc. **58** 66 (1952). — [1] E. WITT: *Beweisstudie zum Satz von M. Zorn*. Math. Nachrichten. Berlin **4**, 434—438 (1951).

(Eingegangen am 18. Juni 1952.)

Between Number Theory and Set Theory.

By

Hao WANG in Philadelphia, Pa., U. S. A.

I shall discuss a number of interconnections between number theory (i. e. the theory of natural numbers or nonnegative integers) and certain systems of set theory. Relations between transfinite numbers and arbitrary sets will not be considered.

While DEDEKIND and FREGE tried to provide foundations for number theory by what are essentially set-theoretic considerations, KRONECKER and POINCARÉ insisted that natural numbers are the most basic items in our mathematical thinking. It now seems clear that we understand better the nature of natural numbers than that of arbitrary sets. We know in a pretty definite sense the consistency of number theory but not that of set theory. We can in a definite sense obtain or derive number theory in set theory but not vice versa.

If we only talk about finite sets exclusively, set theory is equivalent to number theory. If we allow infinite sets but not "impredicative" sets, then set theory still resembles number theory quite well, although no exact equivalence between them is known. The big gap between number theory and set theory proper is the introduction of impredicative sets in set theory.

These are all well-known. The purpose of this paper is to formulate more precisely these connections between number theory and set theory. I shall consider several set-theoretic systems of varying strength but each strong enough to enable us to derive number theory. I shall ask, among other things, how far the interpretations for each system are determined by a fixed interpretation of the part of the system corresponding to number theory.

The results obtained below will, it is hoped, provide us with new insights into the close connections between number theory and set theory, as well as the peculiarities of impredicative sets.

In the first section, I shall consider general set theory or ZERMELO's set theory minus the axiom of infinity. Several systems are used. The system G is the basic system of general set theory including the axiom of extensionality, the Aussonderungsaxiom, and an axiom assuring the existence of finite sets. The system G' contains, beyond the axioms of G (referred to as M1—M3), also the axioms M4—M8 of foundation, replacement, sum set, power set, and choice. In other words, G' contains all the axioms, except the axiom of infinity, of the ZERMELO set theory. The system Z is the ordinary system of elementary number theory used, for example, by HILBERT and BERNAYS.

The main results obtained in section 1 are the following. (1) It is known that G and G' has a simple denumerable model in common. A predicate E

is now constructed in G itself which serves to enumerate all the sets of the simple model. (2) Using this predicate E , we can express in G an axiom of limitation:

ALG. Every set is limited; or, in other words, for every x , there is a natural number m , such that x is $E(m)$.

We can therefore consider the system G^* obtained from G by adding ALG as a new axiom. (3) It is proved that all theorems of G' are also theorems of G^* ; in other words, the presence of ALG renders the axioms M4—M8 redundant. (4) The system G^* is categorical relative to its number theory in the sense that any two models for G^* are isomorphic whenever their parts for the number theory in G^* are isomorphic. (5) G^* is effectively translatable into G .

In section 2, I shall consider first a system P' which is a predicative extension of G' . Every predicate of G' defines a collection of sets and P' treats both the sets and these collections so that, for example, instead of the predicate " $H(x)$ ", we can now write " $x \eta Y$ " (x belongs to the collection Y defined by the predicate H). P' may also be described as the BERNAYS set theory minus the axiom of infinity. The following conclusions are established. (i) It is known that we can enumerate in a direct way all the collections required to exist by the axioms of P' . Formalizing this fact, we now define a predicate $\eta^*(m, n)$ of natural numbers such that if we add statements (implicitly) defining η^* as axioms to the number theory Z , then P' is effectively translatable into the resulting system. (ii) It is proved that η^* cannot be a general recursive predicate. (iii) It is possible to express in P' a predicate $R(X, m)$ which intuitively enumerates all the collections of P' . (iv) But the definition of R involves bound variables ranging over all collections and therefore, on account of difficulties with induction, we cannot prove in P' that R does serve to enumerate all collections called for by axioms of P' .

Finally, in the third section, ways of getting rid of the difficulty about induction are considered. (a) The use of a rule of infinite induction would do. (b) The introduction of impredicative collections would also eliminate the difficulty. Let P be the extension of G related to G as P' is to G' , and Q be the system obtained from P by adding a principle for forming impredicative collections. Let P^* be the system obtained from P by adding the axiom ALG and also the axiom ALP which says that for every collection X , there is a natural number m , X is $R(m)$. (c) It is then proved that P^* is effectively translatable into Q . It follows that Q is stronger than P and the principle for forming impredicative collections is independent of the axioms of P . (d) The system P^* is also categorical relative to its number theory, if we restrict ourselves to ω -consistent models (viz. models in which there is no predicate $H(m)$ for which $H(0), H(1), \dots$ are all true but " $\text{for all } m, H(m)$ " is false). (e) Certain new forms of undecidable statements in set theory are given and discussed.

This completes the summary of results. The following brief index of notions and notations specially defined in this paper may also be useful: (* (see 1.1), $a(n)$ (1.2), $b(n)$ (1.3), $L(x)$ (1.17), L -translation (1.18), η^* (2.16),

π^* (2.17), ϵ (the empty set or collection), $Nn(y)$ (y is a natural number), $H(n, Y)$ (2.18), $R(X, m)$ (2.20), $L(X)$ (3.7), R -translation (3.8).

In this paper, when I speak of a model for an axiom system or for a part of a system, I mean merely a domain or a set of domains of objects associated with an assignment of truth values (true or false) to each statement of the system or the part of a system such that the following conditions are satisfied: (1) in assigning truth values to the statements, the truth-functions and quantifiers receive their normal interpretation so that, for instance, p is true if and only if the negation of p is false; (2) All the theorems of the system or the part of a system are true according to the truth value assignment. In particular, in order to speak of models for a certain part of an axiom system, I do not have to consider the question whether the part also forms an axiom system by itself or, if it does, what that axiom system is.

The following remark by BERNAYS is also important. In this paper, I do not have to take the concept "categorical" in its usual impredicative sense. In my application of the concept I can avoid the impredicativity since the one-to-one correspondence in the case of my theorems on categoricity can be effectively set up.

I want to thank Professor BERNAYS for very valuable suggestions which enabled me to make corrections and improvements over a previous version of this paper. I wish also to thank Dr. ROBERT McNAUGHTON for agreeing to read an early form of this paper and offering helpful criticisms.

Bibliography.

- [1] ACKERMANN, WILHELM: *Math. Ann.* **114**, 305—315 (1937). Review by RÓZSA PÉTER: *Journal of symbolic logic* **2**, 167 (1937). — [2]—[3] BERNAYS, PAUL: *Journal of symbolic logic* **2**, 65—77 (1937); **6**, 1—17 (1941). — [4] FRAENKEL, A.: *Einleitung in die Mengenlehre*. 3rd ed., 1928. — [5] GÖDEL, KURT: *Consistency of the continuum hypothesis*. Princeton, 1940. — [6] GRELLING, KURT: *Die Axiome der Arithmetik*. Dissertation, Göttingen 1910. — [7]—[8] HILBERT, D., and BERNAYS, P.: *Grundlagen der Mathematik*, vol. **1**, 1934; vol. **2**, 1939. — [9]—[10] VON NEUMANN, J.: *Journal reine angew. Math.* **154**, 219—240 (1925); **160**, 227—241 (1929). — [11] ROSSER, J. B.: *Journal of symbolic logic*, vol. **2** pp. 129—137, (1937). — [12] SUSZKO, ROMAN: *Studia philosophica*, **4**, pp. 301—330 (1951). — [13]—[15] WANG, HAO: *Proceedings National Academy of Sciences USA.*, **36**, 479—484 (1950); *Transactions of Am. Math. soc.* **71**, 283—293 (1951); *Journal of symbolic logic*, **18**, 49—59 (1953). — [16] ZERMELO, E.: *Acta math.* **32**, 185—193 (1909).

§ 1. General Set Theory.

Systems of number theory and set theory all contain as part predicate calculus with identity, dealing with typical properties of truth functions, quantifiers, and identities (see HILBERT-BERNAYS [8], p. 375 and p. 389). As the basic system of number theory, we use the famous system Z of HILBERT-BERNAYS (*ibid.*, p. 384) determined by the DEDEKIND-PEANO axioms for natural numbers, and the recursive equations for addition and multiplication. In system Z , whenever there are numbers having a certain property, it is always possible to introduce a descriptive term "the smallest of the

numbers having the property". Ordinary functions and arguments of number theory are all obtainable in Z .

To begin with, we consider the axiomatic system of set theory first proposed by ZERMELO and later on modified and refined by others. Let us for the moment omit the axioms of infinity and study merely the remaining axioms which constitute what is sometimes called general set theory. It is known that general set theory and number theory are translatable into each other in the following sense¹). There exists an effective way of replacing the membership predicate of general set theory by a predicate of number theory such that the resulting statements in place of the theorems of the former all are theorems of the latter; conversely, there exists an effective way of replacing symbols of number theory by suitable symbols of general set theory such that theorems of the former become theorems of the latter.

In order to apply and extend these results, we describe first more fully the system of general set theory.

It contains a single two-place predicate \in (membership, belonging to) the variables x, y, z , etc. for sets, and the following axioms²).

M1. The axiom of extensionality. Two sets having the same elements are identical; or, if two sets x and y have the same elements and x belongs to z , then y also belongs to z .

M2. The axiom of finite sets. To a set x can be adjoined a set y which is not already in x ; in other words, if there exist two sets x and y , then there exists a set z such that x is included in z (i. e., every element of x is also one of z) and y is the only element of z which does not also belong to x .

M3. The Aussonderungsaxiom. Given any set x and any predicate $H(y)$ of the system (or, any property expressible in the system), there exists a subset of x which contains all and only those elements y of x such that $H(y)$ (i. e., y possesses the given property).

M4. The axiom of foundation. Given any predicate $H(x)$ of the system such that there exists some $x, H(x)$. Then there exists some set x such that $H(x)$ and that, for no set y belonging to $x, H(y)$.

M5. The axiom of replacement. If the range of a one-to-one correspondence is a set, the domain is also represented by a set; in other words, if any predicate $U(x, y)$ of the system determines a one-to-one correspondence and the collection of all sets x such that there exists some $y, U(x, y)$ forms a set, then so does also the collection of all sets y such that there exists some $x, U(x, y)$.

¹) For a more exact discussion of the notion of translation, cf. WANG [14].

²) It is more customary to use in place of M2 the weaker axiom of pairing. But it is more convenient to use M2 for our purpose.

As we know, we can either use identity as basic and assume ordinary theory of identity, or define $x = y$ as meaning that x and y have the same members and derive the theory of identity from the alternative formulations of M2 given below. Whenever convenient, we shall assume that identity is defined in terms of the membership relation. This sometimes simplifies a little certain considerations about systems of set theory.

M6. *The axiom of sum set.* Given a set x , there exists a set y which is the sum of all the elements of x .

M7. *The axiom of power set.* Given a set x , there exists a set y which consists of all the subsets of x .

M8. *The axiom of choice.* Given a set x of mutually exclusive non-empty sets y , there exists a set z which contains exactly one element in common with each set y in x .

Let us refer to the system determined by M1—M3 as G , and the system determined by M1—M8 as G' . In terms of the systems G and G' , the known relations between number theory Z and general set theory can be stated more precisely.

In the first place, we know from investigations by ZERMELO, GRELLING, and others³⁾ that number theory is translatable into G and therefore ipso facto translatable into G' . In other words, with suitable definitions for the number zero 0, the successor Sx of x , the predicate of being a natural number, addition, and multiplication, all axioms of Z are derivable in G and G' .

On the other hand, ACKERMANN has proved⁴⁾ that G' (and therefore also G) is translatable into number theory. Thus, G' and G have in common a simple model consisting of all the finite sets e , $\{e\}$, $\{\{e\}\}$, $\{e, \{e\}\}$, $\{e, \{e\}, \{\{e\}\}\}$, and so on, obtained from the empty set e by iterated applications (any finite number of times) of the axiom M2. We can also represent these sets one-to-one by natural numbers. The natural number zero 0 for the empty set e , $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_k \geq 0$) for the set consisting of the k sets which are represented respectively by the numbers a_1, \dots, a_k . With these representations the m -th set belongs to the n -th if and only if the quotient of dividing n by 2^m is odd, no matter whether there is any remainder. If we say that $m \in^* n$ if and only if the quotient of dividing n by 2^m is odd, then \in^* is obviously a predicate definable in number theory. ACKERMANN's result is that if we replace the predicate $x \in y$ in all the axioms of G' by the predicate $m \in^* n$ then the results all are theorems of number theory.

1.1. Let \in^* be the predicate of natural numbers such that $m \in^* n$ when and only when the quotient of dividing n by 2^m is odd, no matter whether there is a remainder.

These results taken together lead to certain quite interesting conclusions. Thus, since G contains both number theory and the finite sets built up from the empty set, it turns out to be possible to express in G itself the correspondence between the sets and the natural numbers. Such a correlation further leads to some axiom of limitation (Beschränktheitsaxiom, cf. FRAENKEL [4] and VON NEUMANN [9]) which, when added to G , renders the system complete in a certain sense.

³⁾ I am indebted to Professor CHURCH for pointing out this known fact to me for the first time. See ZERMELO [16], GRELLING [6], and BERNAYS [3].

⁴⁾ See ACKERMANN [1]. His system does not include M 2, M 4, or M 5. But it presents no special difficulty if we add these axioms (in connection with M 5, cf. PÉTER [1]).

In ACKERMANN's representation of the finite sets, there exists for each n ($n > 0$) at least one number m such that $m < n$ and the n -th set is obtained from the m -th by adding exactly one more member. In other words, for every positive n , there exist m and k , such that $n = m + 2^k$ and the quotient of dividing m by 2^k is even (i. e., the k -th set does not belong to the m -th).

1.2. Let $a(n)$ ($n > 0$) be the smallest m such that there exists a number k , $n = m + 2^k$ and the quotient of dividing m by 2^k is even.

1.3. Let $b(n)$ ($n > 0$) be the number k such that $n = a(n) + 2^k$.

Using these notions, we can enumerate in G all the sets of the model for G and G' by a predicate E such that $E(e, 0)$ (or $E(0)$ is the empty set e) and $E(n)$ ($n > 0$) is the set $E(a(n)) + \{E(b(n))\}$ obtained from $E(a(n))$ by adjoining $E(b(n))$ as a single additional member. To find this predicate E , we need only the usual technique of converting recursive definitions into explicit ones (cf. BERNAYS [3], p. 13).

Both for later use and for illustrating how in general recursive functions can be defined in G , we describe here some of the details for defining E .

As usual, the ordered pair $\langle x, y \rangle$ of x and y is the set $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, a (dyadic) relational set is a set of ordered pairs, a functional set is a one-many relation, and the domain of a functional set y is the set of all z such that there exists some w , $\langle w, z \rangle$ belongs to y .

1.4. Let $E(x, m)$ stand for the following: $\langle x, m \rangle$ belongs to a functional set y with the successor Sm of m (which by the definition adopted is the set of all natural numbers $\leq m$) as domain such that $y(0)$ is e and for every positive n ($n \leq m$), $y(n)$ is $y(a(n)) + \{y(b(n))\}$.

By known method (see BERNAYS [3]), we can then prove in G that for every m , there exists an x , $E(x, m)$ and that for any x, y, m , if $E(x, m)$ and $E(y, m)$, then $x = y$. We can therefore write $x = E(m)$ in place of $E(x, m)$ and think of E as defining a function.

The system G contains the ordinary forms of induction principle with respect to all properties expressible in G :

1.5. For every property expressible (say, by $H(x)$) in G , if $H(0)$, and for all n , $H(n)$ implies $H(Sn)$, then for all natural numbers m , $H(m)$.

1.6. If $H(0)$ and if $H(m)$ provided, for all n smaller than m , $H(n)$; then, for all m , $H(m)$; in other words, if a property is possessed by 0, and by an arbitrary n if it is possessed by all smaller numbers, then it is possessed by all natural numbers.

Using these principles and the notions introduced under 1.1—1.4, we can prove in G quite easily the following theorems.

1.7 For no j , $j \in *0$.

1.8. $E(0)$ is the empty set e .

1.9. For every positive k and for every m , $m \in *k$ if and only if either $m \in *a(k)$ or m is $b(k)$.

1.10 For every positive n , $E(n) = E(a(n)) + \{E(b(n))\}$.

1.11. For all positive m and n , $m = n$ if and only if $a(m) = a(n)$ and $b(m) = b(n)$.

1.12. For all positive m and n , $E(m) = E(n)$ if and only if $E(a(m)) = E(a(n))$ and $E(b(m)) = E(b(n))$.

1.13. For all m and n , $E(m) = E(n)$ if and only if $m = n$.

Proof. As we noted before, if $E(x, m)$ and $E(y, m)$, then $x = y$. Therefore, if $m = n$, $E(m) = E(n)$. Therefore, we have to prove merely that if $E(m) = E(n)$, then $m = n$. This we prove by induction. By 1.10 if $k > 0$, $E(k)$ contains at least one member $E(b(k))$. Hence, $E(k)$ is the empty set e when and only when $k = 0$. Therefore, 1.13, is true when either m or n is 0. Let m be an arbitrary positive integer and assume that (1) " $E(m) = E(n)$ implies $m = n$ " is true for all values of n smaller than j . We want to show that it is also true when $n = j$. Suppose that $E(m) = E(j)$. Then, by 1.12, $E(a(m)) = E(a(j))$ and $E(b(m)) = E(b(j))$. By induction hypothesis, since $a(j) < j$, $b(j) < j$, (1) is true when $n = a(j)$ or $n = b(j)$. Therefore, $a(m) = a(j)$ and $b(m) = b(j)$. Hence, by 1.11, (1) is true when $n = j$. By induction, (1) is proved. Therefore, 1.13 is proved.

We can also prove in G :

Theorem 1. For all m and n , $E(m) \in E(n)$ if and only if $m \in {}^*n$.

Proof. We make induction on n . If $n = 0$, theorem is true by 1.7 and 1.8. Assume theorem is true for all $n < j$. Since $a(j) < j$, we have: for all m , $E(m) \in E(a(j))$ if and only if $m \in {}^*a(j)$. By 1.13, $E(m) \in E(b(j))$ if and only if $m \in b(j)$. Hence, by 1.9 and 1.10, $E(m) \in E(j)$ if and only if $m \in {}^*j$. Hence, by 1.6, theorem is proved.

From *Theorem 1* and ACKERMANN's result mentioned above, we have:

1.14. If we replace the predicate $x \in y$ by the predicate $E(m) \in E(n)$ in all the axioms of G' , the results all are theorems of G .

Next let us consider an axiom of limitation for G and G' which restricts the sets to those which are enumerated by E :

ALG. For every x , there exists an m , $x = E(m)$.

It is easy to see that ALG is independent of the axioms of G and G' since, for example, the axioms of G and G' do not preclude infinite sets while ALG does.

1.15. ALG is independent of the axioms of G and G' , if the system obtained from G by adding an axiom of infinity is consistent.

Proof. Obviously $E(0)$ is not an infinite set. Assume that for each n smaller than j , $E(n)$ is a finite set. Since $a(j)$ is smaller than j , $E(a(j))$ is therefore finite. But $E(j)$ contains only one more member than $E(a(j))$. Hence, $E(j)$ is also finite. By induction, for every k , $E(k)$ is a finite set. Hence, ALG contradicts axioms of infinity and is independent of the axioms of G and G' .

We proceed to consider the system obtained from G by adding ALG.

1.16. Let G^* be the system obtained from G by adding ALG as a new axiom.

1.17. Let us agree: $L(x)$ or x is limited if and only if there exists some natural number m such that x is $E(m)$.

1.18. Let the L -translation of an arbitrary statement of G and G' be the result obtained by restricting the range of the variables to the limited sets: in other words, the L -translation of a statement is the result obtained by substituting "for all x , if $L(x)$, then $H(x)$ " for each clause "for all x , $H(x)$ ", and "for some x , $L(x)$ and $H(x)$ " for each clause "for some x , $H(x)$ ".

Using these notions, we can prove:

1.19. We can prove in G and G^* : The L -translation of a statement of G holds if and only if the result obtained from it by substituting throughout the predicate $E(m) \in E(n)$ for $x \in y$ holds.

Proof. By 1.17 and ordinary laws of logic, "for all x , if $L(x)$, then $H(x)$ " is equivalent to "for all m and x , if x is $E(m)$, then $H(x)$ ". Moreover, "for all m and x , if x is $E(m)$ then $H(x)$ " is clearly equivalent to "for all m , $H(E(m))$ ". Therefore, "for all m , $H(E(m))$ " is equivalent to the L -translation of "for all x , $H(x)$ ". Similarly, we can prove that "for some k , $H(E(k))$ " is equivalent to the L -translation of "for some y , $H(y)$ ". Therefore, 1.19 is proved.

1.20. A statement is provable in G^* if and only if its L -translation is provable in G^* .

Proof. On account of ALG, "for all x , $H(x)$ " is equivalent to "for all x , if $L(x)$ then $H(x)$ " in G^* , and "for some x , $H(x)$ " is equivalent to "for some x , $L(x)$ and $H(x)$ ". Hence, 1.20 is proved.

In the proofs 1.19 and 1.20, if we think of the original statement as given in prenex normal form (i. e. in such a form that all the phrases "for all x ", "for some y ", and the like, stand at the beginning and their ranges all extend to the end of the statement), then we can see even more directly that the proofs are right.

From 1.14, 1.19, and 1.20, it follows immediately:

Theorem 2. The axioms M4—M8 of G' all are theorems of G^* .

To express more exactly the close connection between G^* and number theory, we introduce the notion of categoricity relative to number theory:

Definition 1. A system in which number theory is derivable is said to be categorical relative to number theory if and only if any two models for the system are isomorphic whenever their parts for the number theory in the system are isomorphic⁵.

This definition can be made clearer by the example of G^* .

Theorem 3. The system G^* is categorical relative to number theory.

Proof. Consider two models for G^* which are isomorphic with regard to the number theory of G^* . In other words, there is a one-one correspondence

⁵ The number theory in a system is the part of the system which contains merely notions answering to those of \mathbb{Z} . Thus, a statement which involves both notions of number theory and notions not in number theory is not considered as a statement of the number theory of the system. While any statement p of the system is clearly equivalent to some statement of the mixed type (for example, " p and $0=0$ "), it is not always obvious whether every statement of some specific system is equivalent to one of its number theory.

between the objects representing the natural numbers in the two models and that each statement of G^* involving only variables and notions of number theory is either true in both models or false in both. By ALG and 1.13, there is a one-one correspondence between the natural numbers and all the sets of G^* . Hence, there is a one-one correspondence between all the objects in the two models. Moreover, by 1.20, 1.19, and *Theorem 1*, for every statement p of G^* there is a demonstrably equivalent statement p' obtained from p by substituting throughout the predicate $m \in \omega$ for the predicate $x \in y$. Since all theorems of G^* must be true in models for G^* , " p if and only if p' " must be true in both models for G^* . But in every case p' is a statement of number theory and is by hypothesis either true in both models or false in both. Since p' must have the same truth value as p , p is also either true in both models or false in both. Hence, the two models are isomorphic, as was to be proved.

As we know, GÖDEL's incompleteness theorem also applies to the system G^* . Hence, there are undecidable number-theoretic statements in G^* , and it is possible to find some model for G^* in which a given undecidable statement is true and also some other in which the same statement is false. *Theorem 3* does not contradict this fact but merely shows that once we assume for a model of G^* a definite assignment of truth values to all the undecidable number-theoretic statements of G^* , then the truth values of all the statements of G^* , are uniquely determined.

Indeed, 1.20, 1.19, and *Theorem 1* taken together also show that if we complete the number theory in G^* by some non-constructive rule of inference, the system G^* itself also becomes completed. Thus, as we know, number theory can be made complete by adding the following rule of infinite induction⁶):

1.22. Given any predicate H of number theory, if $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, ... are all theorems, then " $\text{for all } m, H(m)$ " is also a theorem.

Hence, if we add 1.22 to G^* , we obtain a complete system in which each statement is either provable or refutable. This is worth remarking, because the addition of 1.22 is not sufficient to render certain strong systems complete (see ROSSER [11]).

Next we ask the problem whether ALG is consistent with the axioms of G . In one sense, the answer is direct since the simple model for G and G' described

⁶) This assertion becomes obvious, if we reflect that all true statements containing no variables are provable in number theory and 1.22 gives us all the true statements of number theory, as determined by the truth definition in HILBERT-BERNAYS (cf. [8], p. 333).

With regard to the rule of infinite induction, Professor BERNAYS observes the following two different ways of construing it. On the one hand, the rule may be construed as a part of, so to speak, a metamathematical definition of the system of "true" number-theoretic statements (in classical sense), expressing a property of closure. On the other hand, the rule may also be construed as one for derivation, which differs from the usual rules of derivation in that it requires admission of proof schemata as generating proofs. It is by the first interpretation of infinite induction that number theory becomes complete and ω -complete by the addition of 1.22. If we had adopted the second interpretation, it could only be said that there is, after addition of the infinite induction, no demonstrable ω -incompleteness because any general argument for proving, say, that $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, ... are all provable would also yield, by infinite induction, a proof for " $\text{for all } m, H(m)$ ".

above also satisfies ALG and is therefore also a model for G^* . On the other hand, we can also prove, not so directly, the relative consistency of G^* to G in a sharper sense. We can prove that G^* is translatable into G and therefore if there were any contradiction in G^* , we could effectively determine a related contradiction in G . (For a general discussion of this notion of translation, cf. WANG [14]).

Theorem 4. The system G^ is translatable into G .*

Proof. It is sufficient to prove that the L -translations of all axioms of G^* are provable in G . By 1.19 and 1.14, the L -translations of M1—M3 are all provable in G . Hence, the only problem is to prove that the L -translation of ALG is also provable in G .

More explicitly, if Nn is the predicate of being a natural number as defined in G , the problem is to prove:

1.23. The L -translation of the statement "for all x , there exists a set y such that $Nn(y)$ and x is $E(y)$ " is a theorem of G .

In other words, let $Nn^*(y)$ be the L -translation of the sentence $Nn(y)$ of G and $y = E^*(x)$ be the L -translation of the sentence $y = E(x)$, then the problem is to prove:

1.24. For all x , if $L(x)$, then there exists a set y , such that $L(y)$ and $Nn^*(y)$ and $x = E^*(y)$.

The proof of this consists of four steps:

(i) For all y , if $Nn(y)$, then $L(y)$.

(ii) For all x , if $Nn(x)$, then $Nn^*(x)$.

(iii) For all x and m , if $L(x)$ and $x = E(m)$, then $x = E^*(m)$.

(iv) For all x , if $L(x)$, then there is some y such that $Nn(y)$ and $x = E(y)$.

Thus, from (iv) and (iii), for all x , if $L(x)$ then there is some y such that $Nn(y)$ and $x = E^*(y)$. Therefore, by (i) and (ii) we have 1.24. Hence, given (i)—(iv), 1.24, 1.23, and *Theorem 4* can all be proved.

Before sketching the proofs of (i)—(iv), we insert a remark of explanation. The axiom ALG is of the same kind as the axiom IV 2 of VON NEUMANN [10] and the statement $V = L$ of GÖDEL [5]. The proof of the translatability of G^* into G also follows the pattern of their proofs for the consistency of their statements. But of course our statement and proof are concerned with a much more elementary system. Accordingly, the considerations are much simpler.

The proofs for (i)—(iv) can be carried out in the same manner as the proofs of "absoluteness" in GÖDEL [5].

In order to prove (i) and (ii), we have to review first the definition of the predicate Nn adopted in G . Thus, if we use $y \neq y$ as $H(y)$ in M3, then we can prove that there exists the empty set e such that for no x , does x belong to e . This set e is identified with the number zero 0. By M2, there exists for every set x also the set $x + \{x\}$ obtained from x by adjoining x itself as an additional number. The set $x + \{x\}$ is taken as the successor Sx of the set x . The chief difficult step is to find the predicate Nn which would single out

exactly those sets occurring in the sequence $0, S0, SS0$, etc. (i. e., in the sequence $e, \{e\}, \{e\} + \{\{e\}\}$, etc.)

The predicate Nn is defined thus. For every set x , $Nn(x)$ if and only if the following four conditions are all satisfied: (1) x is transitive, or, for all y and z , if y belongs to z and z belongs to x , then y belongs to x ; (2) for any two distinct members y and z of x , either y belongs to z or z belongs to y ; if y is either x or a member of x , then y is either 0 or the successor Sz of some set z ; (4) for every non-empty subset y of x , there belongs to y a set z which has no common member with y .

We prove (i) by induction. If y is 0 , obviously we have: if $Nn(y)$, then $L(y)$. Assume now we have, for some x , $Nn(x)$ that $L(x)$ and x is $E(k)$. Then, Sx is, by the definition of successor, just $E(k + 2^*)$ and therefore, $L(Sx)$. Hence, (i) is proved.

The proof of (iv) is direct from 1.17.

Using the predicate Nn just described, we can carry out the proof of (ii) in G . Thus, conditions (1) and (2) are immediate, because anything true of all sets is also true of all limited sets. The L -translation of condition (3) can also be proved because, by definition of the successor function, z is limited if Sz is. The L -translation of condition (4) also holds because we can prove by induction that if $L(y)$ and z belongs to y , then $L(z)$, and therefore, for every limited non-empty subset y of x , the member z of y having no common member with y , is also a limited set.

We omit the complex but not specially difficult details of the proof of (iii). For example, it would be necessary to handle explicit definitions of $a(n)$ and $b(n)$ in G . We merely observe that in order to prove that $x = E^*(m)$ or that $E^*(x, m)$, we use instead of the functional set y in the definition 1.4, the set consisting of members z of y such that $L(z)$.

§ 2. Predicative Set Theory.

The systems G , G' , and G^* considered above have one common characteristic: in each of them only finite sets (i. e., sets with finitely many members) can be proved to exist, none of them includes any axiom to assure the existence of any infinite set. Nevertheless, there are altogether infinitely many sets and there are properties expressible in the system which are true of infinitely many sets. These properties define infinite collections. For example, the property of being self-identical defines an infinite collection of sets. So does also the predicate Nn . If we introduce variables which range over not only the sets of general set theory but also all the collections (or manifolds) definable by predicates of the systems G , G' , and G^* , we obtain the predicative set theory which is more or less the system developed by VON NEUMANN and BERNAYS (see [9], [2], [3]), with the axiom of infinity excluded.

To be specific, we consider first a system P' corresponding to G' . This is just the system of BERNAYS (see [2], [3]) minus its axiom of infinity. It contains, besides the predicate \in and the variables of general set theory, variables X, Y, \dots ranging over all collections definable in G' , and a predicate η be-

tween sets and collections so that $x \eta Y$, $y \eta Y$, and the like, are meaningful symbolic combinations of P' . It contains also predicate calculus with identity, for both kinds of variables.

The axioms of P' are roughly those of G' plus a few axioms specifying the ways of forming collections. We can number them as N1—N10. N1, N2, and N6—N8 are exactly the same as M1, M2, and M6—M8. N3—N5 correspond to M3—M5 but are stated somewhat differently, on account of the presence of the new variables:

N3. Given a set y and a collection X , the collection of all sets belonging to both y and X is again a set.

N4. Given a non-empty collection X , there exists some set in X which has no common member with X .

N5. If X is a collection of ordered pairs $\langle x, y \rangle$ such that no two pairs have either the same first member or the same second member, and the collection of all the first members is a set, then the collection of all the second members is also a set.

N9 and N10 refer to general properties of the collections. N9 is just a subsidiary axiom of extensionality for sets saying that, for all collections Y , if two sets x and y have the same members and $x \eta Y$, then $y \eta Y$. N10 is more complex but amounts to saying that every predicate of G' defines a collection in P' :

N10. If $H(x)$ is a predicate of P' containing no bound large variables (i. e., containing no phrases such as "for all X ", "for some Z ", . . .; or involving no reference to the totality of all collections), then there exists a collection Y which contains all and only those sets x for which $H(x)$.

One important thing about N10 which we shall use is the reducibility of it to a few specific cases. In P' , and indeed using only N1—N3 and N9, we can derive N10 from the following special cases of it (cf. BERNAYS [2] and GÖDEL [5]):

N10.1. Every set is a collection.

N10.2. There exists a collection X of all the ordered pairs $\langle x, y \rangle$ such that x belongs to y .

N10.3. Given two collections X and Z , there exists a collection Y which contains all and only those sets belonging to both X and Z (intersection).

N10.4. Given any collection X , there exists a collection Y which contains all and only those sets not belonging to X (complement).

N10.5. Given a collection X of ordered pairs $\langle x, y \rangle$, there exists a collection Y containing all and only the sets such that, for some x , $\langle x, y \rangle$ belongs to X .

N10.6. Given a collection X of sets y , there exists a collection Y of all and only the ordered pairs $\langle x, y \rangle$ such that y belongs to X .

N10.7. Given a collection X of ordered triples $\langle x, y, z \rangle$ (viz., $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle$), there exists a collection Y of all and only the triples $\langle y, z, x \rangle$ where $\langle x, y, z \rangle$ belongs to X .

N10.8. Given a collection X of ordered triples $\langle x, y, z \rangle$, there exists also a collection Z of all and only the ordered triples $\langle y, x, z \rangle$ where $\langle x, y, z \rangle$ belongs to X .

Of these eight axioms, the first two express unconditionally that certain collections exist, while each of the rest states that given certain collection or collections there exists another related to the given in a definite and specific manner. Moreover, in none of the conditions for introducing new collections do we refer to the totality of all collections. Consequently, we can enumerate quite easily all the collections whose existence are required by the axioms, and obtain a fairly simple denumerable model for the system P' .

To describe the model in more precise terms, we proceed to introduce predicates of natural numbers which will serve as models for the predicates \in and η . Since the sets of P' are the same as those of general set theory, the model for \in is just the arithmetic predicate \in^* used above. The model for η is a predicate η^* which can be described in the following manner.

We can represent the collections in P' by the following sequence of triads of natural numbers: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, \dots , $(7, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, \dots , $(7, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, \dots , $(7, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, and so on. Thus, for any m and n , the triad $(0, m, n)$ represents $E(m)$ or the set correlated to m by the enumeration of I.4. For any m and n , $(1, m, n)$ represents the collection of ordered pairs required by N10.2. For any m and n , $(2, m, n)$ represents the collection which is the intersection (cf. N10.3) of the two collections represented respectively by the m -th and n -th triads in the above sequence. Similarly, for any m and n , $(3, m, n)$ represents the complement of the collection represented by the m -th triad. And so on. (Compare GÖDEL [5] and WANG [13].) Then the predicate η^* is roughly: $m \eta^* n$ if and only if the set represented by m (viz. the set $E(m)$) belongs to the collection represented by the n -th triad.

As we know, ordinary recursive or computable functions can all be defined explicitly in the system Z of number theory. In particular, the following simple functions of natural numbers are definable. (See HILBERT-BERNAYS [7], § 7.) We can enumerate all the dyads $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(0,3)$, \dots and define:

2.1. A function $\sigma(m, n)$ such that $\sigma(m, n)$ is k if and only if the dyad (m, n) is the k -th ($k = 0, 1, 2, \dots$) in the sequence.

2.2. Two functions $\sigma_1(k)$ and $\sigma_2(k)$ such that $(\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ is the k -th dyad. Other definable functions, which we shall use, are:

2.3. A function $\beta(n)$ which takes the values 1 and 0 according as n is 0 or not.

2.4. A function $\alpha(m, n)$ which takes the values 0 and 1 according as $m = n$ or not.

2.5. A function $m \div n$ which is 0 when $m < n$ and is $m - n$ otherwise.

2.6. A function $\varrho(m, n)$ which gives the remainder of dividing m by n .

2.7. A function $\pi(m, n)$ which gives the quotient of dividing m by n .

2.8. If (m, n, k) is the j -th triad in the enumeration given above, then

$\tau(m, n, k) = j$: $\tau(m, n, k) = 8 \sigma(n, k) + \varrho(m, 8)$. If $m > 7$, we identify (m, n, k) with $(\varrho(m, 8), n, k)$.

2.9. If $\tau(m, n, k) = j$, then $\tau_1(j) = m$, $\tau_2(j) = n$, $\tau_3(j) = k$: $\tau_1(j) = \varrho(j, 8)$; $\tau_2(j) = \sigma_1(\pi(j, 8))$; $\tau_3(j) = \sigma_2(\pi(j, 8))$.

2.10. If $E(m)$ is x and $E(n)$ is y , then $E(\gamma(m, n))$ is $\langle x, y \rangle$: $\gamma(m, n) = 2^{(2^m)} + (\alpha(m, n) \cdot 2^{(2^m + 2^n)})$. $\gamma(m, n, k) = \gamma(m, \gamma(n, k))$.

2.11. Dy (m) if and only if $E(m)$ is an ordered pair (i. e., there exist n and k such that $m = \gamma(n, k)$). Tri (m) if and only if there exist j, n, k such that $m = \gamma(j, n, k)$.

2.12. When k is positive, $\mu(k)$ is the greatest number j such that k is divisible by 2^j , and $\mu(0) = 0$.

2.13. If $E(m)$, $E(n)$, $E(k)$ are x , y , z respectively and z is $\langle x, y \rangle$, then $\gamma_1(k)$ is m , $\gamma_2(k)$ is n (k being $2^{(2^m)}$ when $m = n$, and $2^{(2^m)}(1 + 2^{(2^n)})$ otherwise):

$$\gamma_1(k) = \mu(\mu(k)).$$

$$\gamma_2(k) = \mu \left(\mu \left(\pi \left(k, 2^{(2^{\gamma_1(k)})} \right) \div 1 \right) \right) + \left(\gamma_1(k) \cdot \beta \left(k \div 2^{(2^{\gamma_1(k)})} \right) \right).$$

2.14. If $E(k)$ is $\langle x, y, z \rangle$ then $E(\kappa_1(k))$ is $\langle y, z, x \rangle$ and $E(\kappa_2(k))$ is $\langle y, x, z \rangle$:

$$\kappa_1(k) = \gamma(\gamma_1(\gamma_2(k)), \gamma_2(\gamma_2(k)), \gamma_1(k)).$$

$$\kappa_2(k) = \gamma(\gamma_1(\gamma_2(k)), \gamma_1(k), \gamma_2(\gamma_2(k))).$$

2.15. Cr (m) if and only if $E(m)$ is a pair $\langle x, y \rangle$ such that x belongs to y ; in other words, Cr (m) if and only if there exist n and k such that $m = \gamma(n, k)$ and $n \in {}^*k$.

With these predicates and functions, we can finally describe more exactly the predicate $m \eta {}^*n$ or $\eta {}^*(m, n)$.

2.16. $\eta {}^*(m, n)$ if and only if one of the following conditions is satisfied:

- (1) $\tau_1(n) = 0$ and $m \in {}^*\tau_2(n)$.
- (2) $\tau_1(n) = 1$ and Cr (m) .
- (3) $\tau_1(n) = 2$, $\eta {}^*(m, \tau_2(n))$, and $\eta {}^*(m, \tau_3(n))$.
- (4) $\tau_1(n) = 3$ and it is not the case that $\eta {}^*(m, \tau_2(n))$.
- (5) $\tau_1(n) = 5$, Dy (m) , and $\eta {}^*(\gamma_2(m), \tau_2(n))$.
- (6) $\tau_1(n) = 6$, Tri (m) , and $\eta {}^*(\kappa_1(m), \tau_2(n))$.
- (7) $\tau_1(n) = 7$, Tri (m) , and $\eta {}^*(\kappa_2(m), \tau_2(n))$.
- (8) $\tau_1(n) = 4$, and there exists a number k , such that $\eta {}^*(\gamma(k, m), \tau_2(n))$.

It is possible to convince ourselves that if it were not for the alternative (8), we could decide effectively for any given m and n whether $\eta {}^*(m, n)$ or not. The condition (8) has a non-effective character because in this case in order to decide effectively whether $\eta {}^*(m, n)$ or not, we would have to perform first the impossible task of checking for the infinitely many numbers k whether $\eta {}^*(\gamma(k, m), \tau_2(n))$. Hence, it seems reasonable to conjecture that $\eta {}^*$ is not

a recursive (or effectively calculable) predicate. Indeed, we shall soon prove that η^* cannot be recursive.

2.17. Let us call the η^* -translation of a statement p of P' the result obtained by substituting in p , the predicates $m \in {}^*n$, and $m \eta^* n$ (where n^* is the smallest k such that for all j , $j \eta^* n$ if and only if $j \eta^* k$) respectively for $x \in y$, and $x \eta y$.

We note that if we extend the system Z of number theory by adding η^* as a new primitive predicate and 2.16 as a new axiom, then the η^* -translations of all theorems of P' are provable in the resulting system.

Theorem 5. The η^ -translations of all theorems of P' are provable in the system obtained from Z by adding η^* and 2.16.*

Proof. As we have remarked above, it is known that G' is translatable into number theory when we replace $x \in y$ by $m \in {}^*n$. Therefore, translations of the axioms N1, N2, and N6—N8, which contain only symbols of G' , are provable in Z and therefore also provable in the strengthened system.

The translations of N3—N5 can be proved by induction, since by adding η^* as a primitive we are also allowing the application of induction on sentences containing η^* . For instance, the translation of N3 is:

N3*. For all j and m , there is some n such that for all k , $k \in {}^*n$ if and only if $k \in {}^*j$ and $k \eta^* m$.

To prove N3*, we make induction on j . If j is 0, n is 0, no matter what m is. Assume N3* true for all $j < i$. In particular N3* is true for $j = a(i)$. Let an arbitrary m be given. Suppose that the value of n for $a(i)$ is n_1 . Either $b(i) \eta^* m$ or not. If $b(i) \eta^* m$, then N3* is true if we take $n_1 + 2^{b(i)}$ as n ; otherwise, N3* is true if we take n_1 as n .

The translation of N9 can be proved by the definition of j^* which is the smallest k such that for all m , $m \eta^* j$ if and only if $m \eta^* k$.

The translations of N10.1—N10.8 follow immediately from 2.16.

Hence, *Theorem 5* is proved.

We turn now to the question whether η^* is recursive:

Theorem 6. The predicate η^ is not recursive.*

Proof. We know that the system Z of number theory is translatable into G . Hence, given any statement p of Z , there is a corresponding statement p' in P' which contains no large variables (viz. the variables X, Y, \dots ranging over collections in general) such that p and p' are either both true or both false. We can assume without loss of generality that p' is either of the form "for some y , $H(y)$ " or of the form "for all y , $F(y)$ ", where $H(y)$ and $F(y)$ again contain no large variables. From the derivation of N10 from N10.1—N10.8 (see BERNAYS [2], p. 72, or GÖDEL [5], p. 8) and our representation of collections by natural numbers, we see that for any given $H(y)$ and $F(y)$, we can find effectively definite numbers m_1 and n_1 such that the collection of ordered pairs $\langle x, y \rangle$ satisfying " $H(y)$ and $x = x$ " is represented by the m_1 -th triad, and the collection of ordered pairs $\langle x, y \rangle$

satisfying " $F(y)$ and $x = x$ " is represented by the n_1 -th triad. It then follows that we can also find effectively two definite numbers m_2 and n_2 so that the collection of sets x satisfying "for some y , $H(y)$ and $x = x$ " is represented by the m_2 -th triad, and the collection of sets x satisfying "for all y , $F(y)$ and $x = x$ " is represented by the n_2 -th triad. Hence, for instance, the empty set e belongs to the m_2 -th collection of P' if and only if for some y , $H(y)$ and $e = e$. Therefore, e belongs to the m_2 -th collection if and only if for some y , $H(y)$. Similarly, e belongs to the n_2 -th collection if and only if for all y , $F(y)$.

Hence, in each case, given any statement p of Z and therewith its translation p' , we can find a definite numeral k_1 such that e belongs to the k_1 -th collection if and only if p' . In other words, since e is $E(0)$, $0 \eta^* k_1$ if and only if p' . Consequently, for each statement p of Z , we can find effectively a corresponding natural number n such that p is true if and only if $0 \eta^* n$ is true.

But if η^* were recursive, we would have an effective way of deciding, for each given n , whether $0 \eta^* n$ holds or not. Hence, we would have a decision method for telling whether an arbitrary given statement of Z is true or false. Then we would, by taking all true statements of Z as axioms, have a complete formal system, contrary to GÖDEL's famous theorem on the incompleteness of number theory. Hence, η^* cannot be a recursive predicate.

Therefore, *Theorem 6* is proved⁷⁾.

An open question is: can we find in Z a predicate $K(m, n)$ such that by substituting K for η^* in 2.16, the result becomes a theorem in Z ? If we can, then it follows from *Theorem 5* that P' is translatable into Z . On account of the similarity between 2.16 and sentences defining predicates not obtainable in Z (cf. HILBERT-BERNAYS [8], p. 339), it seems natural to believe that we cannot find any such predicate K for η^* in Z . However, we know no way of proving this.

As we noted, the system P' corresponds to G' . The system P corresponding to G does not contain N4—N8 but contains merely N1—N3 and N9—N10. We can prove that for many purposes, P gives us as much as P' . Of course, any model for P' is also one for P .

In a certain weaker sense, we can obtain η^* in P . Thus, we can find in P a predicate $K(m, n)$ such that although the result of substituting K for η^* in 2.16 is not itself provable in P , all the special cases for $K(m, 0)$, $K(m, 1)$, $K(m, 2)$, etc., are provable in P . Roughly, for an arbitrary m , we can define in P a collection which contains all and only the ordered pairs $\langle m, k \rangle$ such

⁷⁾ BERNAYS suggests the following more direct proof of theorem 6. If $P(x)$ is any arithmetic predicate, then a number t of a triad can be effectively determined such that for every number m , we have $m \eta^* t$ if and only if $P(E(m))$. Therefore, if η^* were recursive, we could effectively decide for every number k (for which indeed m can be effectively determined so that $k = E(m)$) whether $P(k)$ holds. Thus every arithmetic predicate would be recursive, which by Kleene's well-known results is not the case.

I am keeping my original proof because it might be considered more elementary in so far as it does not depend on Kleene's result.

that $k \leq n$ and $\eta^*(m, k)$, and then we say that $K(m, n)$ if and only if $\langle m, n \rangle$ belongs to the n -th such collection^a).

In discussing general set theory, we considered an arithmetic predicate \in^* and a predicate E providing an enumeration of the sets of the model. With regard to predicative set theory, the predicate η^* corresponds to \in^* . We proceed to introduce now a predicate R which corresponds to E and provides an enumeration of all the collections represented by triples of natural numbers in the preceding section.

The definition of the predicate $R(X, m)$ is somewhat similar to the definition 1.4 for $E(x, m)$. Roughly, for every X and m , $R(X, m)$ if and only if X is the m -th collection of P' (i. e., X is represented by the m -th triple of natural numbers described above). In order to define R , we define first a predicate $F(\langle x, n \rangle)$ such that $F(\langle x, n \rangle)$ when and only when x belongs to the n -th collection. More exactly, the definitions for F and R are as follows (compare WANG [13], p. 481^b):

2.18. Let $H(n, Y)$ stand for the following: Y is a relation and the domain of Y is contained in Sn (i. e., $\langle x, m \rangle$ belongs to Y only if $m \leq n$) and for all $k \leq n$ and for all x , $\langle x, k \rangle \eta Y$ if and only if one of the following conditions is satisfied:

- (1) $\tau_1(k) = 0$ and $x \in E(\tau_2(k))$.
- (2) $\tau_1(k) = 1$ and x is a pair $\langle y, z \rangle$ such that $y \in z$;
- (3) $\tau_1(k) = 2$ and $\langle x, \tau_2(k) \rangle \eta Y$ and $\langle x, \tau_3(k) \rangle \eta Y$;
- (4) $\tau_1(k) = 3$ and $\langle x, \tau_2(k) \rangle$ does not belong to Y ;
- (5) $\tau_1(k) = 4$ and there exists some y , $\langle \langle y, x \rangle, \tau_2(k) \rangle \eta Y$;
- (6) $\tau_1(k) = 5$ and x is a pair $\langle y, z \rangle$ and $\langle z, \tau_2(k) \rangle \eta Y$;
- (7) $\tau_1(k) = 6$ and x is a triple $\langle y, z, w \rangle$ and $\langle \langle z, w, y \rangle, \tau_2(k) \rangle \eta Y$;
- (8) $\tau_1(k) = 7$ and x is a triple $\langle y, z, w \rangle$ and $\langle \langle z, y, w \rangle, \tau_2(k) \rangle \eta Y$;

2.19. $F(\langle x, n \rangle)$ if and only if $\langle x, n \rangle$ belongs to some collection B such that $H(n, B)$.

2.20. $R(X, m)$ if and only if X is the collection of all and only the sets x such that $F(\langle x, m \rangle)$.

Using these definitions, we can prove:

2.21. For each constant n , we can prove in P that for all X and Y , if $R(X, n)$ and $R(Y, n)$, then $X = Y$.

2.22. For each constant n , we can prove in P that there exists a collection R such that $R(X, n)$.

^a) We omit the details of the definition of K and the proofs of the cases for $K(n, 0)$, $K(n, 1)$, etc., on the following grounds: (1) details of similar definitions and proofs are treated in WANG [15] in the general case; (2) the case of R which we shall consider soon is again similar, although somewhat more complex.

^b) Notice that the following definition actually combines two different things: (1) the translation of the conditions of 2.16 on the relation η^* into conditions on a collection of pairs; (2) the proof, by the DEDEKIND method, of the existence of a collection of pairs satisfying those conditions.

Let us write, whenever convenient, $X = R(m)$ in place of $R(X, m)$.

For each given number n , we can also prove that $R(n)$ has the desired properties. For example, if $\tau_1(n) = 0$, we can prove in P that for all x , $x \eta R(n)$ if and only if $x \in E(\tau_1(n))$; if $\tau_1(n) = 3$, we can prove in P that for all x , $x \eta R(n)$ if and only if x does not belong to $R(\tau_1(n))$; and so on.

Moreover, a comparison of 2.16 and 2.18—2.20 will convince us that the following can also be proved with the help of *Theorem 2*:

2.23. For each given n ($n = 0, 1, 2, \dots$), we can prove in P that for all m , $E(m) \eta R(n)$ if and only if $m \eta^* n^*$.

It should be emphasized, although we can prove in P with regard to R and η^* most of the desired results for each of the constant numbers $0, 1, 2, \dots$; there is no apparent way of proving in P the general results "for all m , $—m$ $—$ " in these cases (such as 2.21—2.23). The natural thing to do would be to make mathematical induction. Yet in the present connection this is not possible in P (not even in P'), because the axioms of P and P' only assure us existence of collections defined by sentences not containing bound large variables (i. e., the predicative collections defined without reference to totalities containing themselves) and therefore in P and P' we can only make induction on such collections and their defining sentences. Since we use bound large variables in defining both η^* and R in P (for example, the phrase "some collection B " in 2.19), we have in P and P' no way of making induction on sentences which involve the predicates $\eta^*(m, n)$ and $R(X, n)$. Yet in order to prove, for instance, 2.16 and general theorems corresponding to 2.21—2.23, we have to make induction on sentences involving these predicates.

In the next section, we shall discuss ways of extending the system P so as to make the general theorems derivable.

§ 3. Impredicative Collections and ω -consistency.

As we know, a system S is said to be ω -consistent, if for every predicate $H(m)$ of S , "for some m , it is not the case that $H(m)$ " is a theorem of S only if some of the statements $H(0), H(1), H(2), \dots$ is not a theorem of S . Therefore, if a system S is ω -consistent, then the system S' obtained from S by adding to theorems of S the following rule of infinite induction is consistent:

3.1. For every predicate $H(m)$ of the system S , if $H(0), H(1), \dots$ are theorems of S , then "for all m , $H(m)$ " is a theorem of S' .

Let W be the system obtained from P by adding 3.1 (replacing S and S' by P and W) as a new rule of inference. Then we can derive in W both 2.16 and, from 2.21—2.23, the following theorems:

3.2. For all X, Y , and n , if $R(X, n)$ and $R(Y, n)$, then $X = Y$.

3.3. For every n , there exists a collection X , $R(X, n)$.

3.4. For all m and n , $E(m) \eta R(n)$ if and only if $m \eta^* n^*$.

In this way, we have found an extension of P in which the desired general theorems become provable. Moreover, the consistency of W follows from the ω -consistency of P . But W is not satisfactory in one respect: the rule 3.1

involves infinitely many premises and cannot be considered a part of any ordinary formal or logistic system.

A more usual way of extending P is to introduce impredicative collections. Thus, let Q be the system obtained from P by replacing N10 by the stronger:

N10'. If $H(x)$ is any predicate of P , then there exists a collection Y which contains all and only those sets x for which $H(x)$.

In other words, Q uses the same symbols and notations as those of P and P' but contains as axioms N1—N3, N9, and N10'. We can develop number theory in Q in the same way as we do in P and P' , but on account of N10', we are now allowed to make induction on all sentences of these systems.

In particular, by formulating suitably the proofs of 2.21—2.23 and special cases of 2.16, the theorems 3.2—3.4 and 2.16 can be proved in Q by induction.

If we compare W and Q as two alternative ways of extending P to get 2.16 and 3.2—3.4, we find the following interesting phenomenon: while Q is a more formal system and therefore neater in a certain sense, it is less reliable than W because we know nothing about the consistency of Q yet we know that W is consistent since we can prove the ω -consistency of P by using a suitable intuitive model¹⁰.

This example gives hope to the conjecture that may be all the purposes served by impredicative classes in mathematics can be served by other modes of reasoning which, though formalistically more messy, are intuitively less opaque. For instance, it might be possible to prove many other theorems of Q not available in P in the system W' whose theorems include all those of P and also those derivable by the stronger rule:

3.5. For every $H(m)$ of P , if $H(0), H(1), H(2), \dots$ all are theorems of W' , then "for all $m, H(m)$ " is also a theorem of W' .

The system W' thus obtained contains many more theorems than W , but can also be seen to be consistent by using a suitable intuitive model for the system P .

So much for the conjectures.

We turn next to the connections between P and Q , and to the problem of extending P to obtain a categorical system relative to number theory.

Let us now consider the following two axioms of limitation¹¹:

ALG. For all x , there is some $m, x = E(m)$.

ALP. For all X , there is some $n, X = R(n)$.

By considerations similar to those used in the proofs of 1.15 and 1.23, we can prove that ALG is both independent of and compatible with the axioms of P and P' .

¹⁰ By this, we do not mean a constructive (intuitionistic) model.

¹¹ We note that in P and P' , we can define a collection E of ordered pairs $\langle x, n \rangle$ such that $\langle x, n \rangle \eta E$ if and only if $E(x, n)$ according to 1.4. However, we shall not emphasize the distinction between the collection E and the corresponding predicate $E(x, n)$.

Using impredicative collections, we can prove:

3.6. If Q is consistent, then ALP is independent of the axioms of P .

Proof. In Q , we can prove, by N10', the existence of a collection C such that for all natural numbers n , $n \in C$ if and only if n does not belong to $R(n)$. If for some m , $C = R(m)$, we would have: $m \in R(m)$ if and only if m does not belong to $R(m)$. Hence, for no m , $C = R(m)$. Hence, the denial of ALP is provable in Q . Therefore, if Q is consistent, then the denial of ALP is consistent with the axioms of P . Therefore, 3.6 is proved.

Similarly, we can also prove that if Q plus the other axioms of P' is consistent, then ALP is independent of the axioms of P' .

Let P^* be the system obtained from P by adding ALG and ALP as additional axioms.

3.7. Let us agree: $L(X)$ or X is limited if and only if there exists some natural number m such that X is $R(m)$.

3.8. Let the R -translation of an arbitrary statement of P and Q be the result obtained by restricting the range of the small variables to the limited sets and the range of the large variables to the limited collections. (Compare 1.18).¹²⁾

Using considerations similar to those involved in the proof of 1.19, we can prove:

3.9. We can prove in P and Q : the R -translation of a statement of P and Q is true if and only if the result obtained from it by substituting throughout the predicate $E(m) \in E(n)$ for $x \in y$ and $E(k) \in R(j)$ for $z \in Y$ is true.

Hence, since we can prove 3.4 and *Theorem 1* in Q , we can also prove:

3.10. The R -translation of a statement of P and Q is a theorem of Q if and only if its η^* -translation is one.

Therefore, since 2.16 is provable in Q for a suitable predicate, we have, by *Theorem 5*:

3.11. The η^* -translations and R -translations of all theorems of P' are theorems of Q .

Next we want to prove:

Theorem 7. The system obtained from P^* by adding the other axioms of P' is translatable into Q .

To simplify somewhat our considerations, we divide the proof into two parts.

3.12. The L -translations (cf. 1.18)¹³⁾ of all theorems of the system Q' obtained from Q by adding ALG as a new axiom, are theorems in Q .

¹²⁾ The phrase "statement of P and Q ", used here and elsewhere is awkward since the statements in P and Q are the same. This can be understood to mean "statement of P " or "statement of Q " according as which fits the context better.

The L -translation of a statement of P and Q differs from its R -translation in that the large variables in an L -translation are not restricted to the limited collections. Compare also the next footnote.

¹³⁾ We are assuming that in the L -translation of a statement containing also large variables, these variables remain unchanged.

Proof. From the considerations in the proof of *Theorem 4*, the L -translations of N1—N3 and ALG are provable in Q . Moreover, the L -translations of N9 and N10' are also theorems of Q , since the L -translation of a predicate of Q is again a predicate of Q and anything true of all sets is also true of all limited sets. For N9, we have to use also the fact that members of any limited set are again limited sets. Hence, 3.12 is proved.

Theorem 7 follows from 3.12 and the following assertion:

3.13. The R -translations of all theorems of P^* plus P' are provable in Q' .

Proof. By 3.11, the R -translations of all axioms of P' are theorems of Q' . Moreover, the R -translation of ALG is provable in Q' by considerations similar to those used in the proof of 1.23. Hence, to prove 3.13, we need only prove that the R -translation of ALP is provable in Q' .

In other words, if the R -translations of $Nn(y)$ and $R(X, m)$ are $Nn^+(y)$ and $R^+(X, m)$, then we want to prove in Q' :

3.14. For every X , if $L(X)$, then there exists a set y , such that $L(y)$, $Nn^+(y)$ and $R^+(X, y)$.

Proof. By 2.19 and 2.20, $R(X, m)$ if and only if: for every x , $x \eta X$ when and only when there exists some collection B such that $H(m, B)$ and $\langle x, m \rangle \eta B$. According to 2.18, the predicate $H(m, B)$ involves no other large variables besides B . Hence, by arguments in the proof of 1.20, since ALG is an axiom of Q' for all m and B , $H(m, B)$ is equivalent to its L -translation $H^+(m, B)$. For similar reason, $Nn(y)$ if and only if $Nn^+(y)$. Hence, using also (i) in the proof of 1.24, we need only prove: For every X , if $L(X)$, then there is an m such that for all limited sets x , x belongs to X if and only if there exists some collection B such that $L(B)$, $H(m, B)$, and $\langle x, m \rangle \eta B$. Hence, by expanding $L(X)$ according to 2.19, 2.20, and 3.7, we see that all we have to prove is: (1) For all m and B , if $H(m, B)$, then $L(B)$.

To prove this, we make induction on m . By 2.18, $H(0, A_0)$ if and only if A_0 is the empty collection e . Clearly, we can find a definite natural number m_0 , such that $R(e, m_0)$. Assume (1) is true when $m = j$. More specifically, assume that A_j is the collection such that $H(j, A_j)$, and that m_j is a number for which $R(A_j, m_j)$. We can then define A_{sj} in terms of A_j : for all x and k , $\langle x, k \rangle \eta A_{sj}$ if and only if $k \leq S_j$ and one of the conditions (1)—(8) in 2.18 (with A_j replacing Y) is satisfied. Then we can prove immediately: $H(S_j, A_{sj})$. Moreover, from the way in which A_{sj} is defined in terms of A_j , we can also find an elementary arithmetic function f such that for every j , if A_j is $R(i)$, then A_{sj} is $R(f(i))$. Hence, by induction, (1) is proved in Q' .

This completes the proof of 3.14, and therewith also the proof of 3.13 and *Theorem 7*.

From *Theorem 7*, we have immediately:

3.15. If Q is consistent, then the system obtained from P^* by adding the other axioms of P' is consistent.

3.16. If Q is consistent, then N10' is independent of the axioms of P and P' .

Proof. If $N10'$ were provable in P' , we would be able to prove in P' the existence of a collection C such that for all n , $n \in C$ if and only if n does not belong to $R(n)$. Then, ALP would be refutable in P' (cf. proof of 3.6), contrary to 3.15.

With regard to the CANTOR collection of all natural numbers n such that n does not belong to $R(n)$, we note the following difference between P and Q . By the LÖWENHEIM-SKOLEM theorem, if Q is consistent, it must have a denumerable model and there exists the collection of all natural numbers n such that n does not belong to the n -th collection of the model. Such a collection also cannot be proved to exist in Q . Since every collection of natural numbers which is defined by a property expressible in Q can be proved (by $N10'$) to exist, the defining property of the CANTOR collection must be inexpressible in Q . The CANTOR collection in 3.16 is different in that it is defined by a property which is expressible in the same system. We might say that Q possesses a certain kind of completeness which P and P' lack.

The independence of $N10'$ can be seen in another way. By known methods (cf., e. g., remarks in WANG [15]), it is possible to formalize in Q a consistency proof of G . Moreover, McNAUGHTON has recently proved¹⁴) a general theorem from which it follows that we can formally derive in Q the consistency of P from the consistency of G . Therefore, we have:

3.17. We can formalize in Q a consistency proof of P .

Hence, by GÖDEL's theorem on consistency proofs, Q must be different from P . Since $N10'$ is the only principle of Q not already in P , $N10'$ must be independent of the axioms of P .

Since ALG and ALP provide enumeration of all the sets and collections of P^* , it seems natural to ask whether P^* is categorical relative to number theory (compare Definition 1 and Theorem 3).

Suppose we make two assumptions: (1) 3.4 is provable in P^* ; (2) the predicate η^* is definable in the system Z of number theory. Then we can prove, using arguments strictly analogous to those used for 1.19, 1.20, and Theorem 3, that P^* is categorical relative to number theory. But since we have no proof for either (1) or (2), the situation is more complex.

Consider (1) first. As we discussed above, 3.4 is provable in Q , and the same proof cannot be used in P or P^* because certain induction cannot be carried out. For all we know, 3.4 may be independent of the axioms of P^* .

Assumption (2) is stronger than (1). If (2) is true, then (1) is also true because the difficulty with regard to induction would no longer exist. As we remarked after Theorem 6, (2) is probably not true. In any case, we have no proof that (2) is true. If (2) is not true, η^* lies beyond the part of P^* which correspond to the system Z of number theory. Nevertheless, by 2.23, special cases of 3.4 are provable in P^* . Hence, if either (1) or (2) is false,

¹⁴) See ROBERT McNAUGHTON, On establishing the consistency of systems, Dissertation, Harvard University, 1951. He observes that in his proof he makes use of certain ideas and methods introduced by I. L. NOVAK, *Fundamenta mathematica*, 37, 87-110 (1950).

we have, as with GÖDEL's undecidable statements, a case where "for all n , $H(n)$ " ($H(n)$ being "for all m , $E(m) \eta R(n)$ if and only if $m \eta *n^{**}$ ") is not a theorem of P^* , although $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, ..., for the numerals $0, 1, 2, \dots$ all are theorems of P^* . Therefore, if P^* is consistent, by adding as an axiom to P^* the denial of "for all n , $H(n)$ ", we have again a consistent system which is, however, ω -inconsistent. In any model for such a system, there must be an object which represents a natural number but does not correspond to any of the ordinary numerals. On account of such models, it becomes hard to see whether every statement of P^* has the same truth value in two models of P^* which provide the same interpretation for notions of number theory.

To avoid such anomalies, it is sufficient to restrict ourselves to ω -consistent models for P^* :

3.18. A model for an arbitrary system S is said to be ω -consistent, if and only if, for every predicate $H(x)$ of S , whenever it is true of all the ordinary numerals, "for all m , $H(m)$ " is also true¹⁵).

In any ω -consistent models for P^* , 3.4 is of course true¹⁶). If we restrict ourselves to ω -consistent models for P^* , we can prove, using arguments similar to those employed in the proof of Theorem 3, that P^* is categorical relative to number theory. Briefly, we can express this state of affairs by the following theorem:

Theorem 8. The system P^ is categorical relative to ω -consistent number theory.*

The problem whether P^* is simply categorical relative to number theory remains open.

On the one hand, by Theorem 8, P^* possesses a certain kind of categoricity. On the other hand, by GÖDEL's theorem, if P^* is consistent, there are certain statements of number theory which are undecidable in P^* . It is of interest to inquire whether there are, besides these, also statements of P^* about sets and collections in general, which are undecidable in P^* .

Intuitively, a collection X exists according to P^* if and only if there is some m , $X = R(m)$. If we assume that the totality of all natural numbers is given and fixed, then the totality T of all collections X such that $L(X)$ (i. e. there exists some m , $X = R(m)$) is also fixed. Therefore, on the basis of the axioms of P^* , the existence of each collection of the limited sets (i. e. the sets x such that for some m , $x = E(m)$) is completely decided according as whether it belongs to the above totality T or not. Nevertheless, it does not follow that all statements about the existence or non-existence of collections are decidable in P^* . Although, for each X , either " X belongs to T " or " X does

¹⁵) In general, "for all m , $H(m)$ " may be an abbreviation introduced by a contextual definition.

¹⁶) Incidentally, it is not hard to see that in every ω -consistent model for P^* , all the axioms of P' are true. In particular, the truth of N 4 and N 5 follow from the truth of their special cases and the truth of ALP.

not belong to T'' is true, it does not follow that at least one of the two is provable in P^* .

In other words, given an arbitrary collection X for which, say, $F(X)$ holds. We can prove or refute "there exists an X , $F(X)$ " in P^* , provided we can decide in P^* whether or not there is some m , $X = R(m)$. But there is no assurance that for each X , we can decide in P^* whether or not there exists some m for which $X = R(m)$. Indeed, using GÖDEL's theorem, we can prove that there must be cases where we cannot decide.

Thus let p be a known undecidable statement of P^* (for example, the arithmetic statement $\text{Con}(P^*)$ expressing the consistency of P^*). Consider the following existence statement: (α) there exists a collection X such that for all n , $n \eta X$ if and only if p is false and n does not belong to $R(n)$. Then we can prove the equivalence of (α) and p in P^* : If p , then (α) holds when we take the empty collection as X . If p is false, then the denial of (α) holds because we can prove in P^* that there exists no collection X such that for all n , $n \eta X$ if and only if n does not belong to X (compare 3.16). Hence we have¹⁷⁾:

3.19. The existence statement (α) is undecidable in P^* . It follows immediately by ALP:

3.20. The following existence statement is also undecidable in P^* : There exists an m such that the collection X defined by (α) is $R(m)$.

There is also another kind of derivative undecidable statements in P^* . For a given predicate $H(x)$ of P^* containing no large variables, we can find a definite numeral k such that whether k belongs to the collection of sets satisfying $H(x)$, is demonstrably undecidable in P^* . Thus let us carry out in P^* an arithmetization of the syntax of P^* and define in P^* the arithmetic predicate (β) " $s(x, x)$ is not a theorem of P^* " (i. e., the predicate "the result of substituting the numeral x for the variable " x " in the expression of P^* whose GÖDEL number is x is not a theorem of P^* ", cf. HILBERT-BERNAYS [8], § 5. b)). The predicate is of the form $H(x)$ and contains no large variables. Therefore, by N10, there exists a collection Y of P^* such that for all x , $x \eta Y$ if and only if $s(x, x)$ is not a theorem of P^* . Since " $s(m, m)$ is not a theorem of P^* ", where m is the GÖDEL number of (β) , is known to be undecidable in P^* (HILBERT-BERNAYS, *ibid.*), the statement " m belongs to the collection Y (just described)" is also undecidable in P^* :

3.21. It is undecidable in P^* whether the set m , which is the GÖDEL number of the expression (β) , belongs to the collection Y of P^* consisting of all sets x which satisfy the predicate (β) .

Of course, in 3.21 we need, as usual, the hypothesis of the ω -consistency of P^* . We can also find similarly an undecidable statement corresponding of

¹⁷⁾ We note that similar considerations also apply to G^* . For example, if p is a given undecidable statement, then the statement "there exists some set y such that for all x , $x \in y$ if and only if p is false and $x = x$ " is also undecidable.

So far as we know, the general method of generating equivalent undecidable statements in the above manner was first introduced in a different connection by W. V. QUINE (see *Journal of symbolic logic*, 6, 140).

ROSSER'S (HILBERT-BERNAYS, *ibid.*, p. 275) and use merely the hypothesis of the consistency of P^* .

It is clear from these considerations that undecidable statements of the form "a (certain special) set belongs to a (certain special) collection" are obtainable in all set theories which are not weaker than P .

Before concluding this section¹⁸), we make a few remarks regarding models and natural numbers.

Closely related to the ω -consistent models are the models with regular natural numbers¹⁹):

3.22. A model of a system S is said to be one with regular natural numbers if the natural numbers of the models (i. e., the objects satisfying the predicate Nx being a natural number in the system) are exactly the objects corresponding to the numerals 0, 1, 2, etc.

Clearly every model with regular natural numbers is also an ω -consistent model. But the converse is not as obvious. Indeed, it is quite possible that we can have an ω -consistent model in which there is a natural number not denoted by any name or description (the-expression) of the system. However, we can prove a weaker relation:

3.23. A model in which every object is denoted by a term of the given system is one with regular natural numbers, if and only if it is ω -consistent.

Proof. Assume there were an object denoted by t which is a natural number in the model but is distinct from all the objects denoted by the numerals. Then we would have " $0 \neq t$ ", " $1 \neq t$ ", etc. all are true, but "for all m , $m \neq t$ " false in the model. Therefore, we would have an ω -inconsistent model.

In terms of models with regular natural numbers, we can also express the import of ALG and ALP in the following manner.

3.24. Let us assume a sequence of standard terms of G^* and P^* one for each of all the finite sets e , $\{e\}$, $\{\{e\}\}$, $\{e, \{e\}\}$, etc. Then, in every ω -consistent model of G^* or P^* , if "for some x , $F(x)$ " is true, there is some term t of the above sequence such that "for some x , $F(x)$ and $x = t$ " is true.

3.25. Let us assume an enumeration of all the predicates $H(y)$ of P^* which do not contain large variables. Then, in every ω -consistent model for P^* , if "for some X , $F(X)$ " is a theorem, then there is some $H_i(y)$ of the above sequence such that "for some X , $F(X)$ and for all y , $y \neq X$ if and only if $H_i(y)$ " is true.

¹⁸) Many of the considerations in this and the previous sections can be generalized to apply to further predicative extensions of P and P' , or to systems of the ramified theory of types without the axiom of reducibility.

¹⁹) This kind of model is discussed by L. HENKIN, *Journal of symbolic logic* 15, 81—91 (1950). In his terminology, a model with natural numbers which are non-regular would be a "non-standard model". However, we find it difficult to obtain an exact definition of the general notion of standard models.

Eine Darstellung für Identitäten zwischen den Kommutatoren eines Ringes*).

Von

HERIBERT MAULER in Marburg.

Einleitung.

Gegeben sei der Polynombereich $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$ mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{R} . Es soll \mathfrak{R} ein Ring mit Einselement sein. Bedeuten p_r, p'_r Produkte in den $x_\mu, k_{ij}, i, j = 1, \dots, m, i \neq j$, Symbole und α_r Elemente aus \mathfrak{R} , so sollen die in k_{ij} linearen und homogenen Elemente der Gestalt

$$c = \sum_{r=1}^n \alpha_r p_r k_{ij} p'_r$$

betrachtet werden. Ersetzt man in c alle k_{ij} durch $x_i x_j - x_j x_i$, so erhält man ein Element \hat{c} aus $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$. Ist $\hat{c} = 0$, so heiße c eine Identität zwischen Kommutatoren. Der Hauptsatz, der bewiesen werden soll, gibt für die Gruppe dieser Identitäten ein Erzeugendensystem an. Beim Beweis wird von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, einen Kommutator $p k_{ij} p'$ als gerichtete Strecke mit dem Anfangspunkt $p x_j x_i p'$ und dem Endpunkt $p x_i x_j p'$ aufzufassen. Diese Auffassung gestattet es, zur Lösung der Aufgabe auf Sätze aus der Theorie der Ketten zurückzugreifen. Insbesondere werden die geschlossenen Ketten der Gruppenbilder von symmetrischen Gruppen herangezogen, zu denen die Identitäten c in einfacher Beziehung stehen, wodurch sie sich leicht charakterisieren lassen.

In § 1 wird ein vorbereitender Satz über geschlossene, eindimensionale Ketten gebracht. In § 2 wird der Hauptsatz ausgesprochen und bewiesen, um dann in § 3 zu einem neuen Beweise eines Satzes von E. WITT benutzt zu werden.

§ 1.

Gegeben sei ein Streckenkomplex. Ist σ_i eine Strecke dieses Komplexes, $P_{A(i)}$ ihr Anfangs- und $P_{E(i)}$ ihr Endpunkt, so sei $P_{E(i)} - P_{A(i)}$ der Rand von σ_i . Ist \mathfrak{R} ein Ring mit Einselement, so gilt für die geschlossenen Ketten $c = \sum \alpha \sigma$ mit Koeffizienten aus \mathfrak{R} der

Satz 1: Jede geschlossene Kette

$$c = \sum_{r=1}^l \alpha_r \sigma_r, \quad \alpha_r \neq 0,$$

läßt sich als Linearkombination geschlossener Ketten $\sum \varepsilon \sigma$, $\varepsilon = \pm 1$, mit Koeffizienten aus \mathfrak{R} darstellen.

*) Herrn Prof. REIDEMEISTER, unter dessen Anleitung diese Arbeit entstanden ist, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Beweis: Dieser geschieht induktiv nach der Kettenlänge l . Für $l = 1$ ist die Behauptung trivial. Sie sei schon bis zur Länge $l - 1$ bewiesen.

Enthält c eine singuläre Strecke, etwa σ_μ , so fällt $c - \alpha_\mu \sigma_\mu$ unter die Induktionsvoraussetzung.

Die Kette c enthalte nun keine singulären Strecken. Die Strecken $\pm \sigma_v$, $v = 1, \dots, l$, bilden mit ihren Randpunkten einen Streckenkomplex $\tilde{\mathfrak{C}}$. Jeder seiner Punkte berandet mindestens zwei Streckenpaare. Berandet nämlich der Punkt P nur das eine Streckenpaar $\pm \sigma_\theta$, so kommt P im Rande von c nur einmal mit dem Koeffizienten $\varepsilon \alpha_\theta$ vor, da σ_θ nicht singulär ist. Weil c geschlossen ist, muß dann $\alpha_\theta = 0$ sein entgegen der Voraussetzung. Es gibt also eine geschlossene Kette \tilde{c} mit Koeffizienten ± 1 und Strecken aus $\tilde{\mathfrak{C}}$, welche die Strecke $+ \sigma_1$ enthält. Dann ist aber $c - \alpha_1 \tilde{c}$ eine geschlossene Kette mit weniger als l Gliedern und fällt unter die Induktionsvoraussetzung.

§ 2.

Die folgenden Ausführungen entstammen einer Analyse des Beweises eines Satzes von E. WITT in § 3. Es zeigt sich, daß es bei dem Beweis darauf ankommt, für gewisse Elemente eines Ringes, die Identitäten zwischen Kommutatoren genannt werden sollen, eine Darstellung anzugeben.

Es sei $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$ der Polynombereich in den m Variablen x_1, \dots, x_m und \mathfrak{R} ein Koeffizientenbereich, der ein Ring mit Einselement sein soll. Bedeutet α ein Element aus \mathfrak{R} , p bzw. p' ein Produkt in den x und k_{ij} den Kommutator $x_i x_j - x_j x_i$, $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$, aus $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$, so heiße ein in k_{ij} lineares und homogenes Element

$$(1) \quad \sum_{v=1}^l \alpha_v p_v k_{ij} p'_v$$

eine Identität zwischen Kommutatoren, wenn

$$\sum_{v=1}^l \alpha_v p_v (x_i x_{j_v} - x_{j_v} x_i) p'_v$$

in $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$ gleich Null ist.

Hauptsatz: Jede Identität (1) zwischen Kommutatoren läßt sich als Linearkombination der Identitäten

- I $p \{k_{\mu\nu} + k_{\nu\mu}\} p'$
- II $p \{(x_1 k_{\mu\nu} + k_{\nu\mu} x_1) + (x_\mu k_{\nu\lambda} + k_{\lambda\nu} x_\mu) + (x_\nu k_{\lambda\mu} + k_{\mu\lambda} x_\nu)\} p'$
- III $p \{k_{\mu\nu} p' x_\theta x_\sigma + x_\sigma x_\mu p' k_{\theta\sigma} + k_{\nu\mu} p' x_\sigma x_\theta + x_\sigma x_\nu p' k_{\theta\sigma}\} p''$

mit Koeffizienten aus \mathfrak{R} darstellen.

Beweis: Faßt man die Produkte p in den x als Punkte und den Kommutator $p' k_{ij} p''$ als gerichtete Strecke mit dem Anfangspunkt $p' x_j x_i p''$ und dem Endpunkt $p' x_i x_j p''$ auf und ist $- p' k_{ij} p''$ die zu $p' k_{ij} p''$ entgegengesetzt gleiche Strecke, so erfüllt die Gesamtheit der Punkte p und der Strecken $\pm p' k_{ij} p''$ die Axiome eines Streckenkomplexes \mathfrak{C} . Die Elemente (1) sind die geschlossenen, eindimensionalen Ketten von \mathfrak{C} mit Koeffizienten aus \mathfrak{R} . Nach Satz 1 ist dann jede Kette (1) durch eine Linearkombination geschlossener

Ketten der Gestalt

$$(2) \quad \sum \varepsilon p k p', \quad \varepsilon = \pm 1,$$

mit Koeffizienten aus \mathfrak{K} darstellbar.

Nun ist \mathfrak{C} nicht zusammenhängend und zerfällt in eine Reihe zusammenhängender Teilkomplexe \mathfrak{C}^* . Dabei wird die Menge der Punkte eines \mathfrak{C}^* von allen Punkten gebildet, die aus einem einzigen Produkt $p^* = x_{i_1} \dots x_{i_n}$, $i_1 \leq \dots \leq i_n$, durch Permutation der Faktoren hervorgehen. Jede geschlossene Kette (2) zerfällt deshalb in geschlossene Teilketten

$$\sum \varepsilon p k p', \quad \dim(p p') = n - 2,$$

die jeweils nur Strecken aus einem \mathfrak{C}^* enthalten. Diese Ketten lassen sich nun leicht durch die im Satze genannten darstellen. Um dies einzusehen, werden Gruppenbilder und Restklassengruppenbilder von symmetrischen Gruppen herangezogen.

Es sei \mathfrak{S}_n die von den $n-1$ Transpositionen t_1, \dots, t_{n-1} erzeugte symmetrische Gruppe, die bekanntlich ein definierendes Relationensystem der Gestalt

$$I^*: t_v^2 = 1, \quad II^*: (t_v, t_{v+1})^3 = 1, \quad III^*: (t_v, t_\mu)^2 = 1, \quad v - \mu \geq 2;$$

besitzt.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der erzeugende Punkt p^* eines \mathfrak{C}^* lauter verschiedene Faktoren enthält oder nicht.

Enthält p^* lauter verschiedene Faktoren und ist $\dim(p^*) = n$, so ist \mathfrak{C}^* isomorph zum Gruppenbild \mathfrak{C}' von \mathfrak{S}_n , das man bekanntlich erhält, indem man die Elemente S aus \mathfrak{S}_n als Punkte auffaßt und zwei Punkte S und $S t_v$ durch eine Strecke $S \tau_v$ verbindet, deren Anfangspunkt S und deren Endpunkt $S t_v$ ist, und die zu diesen Strecken entgegengesetzt gleichen hinzunimmt.

Die Isomorphie von \mathfrak{C}' und \mathfrak{C}^* sieht man ein, wenn man für ein Produkt p mit $\dim(p) = n$ und Elementen aus \mathfrak{S}_n definiert

$$p t_v = p' x_{i_v} x_{i_v+1} p'' t_v = p' x_{i_v+1} x_{i_v} p'' \\ p S t_v = (p S) t_v$$

und dem Punkt S aus \mathfrak{C}' den Punkt $p^* S = p' x_{i_v} x_{i_v+1} p''$ aus \mathfrak{C}^* und der Strecke $\varepsilon S \tau_v$ aus \mathfrak{C}' die Strecke $\varepsilon p' t_{i_v+1} p''$ aus \mathfrak{C}^* zuordnet. Dadurch wird \mathfrak{C}' homomorph auf \mathfrak{C}^* abgebildet. Da jedoch beide Komplexe je $n!$ Punkte besitzen, ist diese Abbildung ein Isomorphismus.

Die Gruppe der geschlossenen, eindimensionalen Ketten von \mathfrak{C}^* ist also isomorph zur Gruppe der geschlossenen, eindimensionalen Ketten von \mathfrak{C}' . Für letztere bilden aber nach einem bekannten Satz die den Relationen $S t_v^2 S^{-1}$, $S(t_v, t_{v+1})^3 S^{-1}$, $S(t_v, t_\mu)^2 S^{-1}$ zugeordneten Ketten

$$I' \quad S \tau_v + S t_v \tau_v \\ II' \quad S \tau_v + S t_v \tau_{v+1} + S t_v t_{v+1} \tau_v + S t_v t_{v+1} t_v \tau_{v+1} + S t_v t_{v+1} t_v t_{v+1} \tau_v \\ \quad + S t_v t_{v+1} t_v t_{v+1} t_v \tau_{v+1} \\ III' \quad S \tau_v + S t_v \tau_\mu + S t_v t_\mu \tau_v + S t_v t_\mu t_v \tau_\mu$$

ein Erzeugendensystem. Ersetzt man in diesen Ketten die Strecken durch ihre isomorphen aus \mathfrak{E}^* , so erhält man bzw. Ketten der Gestalt I, II, III, die also ein Erzeugendensystem für die geschlossenen, eindimensionalen Ketten von \mathfrak{E}^* bilden.

Jetzt enthalte p^* die gleichen Faktoren $x_{i_{\varrho}} = \dots = x_{i_{\varrho} + \mu_{\varrho}}$, $\varrho = 1, \dots, r$. Um \mathfrak{E}^* mit \mathfrak{E}' in Verbindung setzen zu können, soll \mathfrak{E}^* durch Hinzunahme singulärer Strecken $\varepsilon p' k_{i_i} p''$ zu einem regulären Komplex $\bar{\mathfrak{E}}^*$ der Ordnung $2(n-1)$ erweitert werden. Jeder Punkt von \mathfrak{E}^* besitzt eine gerade Ordnung $\leq 2(n-1)$, die durch Anheften von singulären Strecken auf $2(n-1)$ gebracht werden kann. Zum Beispiel müssen dazu im Punkte p^* die singulären Strecken

$$\varepsilon x_{i_1} \dots x_{i_{\lambda_{\varrho} + \nu - 1}} k_{i_{\lambda_{\varrho} + \nu} i_{\lambda_{\varrho} + \nu + 1}} x_{i_{\lambda_{\varrho} + \nu + 2}} \dots x_{i_n}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \mu_{\varrho} - 1, \quad \varrho = 1, \dots, r,$$

angeheftet werden.

Ist \mathfrak{U} die von den Transpositionen $t_{\lambda_{\varrho}}, \dots, t_{\lambda_{\varrho} + \mu_{\varrho} - 1}$, $\varrho = 1, \dots, r$, erzeugte Untergruppe von \mathfrak{S}_n , so gilt für alle Elemente U aus \mathfrak{U} : $p^* U = p^*$, da die gleichen Faktoren von p^* nebeneinander stehen. Ist andererseits $p^* S = p^*$, so ist S ein Element aus \mathfrak{U} , wie man sieht, wenn man sich für den Augenblick die Faktoren von p^* als verschieden denkt.

Jetzt ist leicht zu sehen, daß $\bar{\mathfrak{E}}^*$ zum Restklassengruppenbild $\bar{\mathfrak{E}}'$ von \mathfrak{S}_n nach \mathfrak{U} isomorph ist. Man erhält $\bar{\mathfrak{E}}'$ bekanntlich dadurch, daß man die Restklassen $\mathfrak{U} \bar{S}$ von \mathfrak{S}_n nach \mathfrak{U} als Punkte auffaßt und zwei Punkte $\mathfrak{U} \bar{S}$ und $\mathfrak{U} \bar{S}'$ durch eine Strecke $\bar{S} \tau_r$ verbindet, deren Anfangspunkt $\mathfrak{U} \bar{S}$ und deren Endpunkt $\mathfrak{U} \bar{S}'$ ist, und die zu diesen Strecken entgegengesetzt gleichen hinzunimmt. Daß $\bar{\mathfrak{E}}'$ zu $\bar{\mathfrak{E}}^*$ isomorph ist, sieht man ein, wenn man dem Punkte $\mathfrak{U} \bar{S}$ bzw. der Strecke $\varepsilon \bar{S} \tau_r$ aus $\bar{\mathfrak{E}}'$ den Punkt $p^* \bar{S} = p' x_{i_r} x_{i_r + 1} p''$ bzw. die Strecke $\varepsilon p' k_{i_r + 1} i_r p''$ aus $\bar{\mathfrak{E}}^*$ zuordnet und beachtet, daß aus $\mathfrak{U} \bar{S} \neq \mathfrak{U} \bar{S}'$ auch $p^* \bar{S} \neq p^* \bar{S}'$ folgt.

Die Gruppen der geschlossenen, eindimensionalen Ketten von $\bar{\mathfrak{E}}'$ und $\bar{\mathfrak{E}}^*$ sind also zueinander isomorph.

Jeder geschlossenen Kette mit Strecken aus $\bar{\mathfrak{E}}'$ läßt sich bekanntlich mindestens ein geschlossener Weg w mit dem Grundpunkt \mathfrak{U} zuordnen, so daß die w zugeordnete Kette die vorgegebene ist. Das w entsprechende Gruppenelement läßt sich nun immer durch Multiplikation mit einem geeigneten Element aus \mathfrak{U} zu einer Relation ergänzen, da die geschlossenen Wege mit dem Grundpunkt \mathfrak{U} eindeutig den Elementen R entsprechen, wobei R eine Relation und U ein Element aus \mathfrak{U} bedeutet. Die Kette des einer Relation zugeordneten Weges ist aber durch Ketten der Gestalt I', II', III' mit Strecken aus $\bar{\mathfrak{E}}'$ darstellbar. Da \mathfrak{U} von einer Teilmenge der Erzeugenden von \mathfrak{S}_n erzeugt wird, so entsprechen diesen Erzeugenden im Punkte \mathfrak{U} singuläre Strecken. Daher läßt sich jede geschlossene eindimensionale Kette von $\bar{\mathfrak{E}}'$ nach Hinzufügung geeigneter singulärer Strecken durch Ketten der Gestalt I', II', III' darstellen. Entsprechend sind dann die geschlossenen eindimensionalen

Ketten von $\bar{\mathfrak{C}}^*$ nach Hinzufügung geeigneter singulärer Strecken durch Ketten der Gestalt I, II, III darstellbar.

Die geschlossenen eindimensionalen Ketten von \mathfrak{C}^* gehen aus den geschlossenen eindimensionalen Ketten von $\bar{\mathfrak{C}}^*$ hervor, indem man alle singulären Strecken streicht. Aus der speziellen Gestalt der Ketten I, II, III folgt nun: Ist in I eine Strecke singulär, so ist es auch die zweite. Ist in II bzw. III eine Strecke singulär, so gibt es notwendig eine zweite singuläre Strecke und die restlichen Strecken liefern zwei bzw. eine Kette der Gestalt I. Also wird auch in dem Falle, in welchem p^* gleiche Faktoren enthält, die Gruppe der geschlossenen eindimensionalen Ketten von \mathfrak{C}^* von den Ketten der Gestalt I, II, III erzeugt.

§ 3.

Mit dem Hauptsatz ergibt sich ein neuer Beweis für einen wichtigen Satz von E. WITT¹⁾. Zunächst einige Vorbemerkungen:

Ein LIESCHER Ring \mathfrak{L} geht aus einem \mathfrak{R} -Modul $\bar{\mathfrak{L}}$ durch Erweiterung mit einer Operation „ \circ “ hervor, die folgenden Axiomen genügt:

1. Mit l und l' aus $\bar{\mathfrak{L}}$ liegt auch $l \circ l'$ in $\bar{\mathfrak{L}}$.
2. Die Operation „ \circ “ ist mit der Addition beiderseits distributiv verbunden.
3. Es gelten die Relationen $l \circ l = 0$ und die Jacobi-Identität $l \circ (l' \circ l'') + l' \circ (l'' \circ l) + l'' \circ (l \circ l') = 0$.
4. Mit α aus \mathfrak{R} gilt $(\alpha l) \circ l' = \alpha (l \circ l') = l \circ (\alpha l')$.

Ist z. B. \mathfrak{R} ein assoziativer Schieferring mit den Elementen a, b, \dots , so läßt sich dessen additive Gruppe durch Einführen der Operation $a \circ b = ab - ba$ zu einem LIESCHEN Ring erweitern. Dabei bedeutet ab und ba die Produktbildung in \mathfrak{R} .

Jedem assoziativen Schieferring läßt sich so ein LIESCHER Ring zuordnen. Umgekehrt läßt sich aber auch jedem LIESCHEN Ring bis auf Isomorphie ein assoziativer Ring mit gewissen Eigenschaften zuordnen. Dies sagt der

Satz von WITT:

Voraussetzung: \mathfrak{L} sei ein LIESCHER Ring, dessen additive Gruppe ein \mathfrak{R} -Modul mit der linear unabhängigen Basis b_1, \dots, b_m sei. Es soll nur der Fall eines endlichen Basissystems betrachtet werden. \mathfrak{R} sei ein Ring und besitze die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Die Kreismultiplikation sei durch

$$b_i \circ b_j = \sum_{r=1}^m \gamma_{ijr} b_r$$

definiert. Die Strukturkonstanten γ_{ijr} von \mathfrak{L} sind schiefsymmetrisch in den ersten beiden Indizes, und die Jacobi-Identität induziert zwischen ihnen die Relationen

$$(3) \quad \sum_{r=1}^m (\gamma_{ijr} \gamma_{krl} + \gamma_{jkr} \gamma_{ilr} + \gamma_{kir} \gamma_{jrl}) = 0, \quad i, j, k, l = 1, \dots, m.$$

¹⁾ E. WITT: Treue Darstellung LIESCHER Ringe. Journal reine u. angew. Mathem. 177 (1937), Satz 1.

Behauptung: Durch \mathcal{Q} ist bis auf Isomorphie eindeutig ein assoziativer Ring \mathfrak{A} bestimmt, der folgende Eigenschaften besitzt:

1. Erweitert man die additive Gruppe von \mathfrak{A} nach obiger Vorschrift zu einem LIESCHEN Ring \mathcal{Q}^* , so ist \mathcal{Q} zu einem LIESCHEN Unterring \mathcal{Q}^{**} von \mathcal{Q}^* isomorph.

2. Alle Elemente aus \mathfrak{A} lassen sich mit den Operationen aus \mathfrak{A} durch die Elemente aus \mathcal{Q}^{**} darstellen. Kurz, die Elemente aus \mathcal{Q}^{**} erzeugen \mathfrak{A} .

3. Ist $\bar{\mathfrak{A}}$ ein anderer assoziativer Ring, ist $\bar{\mathcal{Q}}^*$ der ihm nach obiger Vorschrift zugeordnete LIESCHE Ring und ist

a) \mathcal{Q} auf einen LIESCHEN Unterring $\bar{\mathcal{Q}}^{**}$ von $\bar{\mathcal{Q}}^*$ homomorph abbildbar und wird

b) $\bar{\mathfrak{A}}$ von den Elementen aus $\bar{\mathcal{Q}}^{**}$ erzeugt, so läßt sich \mathfrak{A} so homomorph auf $\bar{\mathfrak{A}}$ abbilden, daß dabei die Elemente aus \mathcal{Q}^{**} auf die Elemente aus $\bar{\mathcal{Q}}^{**}$ abgebildet werden.

Beweis: Man ordne den Basiselementen b_i umkehrbar eindeutig die Variablen x_i , $i = 1, \dots, m$, zu. Es sei \mathfrak{R} der Polynombereich in diesen m Variablen x_i und dem Koeffizientenbereich \mathfrak{K} . Jetzt betrachte man das zweiseitige Ideal \mathfrak{J} in \mathfrak{R} , das von den Elementen

$$\bar{k}_{ij} = x_i x_j - x_j x_i - \sum_{\nu=1}^m \gamma_{ij\nu} x_\nu, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad i < j$$

erzeugt wird. Dabei sind die Koeffizienten $\gamma_{ij\nu}$ die Strukturkonstanten von \mathcal{Q} .

Der Faktorring $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}/\mathfrak{J}$ hat dann die im Satz verlangten Eigenschaften, wie gezeigt werden wird.

Der dem Ring \mathfrak{A} nach obiger Vorschrift zugeordnete LIESCHE Ring sei \mathcal{Q}^* . Er enthält einen Unterring \mathcal{Q}^{**} , dessen additive Gruppe der \mathfrak{R} -Modul mit der Basis x_1, \dots, x_m ist, denn

$$x_i \circ x_j = x_i x_j - x_j x_i = \sum_{\nu=1}^m \gamma_{ij\nu} x_\nu, \quad \text{modulo } \mathfrak{J}.$$

Es ist nun \mathcal{Q} isomorph zu \mathcal{Q}^{**} . Dies leistet die Zuordnung $b_i \rightarrow x_i$. Diese Zuordnung bildet zunächst \mathcal{Q} homomorph auf \mathcal{Q}^{**} ab. Die Abbildung ist aber umkehrbar eindeutig, weil alle in x_i linearen Elemente $\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu x_\nu$ Repräsentanten von \mathfrak{R} modulo \mathfrak{J} sind. Die Hauptleistung für den Beweis liegt darin, dies zu zeigen, was weiter unten durch Anwendung des Hauptsatzes geschieht.

Damit besitzt \mathfrak{A} die Eigenschaft 1. Eigenschaft 2 folgt aus der Definition von \mathfrak{R} .

Es sei nun $\bar{\mathfrak{A}}$ der in 3 genannte assoziative Ring, und bei dem Homomorphismus von \mathcal{Q} auf $\bar{\mathcal{Q}}^{**}$ gehe b_i über in \bar{x}_i . Durch die Zuordnung $x_i \rightarrow \bar{x}_i$ wird \mathfrak{R} ringhomomorph auf $\bar{\mathfrak{A}}$ abgebildet. Da dabei die Elemente aus \mathfrak{J} auf die Null aus $\bar{\mathfrak{A}}$ abgebildet werden, wird hierbei auch \mathfrak{A} ringhomomorph auf $\bar{\mathfrak{A}}$ abgebildet. Dieser Homomorphismus bildet \mathcal{Q}^* auf $\bar{\mathcal{Q}}^*$ ab, denn die additive Gruppe von \mathcal{Q}^* bzw. $\bar{\mathcal{Q}}^*$ ist mit der additiven Gruppe von \mathfrak{A} bzw. $\bar{\mathfrak{A}}$ identisch und aus der Produkttreue der Abbildung von \mathfrak{A} auf $\bar{\mathfrak{A}}$ folgt, daß Kreisprodukte

aus \mathcal{Q}^* in Kreisprodukte aus $\bar{\mathcal{Q}}^*$ übergehen. Speziell ergibt sich, daß \mathcal{Q}^{**} auf $\bar{\mathcal{Q}}^{**}$ abgebildet wird, denn $\sum_{v=1}^m \alpha_v x_v$ aus \mathcal{Q}^{**} ist zugeordnet $\sum_{v=1}^m \alpha_v \bar{x}_v$ aus $\bar{\mathcal{Q}}^{**}$.

Damit besitzt \mathfrak{A} auch die Eigenschaft 3.

Um zu zeigen, daß \mathfrak{A} bis auf Isomorphie eindeutig durch \mathcal{Q} und die Eigenschaften 1, 2 und 3 bestimmt ist, sei \mathfrak{A}' ein anderer assoziativer Ring, der ebenfalls die Eigenschaften 1, 2 und 3 besitzt. Dann läßt sich nach Eigenschaft 3 \mathfrak{A} auf \mathfrak{A}' und ebenso \mathfrak{A}' auf \mathfrak{A} ringhomomorph abbilden. Also ist \mathfrak{A} isomorph zu \mathfrak{A}' .

Jetzt soll gezeigt werden, daß das Ideal \mathfrak{J} keine linearen Elemente $\sum_{v=1}^m \alpha_v x_v$ enthält. Zu diesem Zweck wird zunächst der Hauptsatz auf die Elemente des Ideals angewendet.

Satz 2: Es sei

$$h^{(n)} = \sum_{v=1}^l \alpha_v p_v k_{i_v i_r} p'_v$$

eine Identität zwischen Kommutatoren mit $\dim(p_v, p'_v) = n - 2$, und

$$\bar{h}^{(n)} = \sum_{v=1}^m \alpha_v p_v \bar{k}_{i_v i_r} p'_v$$

sei dasjenige Element aus dem Ideal \mathfrak{J} , das man aus $h^{(n)}$ erhält, wenn man die Kommutatoren k_{ij} durch die Erzeugenden \bar{k}_{ij} des Ideals ersetzt. Dann ist entweder

$$\bar{h}^{(n)} = 0 \text{ oder } \bar{h}^{(n)} = \sum_{v=1}^{l'} \alpha'_v p'_{v'} \bar{k}_{i'_{v'} i'_{r'}} p''_{v''}$$

mit $\dim(p'_{v'}, p''_{v''}) \leq n - 3$.

Beweis: Nach dem Hauptsatz genügt es zu untersuchen, in welche Elemente des Ideals \mathfrak{J} die Identitäten I, II, III übergehen, wenn man nach der angegebenen Vorschrift verfährt. Man erhält so folgende Identitäten in \mathfrak{R} :

Aus I wird wegen der Schiefsymmetrie der Strukturkonstanten in den ersten beiden Indizes

$$\text{I} \quad p \{ \bar{k}_{\mu\nu} + \bar{k}_{\nu\mu} \} p' = 0.$$

Aus II wird wegen der Relationen (3)

$$\begin{aligned} \text{II} \quad p \{ (x_\lambda \bar{k}_{\mu\nu} + \bar{k}_{\nu\mu} x_\lambda) + (x_\mu \bar{k}_{\nu\lambda} + \bar{k}_{\lambda\nu} x_\mu) + (x_\nu \bar{k}_{\lambda\mu} + \bar{k}_{\mu\lambda} x_\nu) \} p' = \\ = p \left\{ \sum_{\varrho=1}^m (\gamma_{\nu\varrho} \bar{k}_{\varrho\lambda} + \gamma_{\lambda\varrho} \bar{k}_{\varrho\mu} + \gamma_{\mu\varrho} \bar{k}_{\varrho\nu}) \right\} p'. \end{aligned}$$

Aus III wird wegen der Schiefsymmetrie der Strukturkonstanten

$$\begin{aligned} \text{III} \quad p \{ \bar{k}_{\mu\nu} p' x_\varrho + x_\varrho x_\mu p' \bar{k}_{\varrho\nu} + \bar{k}_{\nu\mu} p' x_\varrho + x_\varrho x_\nu p' \bar{k}_{\varrho\mu} \} p'' = \\ = p \left\{ \sum_{\tau=1}^m (\gamma_{\nu\mu\tau} x_\tau p' \bar{k}_{\varrho\sigma} + \gamma_{\varrho\sigma\tau} \bar{k}_{\mu\nu} p' x_\tau) \right\} p''. \end{aligned}$$

Jetzt folgt der

Satz 3: Die Schiefsymmetrie der Strukturkonstanten $\gamma_{\lambda\mu\nu}$ in den ersten beiden Indizes und die zwischen ihnen durch die Jacobi-Identität induzierten

Relationen (3) sind notwendig und hinreichend dafür, daß das Ideal \mathfrak{J} keine linearen Elemente $\sum_{v=1}^m \alpha_v x_v$ enthält.

Beweis: Daß die Bedingungen notwendig sind, lehren die Identitäten I und II, die sonst lineare Elemente liefern würden.

Man sieht, daß

$$(4) \quad \sum_{v=1}^l \alpha_v \bar{k}_{i_v j_v}$$

kein lineares Element liefern kann. Denn da $\sum_{v=1}^l \alpha_v k_{i_v j_v}$ eine Identität zwischen Kommutatoren ist, läßt sich (4) durch Identitäten I darstellen.

Jetzt folgt durch Induktion, daß auch

$$\sum_{v=1}^m \alpha_v x_v = \sum_{\substack{\dim(\mathcal{P}_{d1} \mathcal{P}'_{d1}) = d-0}}^n \sum_{\lambda}^{l_d} \beta_{d\lambda} p_{d\lambda} \bar{k}_{i_{d\lambda} j_{d\lambda}} p'_{d\lambda}$$

mit $n \geq 1$ keine Identität in \mathfrak{R} sein kann, denn die Teilsumme mit $d = n$ ist nach Satz 2 reduzierbar.

(Eingegangen am 4. Februar 1953.)

Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen.

II. Konstruktion und integrallose Darstellung spezieller Schiebungen.

Von

MARTIN BARNER in Freiburg i. Br.

In der *projektiven Kinematik* betrachten wir einparametrische Scharen von Projektivitäten. Eine *projektive Bewegung* des dreidimensionalen Raumes induziert im Geradenraum eine hyperbolische Bewegung, die die absolute Quadrik fest läßt — und umgekehrt gehört zu einer hyperbolischen Bewegung des R_3 immer auch eine bestimmte projektive Bewegung. Besonders auffallend sind nun die hyperbolischen Bewegungen, die entstehen, indem eine Hyperebene über eine Hyperebenengesamtheit hyperbolisch abrollt, ohne zu gleiten¹⁾. Hierzu gehören in verschiedener Weise ausgezeichnete projektive Bewegungen des R_3 , die wir *Schiebungen* nannten²⁾, da zu ihnen die Clifford-Schiebungen der elliptischen, quasielliptischen und isotropen Geometrie als Sonderfall gehören.

Unter diesen genannten hyperbolischen Bewegungen des Geradenraumes gibt es insbesondere solche, bei denen sich eine Hyperebene um einen Punkt, eine Gerade, eine Ebene der Dimension 2 usw. dreht³⁾. Hierzu gehören spezielle Schiebungen des dreidimensionalen projektiven Raumes — dem *Studium solcher Schiebungen ist diese Arbeit gewidmet*.

Beispielsweise führen die hyperbolischen Drehungen um eine Ebene der Dimension zwei (hierzu gehören definitionsgemäß die K_2 -Schiebungen) auf die Clifford-Schiebungen der nichteuklidischen Geometrien. Es bleiben also hier die projektiven Bewegungen zu untersuchen, zu denen hyperbolische Drehungen einer Hyperebene um einen Punkt und um eine Gerade des Geradenraumes gehören. Sie werden K_4 - bzw. K_3 -Schiebungen genannt.

In einem einleitenden Abschnitt werden die Grundtatsachen und Formeln der Schiebungen und damit der Abrollvorgänge im Geradenraum zusammengestellt [1]⁴⁾. Spezialisierung führt dann auf die erwähnten hyperbolischen Drehungen einer Hyperebene im R_3 und den hierzu gehörenden projektiven Bewegungen [2]. Die Eigenschaften der K_4 -Schiebungen [3] erlauben eine Konstruktion und integrallose Darstellung (4,9), (4,10) derselben auf rein

¹⁾ Man stelle sich zur Veranschaulichung den entsprechenden Vorgang im dreidimensionalen euklidischen Raum vor: Eine Ebene rollt über die Tangentenfläche einer Raumkurve ab, ohne zu gleiten.

²⁾ M. BARNER: Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I. Komplexflächen als Schiebflächen. Math. Ann. 126, 119—137 (1953).

³⁾ Vgl. Fußnote ¹⁾. Die Tangentenfläche entartet in einen Kegel — die Ebene dreht sich um die Spitze des Kegels. Der Kegel kann weiterhin in eine Gerade entarten; die Ebene durchläuft dann ein Geradenbüschel.

⁴⁾ Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf Abschnitte der vorliegenden Arbeit.

geometrischem Wege anzugeben: Zu einer Regelfläche und einem linearen Komplex, in dem die Geraden der Regelfläche nicht sämtlich liegen, gibt es genau eine K_4 -Schiebung [4]. Die K_3 -Schiebungen werden im Abschnitt 6 betrachtet. Ihre integrallose Darstellung (7,5), (7,9) findet man in Durchführung der Konstruktion: Durch eine Kurve und ein Komplexbüschel — es sollen nicht etwa die Tangenten der Kurve sämtlich in einem der Komplexe des Büschels liegen — ist genau eine K_3 -Schiebung bestimmt [7]. Die K_2 -Schiebungen werden als Clifford-Schiebungen nachgewiesen — ihre Darstellung mittels Quaternionen ergibt sich daraus direkt [9].

Die Theorie der Schiebungen hat in ihrer Anwendung auf die projektive Differentialgeometrie der Komplexflächen Interesse. Die Flächen dieser vieluntersuchten Flächenklasse — nach Definition gehören die Kurven der einen Schar von Asymptotenlinien linearen Komplexen an — stellen sich nämlich als Projektiv-Schiebflächen heraus [1]⁵⁾. Die expliziten Darstellungen der Schiebungen liefern deshalb integralfreie Darstellungen (5,1), (8,1) einer weiten Klasse von Komplexflächen [5], [8]. — Der einfachste Fall, die K_2 -Schiebungen, führen auf die zweisinnigen Komplexflächen [10], die STRUBECKER⁶⁾ vor kurzem eingehend behandelt hat. Seine Formeln treten hier als Spezialfall auf (10,1).

1. Die Schiebungen und ihre wichtigsten Eigenschaften. Die projektive Kinetik beschäftigt sich mit den „Bewegungen“ eines projektiven Bezugssystems. Wir sprechen kurz von *projektiven Bewegungen*. Eine *Schiebung* nannten wir eine solche spezielle projektive Bewegung, bei der im bewegten System ein Nullsystem ausgezeichnet ist, das zu jeder Zeit t einen jeden Punkt auf die Schmiegeebene der durch ihn laufenden Bahnkurve abbildet.

Die Vektoren

$$(1,1) \quad q_1(t), \, s_1(t), \, s_2(t), \, q_2(t)$$

mögen die Basis eines bewegten Systems bilden. Die Normierung dieser Vektoren kann man durch Umnormung mit einem gemeinsamen Faktor so einrichten, daß ihre Determinante

$$(1,2) \quad (q_1, s_1, s_2, q_2)$$

konstant ist. Wir denken uns dies von vornherein durchgeführt.

Die Ebenen des bewegten Bezugssystems beziehen wir auf die Basis

$$(1,3) \quad Q_1(t), \, \mathcal{E}_1(t), \, \mathcal{E}_2(t), \, Q_2(t).$$

Diese Vektoren mögen durch die Produkttabelle

$$(1.4) \quad \begin{array}{c|cccc} & q_1 & s_1 & s_2 & q_2 \\ \hline D_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{E}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathcal{E}_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ D_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

definiert sein.

⁵⁾ Dies ist genauer in der in Fußnote ²⁾ zitierten Arbeit durchgeführt.

⁶⁾ K. STRUBECKER: Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Math. Zeitschr. 52, 401—435 (1949).

Es sei ferner im bewegten System das Nullsystem ausgezeichnet, das den Punkt

$$(1,5) \quad \mathfrak{p} = p_0 q_1 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 q_2$$

auf die Ebene

$$(1,6) \quad \mathfrak{P} = p_0 Q_1 + p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 Q_2$$

abbildet. Für die gewählte Basis des bewegten Systems liegt hierin nur die Einschränkung, daß (q_1, q_2) und (s_1, s_2) konjugierte Gerade in diesem Nullsystem sind.

Von einer *Schiebung* wollten wir sprechen, wenn das ausgezeichnete Nullsystem einen jeden Punkt auf die Schmiegeebene der hindurchlaufenden Bahnkurve abbildet, d. h. analytisch, falls für jede Wahl der Konstanten p_i gilt:

$$(1,7) \quad \mathfrak{P} p = \mathfrak{P} p' = \mathfrak{P} p'' = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist zum Beispiel auch

$$\begin{aligned} (Q_i + u S_k)(q_i + u s_k) &= 0 \\ (Q_i + u S_k)(q_i + u s_k)' &= 0, & u = \text{const}, \\ (Q_i + u S_k)(q_i + u s_k)'' &= 0 \end{aligned}$$

und da ferner nach der Produkttabelle (4)

$$Q_i s_k = S_i q_k = 0$$

gilt für jede Wahl von i und k , so heißt dies, daß $q_i + u s_k$ Asymptotenlinien der Regelfläche (q_i, s_k) durchlaufen und daß $Q_i + u S_k$ die Schmiegeebenen dieser Asymptotenlinien sind.

Betrachten wir andererseits ein beliebiges bewegtes System mit der Basis $\hat{q}_1, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{q}_2$ derart, daß $\hat{q}_1 + u \hat{s}_1$ bzw. $\hat{s}_1 + v \hat{q}_2$ bzw. $\hat{q}_2 + w \hat{s}_2$ Asymptotenlinien auf den Regelflächen (\hat{q}_1, \hat{s}_1) bzw. (\hat{s}_1, \hat{q}_2) bzw. (\hat{q}_2, \hat{s}_2) für alle konstanten Werte von u, v, w , durchlaufen und daß ferner \hat{p}_1 und \hat{s}_2 auch Asymptotenlinien von (\hat{q}_1, \hat{s}_2) sind, so definieren die Vektoren $\hat{q}_1, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{q}_2$ die Basis einer Schiebung.

Für die \hat{q}_i, \hat{s}_i gelten auf jeden Fall Ableitungsgleichungen der Gestalt:

$$\begin{aligned} \hat{q}_i' &= \hat{\alpha}_{i1} \hat{s}_1 + \hat{\alpha}_{i2} \hat{s}_2 + \hat{\alpha}_{i1} \hat{q}_1 + \hat{\alpha}_{i2} \hat{q}_2 \\ \hat{s}_i' &= \hat{\beta}_{i1} \hat{q}_1 + \hat{\beta}_{i2} \hat{q}_2 + \hat{\beta}_{i1} \hat{q}_1 + \hat{\beta}_{i2} \hat{q}_2 \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Nun wird die Schmiegeebene von \hat{q}_1 z. B., da \hat{q}_1 auf (\hat{q}_1, \hat{s}_1) und auf (\hat{q}_1, \hat{s}_2) Asymptotenlinie sein soll, aufgespannt von $\hat{q}_1, \hat{s}_1, \hat{s}_2$. \hat{q}_1' liegt in dieser Ebene, also wird $\bar{\alpha}_{12} = 0$, und entsprechend:

$$\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{21} = \bar{\beta}_{12} = \bar{\beta}_{21} = 0.$$

Weiterhin wird

$$\hat{q}_i' = \sum_{k,l=1}^2 \hat{\alpha}_{ik} \hat{\beta}_{kl} \hat{q}_l, \quad (\text{mod } \hat{q}_i, \hat{q}_i', \hat{s}_1, \hat{s}_2),$$

und da auch \hat{q}_i' sich aus $\hat{q}_i, \hat{s}_1, \hat{s}_2$ linear kombinieren lassen muß, so folgt:

$$\hat{\alpha}_{i1} \hat{\beta}_{1l} + \hat{\alpha}_{i2} \hat{\beta}_{2l} = 0 \quad \text{für } i \neq l; i, l = 1, 2.$$

Entsprechend muß auch gelten:

$$\hat{\beta}_{i1} \hat{\alpha}_{1i} + \hat{\beta}_{i2} \hat{\alpha}_{2i} = 0 \quad \text{für } i \neq l; i, l = 1, 2.$$

Hierfür kann man zusammenfassend schreiben:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{11} &= \lambda \hat{\beta}_{22}, & \hat{\alpha}_{12} &= -\lambda \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\alpha}_{22} &= \lambda \hat{\beta}_{11}, & \hat{\alpha}_{21} &= -\lambda \hat{\beta}_{21}. \end{aligned}$$

Drücken wir jetzt noch aus, daß auch $\hat{q}_1 + \hat{s}_1$, $\hat{s}_1 + \hat{q}_2$, $\hat{q}_2 + \hat{s}_2$ jeweils eine Asymptotenlinie auf (\hat{q}_1, \hat{s}_1) bzw. (\hat{s}_1, \hat{q}_2) bzw. (\hat{q}_2, \hat{s}_2) durchläuft, so wird:

$$\begin{aligned} (\ln \lambda)' + \bar{\alpha}_{11} - \bar{\alpha}_{22} - \bar{\beta}_{11} + \bar{\beta}_{22} &= 0 \\ (\ln \lambda)' - \bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{22} - \bar{\beta}_{11} + \bar{\beta}_{22} &= 0 \\ (\ln \lambda)' - \bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{22} + \bar{\beta}_{11} - \bar{\beta}_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\lambda = \text{const}, \quad \bar{\alpha}_{11} = \bar{\alpha}_{22} = -\bar{\beta}_{11} = -\bar{\beta}_{22},$$

wenn man noch das Konstantsein der Determinante (2) berücksichtigt. Setzt man noch

$$\lambda q_1 = \hat{q}_1, \quad s_1 = \hat{s}_1, \quad s_2 = \hat{s}_2, \quad q_2 = \hat{q}_2,$$

so genügen die q_i, s_i den Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} (1,8) \quad q'_i &= \alpha_{i1} s_1 + \alpha_{i2} s_2 + \alpha q_i \\ s'_i &= \beta_{i1} q_1 + \beta_{i2} q_2 + \beta q_i \end{aligned} \quad i = 1, 2,$$

wobei

$$\begin{aligned} (1,9) \quad \alpha_{11} &= \beta_{22}, & \alpha_{12} &= -\beta_{12}, & \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha_{22} &= \beta_{11}, & \alpha_{21} &= -\beta_{21}, \end{aligned}$$

gilt. Für die durch (4) definierten Ebenenvektoren wird dann:

$$\begin{aligned} (1,10) \quad Q'_i &= -\alpha_{i1} \mathcal{E}_1 - \alpha_{i2} \mathcal{E}_2 - \alpha Q_i \\ \mathcal{E}'_i &= -\beta_{i1} Q_1 - \beta_{i2} Q_2 - \beta \mathcal{E}_i \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Man bestätigt nun sofort, daß (7) für einen beliebigen Punkt p (5) und die zugehörige Nullebene \mathfrak{P} (6) erfüllt ist. Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen und ferner gezeigt: *Bildet das ausgezeichnete Nullsystem einer Schiebung den Punkt p in (5) auf die Ebene \mathfrak{P} in (6) ab, so gelten für die so gewählte Basis die Ableitungsgleichungen (8), (10) mit (9).*

Zu dem ausgezeichneten Nullsystem des bewegten Systems gehört der lineare Komplex, der durch

$$(1,11) \quad w = (q_1, q_2) + (s_1, s_2)$$

gekennzeichnet ist. Eine Gerade dieses Komplexes im bewegten System wird durch das Nullsystem in sich übergeführt und deshalb beschreibt ein Punkt einer solchen Geraden eine Asymptotenlinie der von der Geraden erzeugten Regelfläche.

Konjugierte Gerade im Nullsystem des bewegten Systems erzeugen in der Schiebung schichtbare Regelflächenpaare. Die Schmiegebenen der Bahnkurven

längs einer Erzeugenden einer der Regelflächen schneiden sich nämlich in der zugehörigen Erzeugenden der anderen Regelfläche.

Zwei Bahnkurven sind also entweder Asymptotenlinien der durch sie definierten Regelfläche, also *asymptotisch Transformierte erster Stufe*, oder sie sind Schichtkurven auf einer Regelfläche eines schichtbaren Paares und also *asymptotisch Transformierte zweiter Stufe* voneinander.

Der eingangs ausgesprochene Satz für Schiebungen lehrt insbesondere: *Zu einem Paar asymptotisch Transformierter zweiter Stufe gibt es genau eine Schiebung derart, daß diese Kurven Bahnkurven der Schiebung sind.*

Die Schiebung des R_3 induziert eine projektive Bewegung des Geradenraumes, die die absolute Quadrik Q festläßt, d. h. eine hyperbolische Bewegung. Hier spielt die von \mathfrak{w} in (11) erzeugte Kurve eine besondere Rolle, kennzeichnet doch einer ihrer Punkte den ausgezeichneten linearen Komplex des zugehörigen bewegten Systems des R_3 . In der Bewegung des R_3 rollt die Polaryhyperebene des Punktes \mathfrak{w} im bewegten System über eine einparametrische Ebenenmannigfaltigkeit hyperbolisch ab, ohne zu gleiten, und diese Ebenengesamtheit kann man vorschreiben.

Diese Eigenschaft erkennt man aus den Ableitungsgleichungen in Geradenkoordinaten, die unmittelbar aus (8) mit (10) folgen und die besonders einfach werden, wenn man

$$(1,12) \quad \mathfrak{v} = (q_1, q_2) - (s_1, s_2)$$

als Basispunkt verwendet. Dann wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}' &= 2 \alpha \mathfrak{v} + 2 \alpha_{21}(q_1, s_1) + 2 \alpha_{22}(q_1, s_2) - 2 \alpha_{11}(q_2, s_1) - 2 \alpha_{12}(q_2, s_2) \\ \mathfrak{v}' &= 2 \alpha \mathfrak{w} \\ (1,13) \quad (q_1, s_1)' &= -\alpha_{12} \mathfrak{w} \\ (q_1, s_2)' &= \alpha_{11} \mathfrak{w} \\ (q_2, s_1)' &= -\alpha_{22} \mathfrak{w} \\ (q_2, s_2)' &= \alpha_{21} \mathfrak{w}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Schiebungen in ihrer Anwendung auf die projektive Differentialgeometrie liegt darin, daß eine dem ausgezeichneten Komplex des bewegten Systems zugehörige Komplexkurve eine Komplexfläche erzeugt und daß sich jede Komplexfläche so gewinnen läßt. Hieraus folgt insbesondere die Parameterdarstellung der Komplexflächen:

$$(1,14) \quad \mathfrak{y}(t, s) = q_1 + s s_1 + G'(s) s_2 + [2 G(s) - s G'(s)] q_2.$$

Man bestätigt sofort, daß die Parameterkurven die Asymptotenlinien dieser Fläche sind.

2. *Die Dimension der Kurve des Geradenraumes.* Einer Schiebung des R_3 entspricht im Geradenraum eine hyperbolische Bewegung derart, daß die Polaryhyperebene E des Punktes \mathfrak{w} des bewegten Systems auf einer einparametrischen Hyperebenenmannigfaltigkeit abrollt, ohne zu gleiten. Umgekehrt kann man diese einparametrische Hyperebenenengesamtheit beliebig vorgeben.

Falls ihre Ebenen Q nicht berühren, so gibt es dazu immer eine Schiebung des R_3 . \mathfrak{w} durchläuft die Polkurve dieser Ebenengesamtheit.

Die vornehmste invariante Eigenschaft einer Schiebung wird demnach die Dimension n der Kurve sein, die \mathfrak{w} im R_3 beschreibt. Liegt die Kurve \mathfrak{w} in einer Ebene der Dimension n , so nennen wir die zugehörige Schiebung eine K_n -Schiebung. Von Schiebung schlechthin sprechen wir, wenn über diese Dimension nichts besonderes vorausgesetzt ist. Natürlich ist bei $m < n$ eine jede K_m -Schiebung auch K_n -Schiebung. In diesem Sinne ist weiterhin die Ausdrucksweise zu verstehen, eine Schiebung sei *mindestens* eine K_n -Schiebung.

Wir betrachten also eine K_n -Schiebung: \mathfrak{w} verläuft ganz in einer Ebene e_n . Den zu e_n polaren Raum der Dimension $4 - n$ bezüglich der absoluten Quadrik Q bezeichnen wir mit \bar{e}_{4-n} . Die Ebenen e_n und \bar{e}_{4-n} , von denen wir sprechen, sind nach Definition fest im festen System. Es gilt aber auch: *Jeder Punkt der Polarebene \bar{e}_{4-n} ist auch fest im bewegten System des Geradenraumes*, d. h. kurz gesagt: *Jeder Punkt der Ebene \bar{e}_{4-n} ist Fixpunkt in der Bewegung des Geradenraumes, die durch eine K_n -Schiebung induziert wird.*

Ein solcher Punkt des festen Systems ist ja polar zu einem jeden Punkt der von \mathfrak{w} beschriebenen Kurve, liegt also an jeder Stelle in der Polarebene E von \mathfrak{w} des bewegten Systems. Der ins Auge gefaßte ortsfeste Punkt durchläuft also im bewegten System eine Kurve, die ganz in E liegt. Nun sahen wir aber, daß sich E im Sinne der hyperbolischen Geometrie immer normal bewegt. Ein ortsfester Punkt kann also gar keine Kurve beschreiben, dessen Tangente in der Ebene E des bewegten Systems liegt. Der betrachtete Punkt ist also notwendig fest auch im bewegten System, wie behauptet wurde.

Somit: *Die Bewegung des Geradenraumes, die zu einer K_n -Schiebung gehört, entsteht, indem die Ebene E des bewegten Systems hyperbolisch über einen Kegel mit einem Scheitel der Dimension $4-n$ abrollt, ohne zu gleiten. \mathfrak{w} als der polare Punkt von E des bewegten Systems erzeugt dann eine Kurve, die ganz in der Polarebene des Scheitels des genannten Kegels liegt.*

Verfolgen wir diesen Sachverhalt seiner Wichtigkeit halber noch analytisch. Gehen wir von einem festen Punkt \mathfrak{r} der Ebene E des bewegten Systems aus:

$$(2,1) \quad \mathfrak{r} = r_1 \mathfrak{p} + r_2 (q_1, s_1) + r_3 (q_1, s_2) + r_4 (q_2, s_1) + r_5 (q_2, s_2).$$

Dieser Punkt ist ortsfest, falls gilt

$$(2,2) \quad \mathfrak{r}' - \varrho \mathfrak{r} = 0.$$

Nun ist nach (1,13)

$$(2,3) \quad \mathfrak{r}' = (r_1 \cdot 2\alpha - r_2\alpha_{12} + r_3\alpha_{11} - r_4\alpha_{22} + r_5\alpha_{21})\mathfrak{w},$$

und (2) führt also auf die Bedingung

$$(2,4) \quad r_1 \cdot 2\alpha - r_2\alpha_{12} + r_3\alpha_{11} - r_4\alpha_{22} + r_5\alpha_{21} = 0,$$

d. h. es besteht in diesem Fall eine lineare Abhängigkeit zwischen den Halbinvarianten α_{ik} , α mit konstanten Koeffizienten. Eine K_n -Schiebung ist analytisch dadurch gekennzeichnet, daß 5- n linear unabhängige lineare Beziehungen mit konstanten Koeffizienten zwischen den fünf halbinvarianten Größen α_{ik} , α bestehen.

Es ist zweckmäßig, dieser Aussage eine geometrische Gestalt zu geben. Die Tangente an die von \mathfrak{w} beschriebene Kurve trifft nach (1.13) die Polarebene E von \mathfrak{w} des bewegten Systems in dem Punkt \mathfrak{w}' . Dieser Punkt ist keineswegs fest im bewegten System, er erzeugt in der Ebene E die Kurve

$$(2,5) \quad \mathfrak{w}' = 2 \alpha \mathfrak{w} + 2 \alpha_{21} (q_1, s_1) + 2 \alpha_{22} (q_1, s_2) - 2 \alpha_{11} (q_2, s_1) - 2 \alpha_{12} (q_2, s_2),$$

deren Komponenten als die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen die Schiebung kennzeichnen. Wir nennen diese Kurve deshalb die *Kennkurve* der Schiebung. Unser Satz läßt sich dann so aussprechen: *Eine K_n -Schiebung ist dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörige Kennkurve die Dimension $n-1$ hat.*

Beachten wir jetzt noch, daß nach den Ableitungsgleichungen (1.13) gilt:

$$(2,6) \quad \mathfrak{w}^{(k)} = 2 \alpha^{(k-1)} \mathfrak{w} + 2 \alpha_{21}^{(k-1)} (q_1, s_1) + 2 \alpha_{22}^{(k-1)} (q_1, s_2) - 2 \alpha_{11}^{(k-1)} (q_2, s_1) - 2 \alpha_{12}^{(k-1)} (q_2, s_2) \pmod{\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \dots, \mathfrak{w}^{(k-1)}},$$

so wird der oben beschriebene Zusammenhang zwischen der von \mathfrak{w} erzeugten Kurve der Dimension n und der Fixpunktgesamtheit in E auch analytisch evident. Eine jede lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten zwischen den α_{ik} , α bedeutet, daß die Kennkurve in einer bestimmten Ebene der Dimension 3 in E liegt, daß der hierzu polare Punkt in E Fixpunkt ist und daß die von \mathfrak{w} durchlaufene Kurve in einer Ebene der Dimension 4 liegt, die an jeder Stelle durch \mathfrak{w} und die durch die Kennkurve definierte Ebene der Dimension 3 aufgespannt wird.

Bestehen mehrere, linear unabhängige Beziehungen zwischen den α_{ik} , α , so gelten die gemachten Aussagen für eine jede von ihnen einzeln. Wenn wir also im nächsten Abschnitt die K_4 -Schiebungen eingehend besprechen, so deshalb, weil auf Grund dieser bestehenden Linearität hieraus auch sofort die geometrischen Besonderheiten der K_3 - und K_2 -Schiebungen folgen. Eine K_2 -Schiebung z. B. ist in diesem Sinne in ∞^2 -facher Weise eine K_4 -Schiebung.

3. *Die K_4 -Schiebungen.* Es möge jetzt genau einen Fixpunkt \mathfrak{a} in der zugehörigen Bewegung des Geradenraumes geben. Die Ebene E rollt dann, ohne zu gleiten, hyperbolisch über einen Kegel mit der Spitze in diesem Punkt ab, während die Polkurve dieser Hyperebenenmannigfaltigkeit ganz in der Polarrhyperebene von \mathfrak{a} liegt. Wir werden zu unterscheiden haben, ob der feste Punkt \mathfrak{a} auf der absoluten Quadrik Q liegt oder nicht.

Im bewegten System des Geradenraumes ist also bei einer K_4 -Schiebung eine Gerade durch \mathfrak{a} und \mathfrak{w} ausgezeichnet, die die absolute Quadrik in zwei reellen, konjugiert komplexen oder zusammenfallenden Punkten trifft. *Im bewegten System des R_3 ist in einer K_4 -Schiebung ein Geradenpaar ausgezeichnet, das gebildet wird aus zwei konjugierten Geraden im Nullsystem von \mathfrak{w} , die eventuell in eine Komplexgerade von \mathfrak{w} zusammenfallen. Das Geradenpaar kann reell oder konjugiert komplex sein. Vom reellen Standpunkt aus haben wir also drei verschiedene Arten von K_4 -Schiebungen zu unterscheiden.*

Sprechen wir zunächst vom allgemeinen Fall: \mathfrak{a} liegt nicht auf der absoluten Quadrik, im bewegten System des R_3 gibt es ein ausgezeichnetes Geradenpaar windschiefer Geraden. Die Nullsysteme von \mathfrak{a} und \mathfrak{w} definieren

eine involutorische Projektivität des bewegten Systems in sich. Es ist dies die Spiegelung an dem ausgezeichneten Geradenpaar. Nun ist das Nullsystem von \mathfrak{a} fest auch im festen System, während das Nullsystem von \mathfrak{w} einen jeden Punkt auf die Schmiegeebene der hindurchlaufenden Bahnkurve abbildet. Deshalb gilt: *Zwei Spiegelpunkte in bezug auf das ausgezeichnete Geradenpaar des bewegten Systems durchlaufen Bahnkurven, deren jede durch das in der Schiebung feste Nullsystem von \mathfrak{a} in die Schmiegeebengesamtheit der anderen übergeführt wird.* Als Sonderfall hieraus: *Die Punkte der beiden ausgezeichneten Geraden erzeugen in der Schiebung Komplexkurven ein und demselben Komplex \mathfrak{a} zugehörig.*

Wir verfolgen diesen Zusammenhang gleich noch analytisch. Die Basis des bewegten Systems des R_3 können wir so wählen, daß der Vektor

$$(3,1) \quad \mathfrak{a} = (q_1, s_2) + \varepsilon (q_2, s_1)$$

den in der Bewegung des Geradenraumes festen Punkt \mathfrak{a} darstellt. Es genügt für die hier eintretende Konstante ε die Werte 1, 0, -1 zuzulassen, da uns eine Umnormung der Basisvektoren mit konstanten Faktoren noch frei steht. Allerdings soll dabei der in der Schiebung ausgezeichnete lineare Komplex nach wie vor durch

$$(3,2) \quad \mathfrak{w} = (q_1, q_2) + (s_1, s_2)$$

gekennzeichnet sein. Deshalb sind die Fälle mit $\varepsilon = 1, -1$ tatsächlich verschieden (vom reellen Standpunkt). Wir erhalten die folgende Liste:

ε	$(\mathfrak{a}, \mathfrak{w})$ schneidet Q in:	Ausgezeichnet im R_3 ist:
1	zwei reellen, verschiedenen Punkten,	ein reelles windachiefes Geradenpaar,
0	zwei in \mathfrak{a} zusammenfallenden Punkten,	eine Gerade des Komplexes,
-1	zwei konjugiert komplexen Punkten.	zwei konjugiert komplexe Geraden.

Damit nun der Punkt \mathfrak{a} in (1) fest ist in der Bewegung, muß sein:

$$\mathfrak{a}' - \varrho \mathfrak{a} = 0.$$

Nach (1,13) führt dies auf die Bedingung

$$(3,4) \quad \alpha_{11} - \varepsilon \alpha_{22} = 0.$$

Bei geeigneter Wahl der Basis des bewegten Systems sind die K_4 -Schiebungen durch die Bedingung (4) für die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen (1,8) mit (1,9) gekennzeichnet. ε kann dabei einen der Werte 1, 0, -1 annehmen, und die zugehörigen K_4 -Schiebungen sind reell verschieden (vgl. (3)).

Das Nullsystem von \mathfrak{a} führt dann die von dem Punkte

$$(3,5) \quad \mathfrak{p} = p_0 q_1 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 q_2$$

erzeugte Kurve in die Ebenengesamtheit

$$(3,6) \quad \mathfrak{P} = -p_1 Q_1 + \varepsilon p_0 Q_1 - p_2 Q_2 + \varepsilon p_3 Q_2,$$

d. h. nach (1,5), (1,6) in die Schmiegeebenenmannigfaltigkeit der von

$$(3,7) \quad \tilde{p} = -p_1 q_1 + \varepsilon p_0 s_1 - p_3 s_2 + \varepsilon p_2 q_2$$

beschriebenen Kurve über. Denn die Gerade (p, q) mit

$$(3,8) \quad q = q_0 q_1 + q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 q_2$$

liegt dann und nur dann in dem durch α gekennzeichneten Komplex, falls

$$\varepsilon (p_0 q_2 - p_2 q_0) + (p_3 q_1 - p_1 q_3) = 0$$

gilt, d. h. aber nach der Inzidenzbedingung (1,4), falls q in der Ebene \mathfrak{P} liegt.

Wir haben hier von den allgemeinen Fällen $\varepsilon = 1, -1$ gesprochen, den Fall $\varepsilon = 0$ jedoch analytisch nicht ausgeschlossen. Bei $\varepsilon = 0$ haben wir die Basis des bewegten Systems nach (1) so gelegt, daß der Punkt (q_1, s_2) fest ist in der Bewegung des Geradenraumes. Die Gerade (q_1, s_2) ist Bahnkurve in der Schiebung, sie wird von einer einparametrischen Schar von Punkten durchlaufen. Die Korrelation, die die von p (5) beschriebene Kurve in die Ebenengesamtheit \mathfrak{P} (6) überführt, ist jetzt ausgeartet. Ein jeder Punkt der Ebene

$$(3,9) \quad (p_1 s_1 + p_3 q_2, q_1, s_2)$$

wird an jeder Stelle auf ein und dieselbe Ebene

$$(3,10) \quad - (p_1 q_1 + p_3 s_2)$$

abgebildet, die von einem Punkt der Ebene (9) in der Schiebung erzeugte Kurve also in das Ebenenbüschel durch (q_1, s_2) übergeführt. Analytisch wollen wir auch im folgenden den Ausartungsfall $\varepsilon = 0$ immer gleich mitbehandeln.

Wir wollen uns noch einen besseren Überblick über die geometrischen Verhältnisse der Bahnkurven einer K_4 -Schiebung verschaffen, indem wir wieder Regelflächen und Regelflächenpaare betrachten, die durch Schiebung einer Geraden bzw. eines Geradenpaares entstehen.

Das sind zunächst die Geraden, die der Kongruenz (α, w) angehören, die also die ausgezeichneten Geraden des bewegten Systems des R_3 treffen. Eine solche Gerade gehört dem Komplex α des bewegten Systems an, und da dieser Komplex fest ist, gilt dies für jede Stelle: *Die Geraden, die das ausgezeichnete Geradenpaar treffen, beschreiben Komplexregelflächen in der Schiebung. Ihre Geraden gehören dem Komplex α an.* Ihre Komplexorte werden von den Schnittpunkten der Geraden mit dem ausgezeichneten Geradenpaar erzeugt, als solche sind sie Komplexkurven, α zugehörig, und wie jede andere Bahnkurve Asymptotenlinie der entstehenden Regelfläche.

Entsprechendes gilt auch für den Ausartungsfall. Hier ist ja der Komplex, dem die entstehende Regelfläche — sie wird in der Schiebung erzeugt von einer Geraden, die die ausgezeichnete feste Gerade trifft — angehört, ebenfalls ausgeartet. Die Komplexorte fallen in diese geradlinige Fleknodalkurve, die die Leitgerade des ausgearteten Komplexes ist⁷⁾.

⁷⁾ Eine jede Regelfläche läßt sich in eine Schiebung einbetten derart, daß ihre Asymptotenlinien Bahnkurven der Schiebung sind. Insofern erzielen wir hier nebenbei eine Klassifikation der Regelflächen, und die hier angegebenen Eigenschaften sind für die Komplexregelflächen charakteristisch. In Abschnitt 6 werden wir in entsprechender Weise auf die Besonderheiten der Kongruenzregelflächen aufmerksam.

Über eine Regelfläche, die durch Schiebung einer Geraden des ausgezeichneten Komplexes ω des bewegten Systems erzeugt wird, aber dem Komplex α nicht angehört, ergeben sich keine Aussagen. Wir werden später sehen, daß diese Regelflächen tatsächlich allgemein sind.

Zuletzt betrachten wir noch die Regelflächenpaare, die durch Schiebung zweier im Nullsystem von ω konjugierter Geraden entstehen. Diese bilden, wie wir wissen, ein schichtbares Paar, dessen Schichtkurven die Bahnkurven in der Schiebung sind. Die ausgezeichneten Geraden erzeugen ein solches Paar, seine Schichtkurven gehören alle dem Komplex α an. Ein Geradenpaar der genannten Art, das von den ausgezeichneten Geraden verschieden ist, bestimmt mit diesen den Regulus einer Quadrik. Die beiden Geradenpaare werden ja im R_3 durch zwei sich in ω schneidende Geraden dargestellt. Durch die andere Geradenschar der Quadrik sind die Punkte der beiden betrachteten Geraden und damit die Schichtkurven des Regelflächenpaares eindeutig aufeinander bezogen. Es gilt: *Die Schichtkurven auf den beiden Regelflächen eines schichtbaren Paares, das in einer K_4 -Schiebung entsteht und von dem ausgezeichneten Regelflächenpaar verschieden ist, sind so eineindeutig aufeinander bezogen, daß zusammengehörende Schichtkurven Komplexregelflächen des Komplexes α definieren.*

4. Konstruktion der K_4 -Schiebungen. Wir sahen bereits, daß eine beliebige Schiebung durch Angabe zweier ihrer Bahnkurven, die nicht Asymptotenlinien auf der durch sie erzeugten Regelfläche sind, eindeutig bestimmt ist. Gibt man andererseits zwei Kurven vor, die asymptotisch Transformierter zweiter Stufe voneinander sind, so gibt es immer eine Schiebung, die diese Kurven als Bahnkurven enthält, und alle Schiebungen sind so erzielbar.

Nun gibt es in einer K_4 -Schiebung im allgemeinen Fall Bahnkurven, die Komplexkurven sind. Solche Paare asymptotisch Transformierter sind aber besonders einfach zu handhaben. Für sie gilt: Zwei Komplexkurven desselben Komplexes bilden bei jeder Zuordnung ihrer Punkte ein Paar asymptotisch Transformierter zweiter Stufe (oder erster Stufe, was wir hier natürlich ausschließen.) Somit gilt für K_4 -Schiebungen der Existenzsatz: *Gibt man zwei Komplexkurven desselben Komplexes vor und bezieht deren Punkte in beliebiger Weise aufeinander (doch so, daß die Schmiegenden der einen Kurve nicht durch den zugeordneten Punkt der anderen geht), so gibt es genau eine K_4 -Schiebung, die das entstehende Kurvenpaar als Bahnkurven enthält.*

Dieser Satz ist in verschiedener Weise unbefriedigend. Einmal erfassen wir — wenn wir von reellen Gebilden ausgehen — nur die K_4 -Schiebungen, in deren bewegtem System ein reelles Geradenpaar ausgezeichnet ist — eine jede solche K_4 -Schiebung wird allerdings in der angegebenen Weise erzielt. Zum anderen wird als Basiselement zum Aufbau der K_4 -Schiebungen ein Kurvenpaar ausgewählt, wie es im allgemeinen nur auf zwei in der K_4 -Schiebung erzeugten Regelflächen vorhanden ist. Für die Anwendungen wäre es jedoch viel zweckmäßiger, eine geometrische Eigenschaft zu benutzen, die einem Großteil der Bahnkurven bzw. Bahnkurvenpaare zukommt. — Auf die Möglichkeit, die anderen speziellen Paare asymptotisch Transformierter

zweiter Stufe zu verwenden, die natürlich gegeben ist, wollen wir nicht eingehen, da diese schwer zu kennzeichnen sind.

Es gilt vielmehr: *Durch zwei Asymptotenlinien einer Regelfläche, die von einer Geraden des bewegten Systems, die nicht dem festen Komplex der K_4 -Schiebung angehört, erzeugt wird, und den Komplex selbst ist eine K_4 -Schiebung eindeutig bestimmt.* Da die anderen Asymptotenlinien dieser Regelfläche ebenfalls Bahnkurven in der Schiebung sein müssen, bedeutet die Vorgabe die Angabe zweier Basisvektoren des bewegten Systems. Da ferner das feste Nullsystem^{a)} bekannt ist, so werden hierdurch zwei weitere Basisvektoren bis auf einen gemeinsamen Normierungsfaktor festgelegt, die von den Ausgangsvektoren auf Grund der Voraussetzungen an jeder Stelle linear unabhängig sind. Über die Normierung dieser Vektoren ist auch verfügt, etwa dadurch, daß die Asymptotenlinien einer Regelfläche, die bestimmt wird von einer der gegebenen Kurven und deren Bild im Nullsystem, ebenfalls Bahnkurven sein müssen.

Wir haben also: *Während eine allgemeine Schiebung durch eines ihrer Paare asymptotisch transformierter zweiter Stufe gekennzeichnet ist, wird eine K_4 -Schiebung bereits durch eines ihrer Paare asymptotisch transformierter erster Stufe bestimmt, wenn man das zugehörige feste Nullsystem kennt.* Hierbei sind allerdings solche Bahnkurvenpaare auszuschließen, deren zugehörige Punkte des bewegten Systems eine Gerade des festen linearen Komplexes definieren.

Wir haben skizziert, wie man, ausgehend von zwei Asymptotenlinien einer in einer K_4 -Schiebung erzeugten Regelfläche, diese Schiebung konstruieren kann. Führt nun, so werden wir fragen, die Vorgabe einer beliebigen Regelfläche in dieser Weise ebenfalls auf eine K_4 -Schiebung? Dies ist in der Tat der Fall. Sicherlich müssen alle Asymptotenlinien der Regelfläche, von der wir ausgehen — ebenso wie die beiden herausgegriffenen — Bahnkurven in der gesuchten Schiebung sein. Wenden wir auf diese Figur ein festes Nullsystem (oder die ausgeartete Korrelation, wenn der feste Komplex speziell ist) an, so ist die Bildfigur wieder eine Regelfläche mit ihren Asymptotenlinien, deren Erzeugende an jeder Stelle windschief zu der zugehörenden Ausgangserzeugenden sind. [Hier setzen wir voraus, daß an der betrachteten Stelle die Erzeugende nicht dem Komplex der angewandten Korrelation (Nullsystem) angehört.] Seien nun \mathbf{x} und \mathbf{y} die Ausgangskurven und $\tilde{\mathbf{x}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{y}}$ die Bildmännigfaltigkeit im Nullsystem, deren Kehlpunkte $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{y}}$ sein mögen. Auf Grund der Konstruktion wird die Schmiegenebene der Kurven \mathbf{x} , \mathbf{y} , $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$ der Reihe nach aufgespannt durch $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}})$, $(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}})$, $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{x})$, $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$. Hier liegt nun eine Konfiguration vor, von der wir in Abschnitt 1 gezeigt haben, daß sie eine Schiebung kennzeichnet. Die Kurven $\mathbf{x} + \text{const } \mathbf{y}$ bzw. $\tilde{\mathbf{x}} + \text{const } \tilde{\mathbf{y}}$ sind Asymptotenlinien der Regelflächen (\mathbf{x}, \mathbf{y}) bzw. $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, die Kurven \mathbf{x} , $\tilde{\mathbf{x}}$ bzw.

^{a)} Ist der Komplex speziell, so gehört zu diesem statt eines Nullsystems eine ausgeartete Abbildung, wie wir sie in Abschnitt 3 beschrieben haben. Auch diese Abbildung ist eindeutig, und gegenüber dem allgemeinen Fall ändert sich nur insofern etwas, als die Bildebenen ein Geradenbüschel bestimmen und also kein Kehlpunkt vorhanden ist. Man kann aber einen jeden Punkt der ausgezeichneten Geraden als Kehlpunkt betrachten. Man vergleiche die analytische Behandlung, die folgt.

$\mathfrak{z}, \tilde{\mathfrak{z}}$ aber auch Asymptotenlinien auf den Regelflächen (x, \tilde{x}) bzw. $(\mathfrak{z}, \tilde{\mathfrak{z}})$. Eine gemeinsame Umnormung der Vektoren $\tilde{\mathfrak{z}}, \tilde{x}$ — die uns freisteht — derart, daß die Asymptotenlinien auf (x, \tilde{x}) durch $x + \text{const } \tilde{x}$ dargestellt werden, sorgt dann dafür, daß alle Voraussetzungen des in Abschnitt I ausgesprochenen Satzes erfüllt sind. Die Vektoren $x, \mathfrak{z}, \tilde{x}, \tilde{\mathfrak{z}}$ bilden dann tatsächlich die Basis einer Schiebung, und da es ein festes Nullsystem gibt, handelt es sich um eine K_4 -Schiebung.

Es gilt also: *Ist ein fester linearer Komplex ausgezeichnet, so gibt es zu zwei Kurven, die Asymptotenlinien der von ihnen erzeugten Regelfläche sind, genau eine K_4 -Schiebung derart, daß die vorgegebenen Kurven Bahnkurven sind und der gegebene lineare Komplex der feste Komplex der K_4 -Schiebung ist.*

In diesem Satz liegt nun die Möglichkeit einer expliziten, d. h. integrallosen Darstellung aller K_4 -Schiebungen. Nach einem klassischen Ergebnis von KOENIGS⁹⁾ kann man nämlich zu einer gegebenen Kurve alle asymptotisch transformierten erster Stufe explizit angeben (diese Gesamtheit hängt bei gegebener Kurve von einer willkürlichen Funktion ab), und zwar so, daß man alle Asymptotenlinien der entstehenden Regelfläche explizit hat.

Wir wollen — dieses Ergebnis von KOENIGS benützend — ausgehen von einer Kurve

$$x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\},$$

und es stelle

$$\mathfrak{z} = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

die nach KOENIGS angebbare zweite Asymptotenlinie der Regelfläche (x, \mathfrak{z}) dar, wobei \mathfrak{z} so normiert sei, daß

$$(4.1) \quad x + u \mathfrak{z}, \quad u = \text{const.},$$

die weiteren Asymptotenlinien der Regelfläche beschreiben.

Ferner seien

$$(4.2) \quad \tilde{x} + u \tilde{\mathfrak{z}}$$

die Schmiegebenen der Kurven (1), und wir setzen

$$(4.3) \quad \tilde{x} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}, \quad \tilde{\mathfrak{z}} = \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\}.$$

Die gemachten Voraussetzungen können wir analytisch so formulieren: Einmal inzidieren x, \mathfrak{z} und $\tilde{x}, \tilde{\mathfrak{z}}$; zum anderen stellen die Geradenvektoren $(x + u \mathfrak{z}, x' + u \mathfrak{z}')$ und $(\tilde{x} + u \tilde{\mathfrak{z}}, \tilde{x}' + u \tilde{\mathfrak{z}}')$ für jedes u ein und dieselbe Gerade dar.

Wir denken uns die Punktvektoren x, \mathfrak{z} und die Ebenenvektoren $\tilde{x}, \tilde{\mathfrak{z}}$ auf eine Basis

$$(4.4) \quad \overset{\circ}{q}_1, \overset{\circ}{e}_1, \overset{\circ}{s}_2, \overset{\circ}{q}_2 \quad \text{bzw.} \quad \overset{\circ}{Q}_1, \overset{\circ}{E}_1, \overset{\circ}{S}_2, \overset{\circ}{Q}_2$$

bezogen, für deren Vektoren die Produkttabelle (1.4) gilt und die so gewählt

⁹⁾ G. KOENIGS, Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, et en particulier de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques. C. R. hebdom. Paris 56 (1888).

G. KOENIGS, Sur un problème concernant deux courbes gauches. Amer. J. Math. 19, 259—266 (1897).

G. KOENIGS, Sur une correspondance ponctuelle entre deux courbes gauches. Rend. Math. Palermo 26, 336—338 (1908).

ist, daß die feste Korrelation¹⁰⁾, die in dem Raum existieren soll, den Punkt

$$(4,5) \quad p = p_0 \overset{\circ}{q}_1 + p_1 \overset{\circ}{s}_1 + p_2 \overset{\circ}{s}_2 + p_3 \overset{\circ}{q}_2$$

in die Ebene

$$(4,6) \quad \mathfrak{P} = -p_1 \overset{\circ}{Q}_1 + \varepsilon p_0 \overset{\circ}{E}_1 - p_2 \overset{\circ}{E}_2 + \varepsilon p_3 \overset{\circ}{Q}_2$$

überführt [man vgl. (3,5), (3,6)]. Für ε genügt es, entsprechend den beiden möglichen Fällen einer ausgearteten bzw. nichtausgearteten Korrelation die Werte 0, 1 zuzulassen.

Unsere Voraussetzungen über die Punkt- bzw. Ebenenmannigfaltigkeiten \mathfrak{r} , \mathfrak{X} , \mathfrak{Z} lauten dann ausgeschrieben:

$$(4,7) \quad \left. \begin{aligned} Z_0 x_3 + Z_1 x_2 - Z_2 x_1 - Z_3 x_0 &= 0, & X_0 z_3 + X_1 z_2 - X_2 z_1 - X_3 z_0 &= 0 \\ x_0 x'_1 - x_1 x'_0 &= -E(X_0 X'_1 - X_1 X'_0) \\ x_0 x'_2 - x_2 x'_0 &= -E(X_0 X'_2 - X_2 X'_0) \\ x_0 x'_3 - x_3 x'_0 &= E(X_1 X'_2 - X_2 X'_1) \\ x_2 x'_3 - x_3 x'_2 &= -E(X_2 X'_3 - X_3 X'_2) \\ x_3 x'_1 - x_1 x'_3 &= -E(X_3 X'_1 - X_1 X'_3) \\ x_1 x'_2 - x_2 x'_1 &= E(X_0 X'_3 - X_3 X'_0) \end{aligned} \right\} (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') \stackrel{\circ}{=} E(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}')$$

und ferner

$$(4,8) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') &\stackrel{\circ}{=} E(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') \\ (\mathfrak{r}, \mathfrak{Z}') + (\mathfrak{Z}, \mathfrak{r}') &\stackrel{\circ}{=} E(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}') + E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}') \\ (\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') &\stackrel{\circ}{=} E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'), \end{aligned}$$

wobei in (7) erklärt ist, wie diese Gleichheit zu verstehen ist. Indem wir für E in (7) nur die Werte 1, -1 zulassen, normieren wir bei gegebenen Punktvektoren die zugehörigen Ebenenvektoren. Nach (8) ist dies mit unseren Voraussetzungen verträglich.

Wenden wir nun auf die gegebene Regelfläche, d. h. auf deren Basisvektoren und die zugehörigen Schmiegeebenenmannigfaltigkeiten die Abbildung (5), (6) an, so erhalten wir insgesamt vier Kurven mit ihren Schmiegeebenenmannigfaltigkeiten:

$$(4,9) \quad \begin{aligned} q_1 &= \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, & Q_1 &= E\{X_0, X_1, X_2, X_3\} \\ s_1 &= \{-\varepsilon X_1, X_0, -\varepsilon X_3, X_2\}, & E_1 &= \{-\varepsilon x_1, x_0, -\varepsilon x_3, x_2\} \\ s_2 &= \{x_0, z_1, z_2, z_3\}, & E_2 &= E\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\} \\ q_2 &= \{-\varepsilon Z_1, Z_0, -\varepsilon Z_3, Z_2\}, & Q_2 &= \{-\varepsilon z_1, z_0, -\varepsilon z_3, z_2\}. \end{aligned}$$

Es handelt sich um die Basis einer Schiebung. Die Schmiegeebene einer jeden Kurve

$$p = p_0 q_1 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 q_2, \quad p_i = \text{const.}$$

¹⁰⁾ Ist der vorgegebene Komplex nicht speziell, so handelt es sich um das zu diesem gehörende Nullsystem. Im anderen Fall um eine entartete Abbildung, die einen jeden Punkt in eine Ebene durch ihn und die Leitgerade des speziellen Komplexes abbildet.

wird nämlich durch die Ebene

$$\mathfrak{P} = p_0 \mathcal{Q}_1 + p_1 \mathcal{E}_1 + p_2 \mathcal{E}_2 + p_3 \mathcal{Q}_2$$

mit gleichen lokalen Koordinaten dargestellt. Zum großen Teil ist diese Aussage durch die Voraussetzungen und die angewandte Korrelation bereits bewiesen. Es bleibt nur zu prüfen, ob die Schmiegeebenen von $q_1 + v s_1$ durch $\mathcal{Q}_1 + v \mathcal{E}_1$, $v = \text{const.}$, dargestellt werden. Dazu muß gelten:

$$\mathcal{Q}_1 s'_1 + \mathcal{E}_1 q'_1 = 0,$$

und dies bestätigt man nach (9) an Hand von (8) und (7). Auch die anderen Relationen, die bestehen müssen, bestätigt man, wenn man will, an (9) mittels (7) und (8)¹¹⁾.

Ferner ist in (9):

$$\mathcal{Q}_1 q_2 = \mathcal{E}_1 s_2 = -\mathcal{E}_2 s_1 = -\mathcal{Q}_2 q_1,$$

und deshalb wird der ausgezeichnete Komplex in diesem bewegten System durch

$$\mathfrak{W} = (q_1, q_2) + (s_1, s_2)$$

dargestellt, wie wir das haben wollen. Ferner folgert man aus

$$E \varepsilon \mathcal{E}_2 q'_1 + \mathcal{E}_1 q'_2 = 0,$$

daß der in der Schiebung feste Komplex durch

$$\mathfrak{A} = \varepsilon E (q_1, s_2) + (q_2, s_1)$$

geliefert wird. Die konstruierte Schiebung ist also tatsächlich eine K_4 -Schiebung. Für den Typus dieser Schiebung ist nun die Größe E maßgebend — es sei denn, wir haben von vornherein den ausgearteten Fall betrachtet. Man kann den Typus der Schiebung an der Liste (3,3) ablesen, wenn man statt ε dort εE setzt.

Die Größe E trat nun bei der Normierung der Kurve x, \mathfrak{X} ein und hängt mit deren Windungssinn und damit dem Windungssinn aller Asymptotenlinien der gegebenen Regelfläche zusammen. Die K_4 -Schiebungen, deren fester Komplex nicht speziell ist, zerfallen in zwei Typen [vgl. (3,3)] je nach dem Windungssinn einer ihrer Bahnkurven. Alle Bahnkurven einer K_4 -Schiebung sind gleich gewunden.

Wir fassen zusammen: Sind die Vektoren x und \mathfrak{z} so gegeben, daß $x + u \mathfrak{z}$ ($u = \text{const.}$) die Asymptotenlinien der Regelfläche (x, \mathfrak{z}) darstellen und ferner $\mathfrak{X} + u \mathfrak{z}$ die Schmiegeebenen dieser Asymptotenlinien sind — nach KOENIGS ist dies integrallos zu leisten —, so wird durch (9) die Basis einer K_4 -Schiebung gegeben, die dieses Kurvenpaar als Bahnkurven enthält. Hierin sind die Ebenenvektoren durch

$$(4,10) \quad (x, x') \stackrel{n}{=} (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') E$$

normiert, was bei einer bestimmten Wahl der Größe $E = 1, -1$ möglich ist. E bestimmt im allgemeinen Fall den Typus der Schiebung. Ferner: Eine jede K_4 -Schiebung kann man in der beschriebenen Weise integrallos durch (9) mit (10) darstellen, wenn man für ε die Werte 0, 1 zuläßt.

¹¹⁾ Man vergleiche unten den Abschnitt 7. Dort haben wir die entsprechenden Überlegungen für die K_3 -Schiebungen, die sich formell genau so behandeln lassen, eingehender durchgeführt.

5. Die K_4 -Flächen. Komplexflächen, deren zugehörige Schiebungen K_4 -Schiebungen sind, nannten wir K_4 -Flächen. Ihre speziellen Eigenschaften folgert man aus der Tatsache, daß ihre „krummlinigen“ Asymptotenlinien Bahnkurven der Schiebung und deshalb asymptotisch Transformierte (erster oder) zweiter Stufe voneinander sind. So gilt etwa: *Betrachtet man zwei Asymptotenlinien der anderen Schar einer K_4 -Fläche, so bilden die beiden Regelflächen, die erzeugt werden, einmal aus Verbindungsgeraden zusammengehörender Punkte, zum anderen aus Schnittgeraden zusammengehörender Tangentenebenen, ein spezielles schichtbares Regelflächenpaar. Und zwar sind die Schichtkurven entweder Komplexkurven desselben Komplexes, wenn die beiden betrachteten Asymptotenlinien diese Eigenschaft haben, oder im allgemeinen Fall so eindeutig aufeinander bezogen, daß zusammengehörende Schichtkurven Komplexregelflächen desselben Komplexes definieren.*

Die explizite Darstellung aller K_4 -Flächen gewinnt man unmittelbar aus (1,14): Die Gesamtheit aller K_4 -Flächen läßt sich integrallos in der Form

$$(5,1) \quad \eta(t, s) = q_1 + s s_1 + G'(s) s_2 + [2 G(s) - s G'(s)] q_2$$

darstellen. Hierin sind die Vektoren q_1, s_1, s_2, q_2 in (4,9) mit (4,10) definiert. Die dort auftretenden Vektoren x, y bzw. X, Y waren so bestimmt, daß $x + u y$ ($u = \text{const.}$) die Asymptotenlinien der Regelfläche (x, y) und $X + u Y$ deren Schmiegeneben kennzeichnete, was nach einem Satz von G. KOENIGS integrallos möglich ist.

Daß (1,14) in dieser Allgemeinheit hier anwendbar ist, versteht sich nicht ganz von selbst. Ist doch im bewegten System einer K_4 -Schiebung ein Geradenpaar ausgezeichnet, und es wird sehr wohl darauf ankommen, wie die Komplexkurve zu diesem Geradenpaar liegt. Daß trotzdem durch (1) eine jede K_4 -Fläche erfaßt wird, verdankt man dem Umstand, daß jede Komplexkurve, bezogen auf die Basis q_1, s_1, s_2, q_2 eine Darstellung (1) bei geeigneter Wahl der Funktion $G(s)$ besitzt, falls nur ihr zugehöriger Komplex durch $(q_1, q_2) + (s_1, s_2)$ gekennzeichnet ist. So haben wir aber die Basis der K_4 -Schiebung in (9) eingerichtet.

Kommen wir nun zu einem Eindeutigkeitsatz. Wir betrachten eine Regelfläche, die gebildet wird aus den Tangenten an die Komplexkurven längs einer Asymptotenlinie der anderen Schar. Durch Angabe einer Komplexkurve und einer Asymptotenlinie der anderen Schar und der Tangenten an die Komplexkurven längs dieser Asymptotenlinie ist eine K_4 -Fläche eindeutig bestimmt, falls wir den zur Fläche gehörenden festen linearen Komplex kennen und die Tangenten, von denen wir sprechen, diesem Komplex nicht angehören.

Durch Vorgabe der Regelfläche mit ihren Asymptotenlinien und durch Angabe des festen linearen Komplexes ist, wie wir in Abschnitt 4 sahen, die zu der Fläche gehörende K_4 -Schiebung eindeutig bestimmt. Da wir ferner eine Komplexkurve der Fläche und damit auch deren Lage im bewegten System kennen, ist durch die Vorgaben tatsächlich Eindeutigkeit gewährleistet.

Der benützte Satz über K_4 -Schiebungen ist auch als Existenzsatz ausgesprochen, und somit gilt: *Geben wir im projektiven Raum, in dem ein linearer Komplex ausgezeichnet ist, eine Regelfläche, die diesem Komplex nicht angehört,*

und auf ihr eine Asymptotenlinie und ferner eine Komplexkurve vor, so gibt es sicher eine K_4 -Fläche, zu der der lineare Komplex gehört, derart, daß die Asymptotenlinie der gegebenen Regelfläche Asymptotenlinie der Komplexfläche wird, daß die Erzeugenden der Regelfläche die Komplexkurven berühren und daß die Komplexkurven der Fläche zu der gegebenen projektiv verwandt sind. Hat man eine solche Fläche, so gewinnt man alle anderen, den Voraussetzungen genügenden, indem man eine bestimmte Komplexkurve der Fläche betrachtet und auf diese eine Projektivität, die den Komplex der Kurve festläßt und die Komplexkurve wieder mit der zu der Stelle gehörenden Erzeugenden der Regelfläche in dem ausgezeichneten Punkt zur Berührung bringt, und dann die zu der Fläche gehörende Schiebung anwendet.

Wir erwähnen hier noch, daß die so konstruierte K_4 -Fläche dann und nur dann eine K_4 -Fläche, aber keine K_3 -Fläche ist, wenn die vorgegebene Regelfläche keine Komplexregelfläche ist, dann und nur dann eine K_3 -Fläche, aber keine K_2 -Fläche, falls die vorgegebene Regelfläche eine Komplexregelfläche, aber keine Kongruenzregelfläche ist, und letzten Endes im Falle einer vorgegebenen Kongruenzregelfläche eine K_2 -Fläche, d. h. eine zweisinnige Komplexfläche wird. Die Konstruktion versagt jedoch, falls die Regelfläche in dem zur Konstruktion notwendigen festen linearen Komplex liegt. Dies hatten wir aber von vornherein ausgeschlossen. — Auf diese Zusammenhänge werden wir im folgenden noch genauer eingehen.

Hier noch eine Bemerkung! Mit einer K_4 -Fläche, die keine K_3 -Fläche ist, ist im allgemeinen Fall ein eindeutig bestimmtes Nullsystem verbunden. Zu einer K_4 -Fläche gehört also eine zweite ebensolche, die aus der Ausgangsfläche durch Anwendung des Nullsystems entsteht. Zu beiden Flächen gehört dieselbe K_4 -Schiebung, die Komplexkurven, die die Komplexfläche erzeugen, sind Spiegelkurven bezüglich des ausgezeichneten Geradenpaares des bewegten Systems.

6. Die K_3 -Schiebungen. In der Bewegung des Geradenraumes, die zu einer K_3 -Schiebung gehört, gibt es — so sahen wir in Abschnitt 2 — eine Gerade g , die punktweise fest ist. Die Hyperebene E des bewegten Systems rollt jetzt längs eines Kegels mit dem Scheitel in dieser Geraden g ab. Ein jeder Punkt von g ruft in der zugehörigen Schiebung die Eigenschaften einer K_4 -Schiebung hervor. Da nun mit zwei Punkten der Geraden g auch jeder andere Punkt fest ist in der Bewegung des Geradenraumes, wird es darauf ankommen, eine K_3 -Schiebung in zweifacher Weise als K_4 -Schiebung aufzufassen.

Wir werden je nach der Lage der Geraden g von verschiedenen K_3 -Schiebungen zu sprechen haben. g kann ganz auf der absoluten Quadrik liegen, diese berühren oder aber in zwei reellen oder komplexen Punkten schneiden. In einer K_3 -Schiebung ist ein festes Komplexbüschel und mit diesem ist entweder ein Geradenbüschel oder es sind zwei Geraden ausgezeichnet, die zusammenfallen können oder ein windschiefes reelles oder konjugiert komplexes Geradenpaar bilden. Diese besonderen Geraden gehören dem im bewegten System der Schiebung ausgezeichneten Komplex an und werden von festen Punkten dieses Systems durchlaufen.

Im bewegten System des R_3 ist durch \mathfrak{w} und die Gerade g eine Ebene der Dimension 2 bestimmt. Auch auf ihre Lage zur absoluten Quadrik Q wird es bei den möglichen K_3 -Schiebungen ankommen. Für den R_3 folgt: *Im bewegten System einer K_3 -Schiebung sind die Geradenscharen einer Quadrik, zwei verschränkte oder zwei zusammenfallende Strahlbüschel ausgezeichnet, wobei noch auf die Realitätsverhältnisse zu achten ist.*

Zur analytischen Behandlung legen wir die Basis des bewegten Systems in geeigneter Weise bezüglich diesen hervorgehobenen geometrischen Gebilden. Wählen wir auf der Geraden g zwei zueinander polare Punkte \mathfrak{a} und \mathfrak{b} aus, was immer möglich ist, so bilden die Punkte \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{w} ein Polardreieck bezüglich Q in der Ebene, die sie aufspannen.

Zu den Gegenkantenpaaren eines Tetraeders gehören drei paarweise zueinander polare Gerade des R_3 , und umgekehrt gehört zu drei paarweise zueinander polaren Geraden des R_3 , die die absolute Quadrik in je zwei reellen verschiedenen Punkten schneiden, im R_3 ein Tetraeder. Versuchen wir also die Basis des bewegten Systems so zu legen, daß \mathfrak{a} bzw. \mathfrak{b} durch

$$(6,1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{a} &= (q_1, s_2) + A (q_2, s_1) \\ \mathfrak{b} &= (q_1, s_1) + B (q_2, s_2) \end{aligned}$$

dargestellt werden, so heißt dies, durch die drei Punkte \mathfrak{w} , \mathfrak{a} , \mathfrak{b} im R_3 je eine Gerade legen, deren jede Q in zwei reellen, verschiedenen Punkten trifft und die paarweise zueinander polar sind. Dies ist aber in verschiedener Weise möglich, etwa so: Wir legen durch \mathfrak{w} eine beliebige Gerade, die die absolute Quadrik in zwei verschiedenen reellen Punkten trifft, und betrachten den hierzu polaren Raum der Dimension 3. In ihm sind die beiden Punkte \mathfrak{a} und \mathfrak{b} ausgezeichnet und eine Quadrik. Legen wir durch \mathfrak{a} eine Gerade dieses R_3 , die die Quadrik wieder in zwei verschiedenen reellen Punkten trifft, so hat die dazu polare Gerade dieselbe Eigenschaft und geht durch \mathfrak{a} , da \mathfrak{b} nach Voraussetzung zu \mathfrak{a} polar ist. Der Ansatz (1) ist also gerechtfertigt.

In (1) sind A und B Konstante, da \mathfrak{a} und \mathfrak{b} fest sind in dem bewegten System. Eine Umnormung der Basisvektoren mit konstanten Faktoren:

$$(6,2) \quad \begin{aligned} \hat{q}_1 &= k_1 q_1, & \hat{s}_1 &= k_1 s_1, \\ \hat{q}_2 &= k_2 q_2, & \hat{s}_2 &= k_2 s_2, \end{aligned} \quad k_i, \bar{k}_i = \text{const.}$$

steht uns noch offen, wenn wir dafür sorgen, daß auch nach der Umnormung $\hat{\mathfrak{w}}$ dargestellt wird durch

$$\hat{\mathfrak{w}} = k [(q_1, q_2) + (s_1, s_2)], \quad k = \text{const.}$$

Es muß also für die k_i, \bar{k}_i in (2) sein:

$$(6,3) \quad k_1 k_2 = \bar{k}_1 \bar{k}_2.$$

Bei der Umnormung (2) mit (3) geht nun \mathfrak{a} und \mathfrak{b} über in:

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{a}} &= k_1 \bar{k}_2 (q_1, s_2) + k_2 \bar{k}_1 (q_2, s_1) = \frac{k_1}{k_2} \{ \bar{k}_2^2 (q_1, s_2) + k_2^2 (q_2, s_1) \} \\ \hat{\mathfrak{b}} &= k_1 \bar{k}_1 (q_1, s_1) + k_2 \bar{k}_2 (q_2, s_2) = \frac{k_1}{k_2} \{ \bar{k}_1^2 (q_1, s_1) + k_2^2 (q_2, s_2) \}. \end{aligned}$$

Somit gilt: Ist $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ einer der Werte 1, 0, -1 fähig, so können wir die Basis des bewegten Systems einer K_3 -Schiebung immer so wählen, daß die Punkte

$$(6,4) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= (q_1, s_2) \div \varepsilon (q_2, s_1) \\ \mathbf{b} &= (q_1, s_1) - \bar{\varepsilon} (q_2, s_2) \end{aligned}$$

fest sind in der im Geradenraum induzierten Bewegung.

Bei geeigneter Wahl der Basis des bewegten Systems einer K_3 -Schiebung gilt

$$(6,5) \quad \alpha_{11} - \varepsilon \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} + \bar{\varepsilon} \alpha_{21} = 0$$

für die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen (1,8) mit (1,10). Für $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ sind die Werte 1, 0, -1 zuzulassen. Die Bedingung (5) folgt nach (1,13) unmittelbar aus dem Festsein der Punkte \mathbf{a}, \mathbf{b} in (4).

Wir stellen einen Punkt der von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{w}$ aufgespannten Ebene der Dimension zwei des bewegten Systems des Geradenraumes dar durch

$$(6,6) \quad \mathbf{d} = d_0 \mathbf{w} + d_1 \mathbf{a} + d_2 \mathbf{b}.$$

Diese Ebene schneidet die absolute Quadrik in dem Kegelschnitt

$$(6,7) \quad d_0^2 + \varepsilon d_1^2 + \bar{\varepsilon} d_2^2 = 0.$$

Dem Schnittgebilde entsprechen im R_3 gewisse Geradenmannigfaltigkeiten. Wir erhalten so die folgende Liste:

ε	$\bar{\varepsilon}$	Schnittgebilde im R_3	ausgezeichnet im R_3 ist
1	1	nullteiliger Kegelschnitt	nullteilige Quadrik
1	-1	reeller Kegelschnitt	reelle Quadrik
-1	1		
-1	-1	reeller Kegelschnitt	reelle Quadrik
-1	0	Geradenpaar (reell)	zwei verschränkte Strahlbüschel (reell)
0	-1		
1	0	Geradenpaar (nicht reell)	zwei verschränkte Strahlbüschel (nicht reell)
0	1		
0	0	Doppelgerade.	zwei zusammenfallende Strahlbüschel.

Die zusammengefaßten Fälle gehen auseinander hervor durch Bezeichnungsänderung. Die anderen Fälle sind aber tatsächlich verschieden (vom reellen Standpunkt). Betrachten wir hierzu noch die von der Geraden \mathbf{g} im R_3 aus Q ausgeschnittenen festen Punkte

$$(6,9) \quad d_0 = 0, \quad \varepsilon d_1^2 + \bar{\varepsilon} d_2^2 = 0$$

und die ihnen entsprechenden Bahnkurven des R_3 , die Geraden sind:

ε	$\bar{\varepsilon}$	feste Punkte auf Q im R_3	feste Geraden im R_3
1	1	konjugiert komplexes Punktepaar	nichtreelles Geradenpaar
1	-1		
-1	1	reelles Punktepaar	reelles Geradenpaar
-1	-1	konjugiert komplexes Punktepaar	nichtreelles Geradenpaar
1	0	doppeltzählender Punkt	zusammenfallende Geraden
0	1		
-1	0	doppeltzählender Punkt	zusammenfallende Geraden
0	-1		
0	0	die Punkte einer Geraden.	ein Strahlbüschel.

Es gibt also sechs reell verschiedene Typen von K_3 -Schiebungen, deren geometrische Besonderheiten aus den beiden Tabellen (8) und (10) zu entnehmen sind.

Die festen Punkte (4) des Geradenraumes geben Veranlassung zu je einem Nullsystem bzw. zu einer entarteten Korrelation — wir sahen dies bereits bei den K_4 -Schiebungen. Diese beiden Abbildungen führen den Punkt

$$(6,11) \quad p = p_0 q_1 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 q_2$$

über in

$$(6,12) \quad \mathfrak{P} = -p_1 \Omega_1 + \varepsilon p_0 \mathfrak{E}_1 - p_3 \mathfrak{E}_2 + \varepsilon p_2 \Omega_2$$

bzw. in

$$(6,13) \quad \overline{\mathfrak{P}} = p_2 \Omega_1 - p_3 \mathfrak{E}_1 - \bar{\varepsilon} p_0 \mathfrak{E}_2 + \bar{\varepsilon} p_1 \Omega_2.$$

Die erste Aussage hatten wir schon in (3,6), (3,7) eingesehen, die zweite gewinnt man entsprechend.

Sprechen wir vom allgemeinen Fall. Die einparametrische Schar der festen Nullsysteme geben Veranlassung zu einer festen Projektivität: *Zwei Spiegelpunkte des bewegten Systems bezüglich dem festen Geradenpaar beschreiben projektiv gleichwertige Kurven. Die Spiegelung an dem festen Geradenpaar führt eine jede Bahnkurve wieder in eine Bahnkurve über, so daß sich Punkte, die zum gleichen Parameterwert gehören, entsprechen.*

Die Geraden des bewegten Systems ordnen sich wieder bezüglich der Lage ihrer Bilder im R_3 in bezug auf \mathfrak{w} und der Ebene durch $\mathfrak{w}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Die Geraden, deren Bildpunkte polar zu dieser Ebene sind, beschreiben Regelflächen, die in der von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ definierten linearen Kongruenz liegen — *es handelt sich um Kongruenzregelflächen*. Ihre Bahnkurven, das sind ihre Asymptotenlinien, sind projektiv gleichwertige Komplexkurven. Diese Geraden liegen ja im bewegten System auf der ausgezeichneten Quadrik (bzw. einem der anderen Geradengebilde), zu deren zweiter Geradenschar sie gehören. Die Asymptotenlinien sind projektiv gleichwertig, denn die einparametrische Schar von Nullsystemen, die zu $\mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{b}$, $\lambda = \text{const.}$, gehören, führen eine jede so entstehende Kongruenzregelfläche in sich über und vertauschen ihre Asymptotenlinien.

Irgend ein Punkt der Hyperebene E des bewegten Systems des R_3 , der nicht auf \mathfrak{g} liegt, ist sicher polar zu einem der Punkte von \mathfrak{g} . Gehen wir von einem Punkt der absoluten Quadrik aus, so heißt dies: *Eine jede Gerade des ausgezeichneten Komplexes \mathfrak{w} beschreibt in der K_3 -Schiebung eine Komplexregelfläche, deren Komplex zu dem von \mathfrak{a} und \mathfrak{b} aufgespannten Komplexbüschel gehört.* Im bewegten System des R_3 trifft eine solche Gerade zwei zusammengehörende Gerade des ausgezeichneten Regulus (dies sind zwei Geraden, deren Bilder im R_3 auf einer Geraden durch \mathfrak{w} liegen, d. h. konjugierte Gerade im Nullsystem von \mathfrak{w} sind). Damit kommen wir wieder auf den in Abschnitt 4 besprochenen Fall zurück.

7. Konstruktion der K_3 -Schiebungen. Als Basiselement bei der Konstruktion einer K_4 -Schiebung verwendeten wir in Abschnitt 4 eine Regelfläche, deren Asymptotenlinien dann Bahnkurven in der konstruierten Schiebung wurden. Die Regelfläche konnte beliebig vorgegeben werden.

Nur eine Gerade des ausgezeichneten Komplexes ω des bewegten Systems erzeugt eine solche Regelfläche, und in einer K_3 -Schiebung ist eine jede so entstehende Regelfläche eine Komplexregelfläche (evtl. auch eine Kongruenzregelfläche). Gelangt man nun, falls man die Konstruktion der K_4 -Schiebungen auf eine Komplexregelfläche anwendet, zu einer K_3 -Schiebung?

Jedenfalls darf diese Komplexregelfläche nicht dem festen Komplex, den wir zur Konstruktion der K_4 -Schiebung zugrunde legten, angehören. Ist dies nicht der Fall, so bestimmt ihre Vorgabe auf Grund des in Abschnitt 4 ausgesprochenen Satzes eine K_4 -Schiebung, die aber auch eine K_3 -Schiebung ist. Denn die Regelfläche, von der wir ausgehen, wird als Komplexregelfläche durch ein festes Nullsystem in sich übergeführt und diese Eigenschaft überträgt sich bei der Konstruktion auf die Figur der Schiebung. Da ferner dieses Nullsystem von dem die K_4 -Schiebung definierenden nach Voraussetzung verschieden ist, gibt es in der Figur zwei verschiedene feste Korrelationen, womit alles bewiesen ist.

Zu einer Komplexregelfläche und einem festen linearen Komplex, dem sie nicht angehört, gibt es genau eine K_3 -Schiebung derart, daß die Asymptotenlinien der gegebenen Komplexregelfläche Bahnkurven in der Schiebung sind und die beiden gegebenen Komplexe das zugehörige Komplexbüschel der K_3 -Schiebung bestimmen. Der Typus der so konstruierten K_3 -Schiebung ergibt sich aus der Lage dieses Komplexbüschels, auf die natürlich die beiden gegebenen Komplexe Einfluß haben. Wir wollen dies nicht ins Einzelne gehend diskutieren, sondern lieber noch eine direkte Konstruktion der K_3 -Schiebungen angeben, die letzten Endes auf den hier beschriebenen Sachverhalt zurückkommt.

Es gilt: *Durch Angabe einer Bahnkurve einer K_3 -Schiebung, die nicht einem der ∞^1 gegebenen linearen Komplexe angehört, ist eine K_3 -Schiebung eindeutig bestimmt.* Eines der festen Nullsysteme¹²⁾ führt nämlich die betrachtete Kurve in eine Ebenengesamtheit über, die wieder eine Bahnkurve, die von der Ausgangskurve verschieden ist, einhüllt. Die beiden Kurven sind Asymptotenlinien der von ihnen erzeugten Regelfläche, und da auch die anderen Asymptotenlinien Bahnkurven sein müssen, sind damit zwei Basisvektoren des bewegten Systems festgelegt. Wenden wir jetzt noch die feste Projektivität an, so erhalten wir zwei weitere Basisvektoren, deren gemeinsamer Normierungsfaktor durch die allgemeine Forderung, daß alle Bahnkurven asymptotisch Transformierte erster oder zweiter Stufe voneinander sind, bestimmt ist.

Hiermit ist zugleich die Konstruktion begründet: *Zu einer beliebig vorgegebenen Kurve und einem Komplexbüschel, unter dessen Komplexen es keinen geben soll, dem die Kurve angehört, gibt es genau eine K_3 -Schiebung, so daß die gegebene Kurve Bahnkurve der Schiebung ist und das feste Komplexbüschel der K_3 -Schiebung zugehört.*

Wir greifen aus dem Komplexbüschel zwei verschiedene Elemente heraus und wenden die zu diesem gehörenden Korrelationen auf die Kurve γ an, von der wir ausgehen. Es entstehen zwei einparametrische Ebenengesamtheiten

¹²⁾ Wie oben betrachten wir auch hier den Fall mit, daß die auftretenden Korrelationen, oder eine unter ihnen, entartet sind.

\tilde{x} und \tilde{x} , die ihrerseits zwei Kurven \bar{x} und \bar{x} einhüllen. Zusammengehörende Punkte von x, \bar{x}, \tilde{x} sind linear unabhängig — sonst würde eine Kongruenzregelfläche entstehen, auf der x Asymptotenlinie wäre und als Komplexkurve einem Komplex des Büschels angehören würde, was der Voraussetzung widerspräche. Üben wir jetzt noch die zweite Korrelation auf \bar{x} oder die erste auf \tilde{x} aus, so entsteht ein und dieselbe Kurve \hat{x} , deren Punkte ebenfalls von x, \bar{x}, \tilde{x} linear unabhängig sind.

Die Kurven x, \bar{x}, \tilde{x} bilden eine Konfiguration, wie wir sie von der Basis einer Schiebung kennen; Die Kurvenpaare $x, \bar{x}; x, \tilde{x}; \bar{x}, \hat{x}; \tilde{x}, \hat{x}$ sind asymptotisch Transformierte erster Stufe voneinander und also x, \bar{x} und \bar{x}, \tilde{x} asymptotisch Transformierte zweiter Stufe. Durch geeignete Normierung der erzielten Vektoren gewinnt man die Basis der Schiebung, die auf Grund der Existenz der beiden Nullsysteme eine K_3 -Schiebung ist. Da wir die Eindeutigkeit bereits bewiesen haben, ist damit alles erreicht.

Diese Konstruktion liefert uns wieder die Möglichkeit einer expliziten, integrallosen Darstellung der K_3 -Schiebungen, die bedeutend übersichtlicher wird als diejenige der K_4 -Schiebungen. Gegeben sei die Kurve

$$(7,1) \quad x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

mit den Schmiegebenen

$$(7,2) \quad \tilde{x} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\},$$

bezogen auf eine Basis $\overset{\circ}{q}_1, \overset{\circ}{s}_1, \overset{\circ}{s}_2, \overset{\circ}{q}_2$ bzw. $\overset{\circ}{Q}_1, \overset{\circ}{S}_1, \overset{\circ}{S}_2, \overset{\circ}{Q}_2$, für die die Produkttabelle (1,4) gilt und die ferner so gewählt ist, daß das gegebene Komplexbüschel durch

$$(7,3) \quad (\overset{\circ}{q}_1, \overset{\circ}{s}_2) + \varepsilon (\overset{\circ}{q}_2, \overset{\circ}{s}_1) + c [(\overset{\circ}{q}_1, \overset{\circ}{s}_1) - \bar{\varepsilon} (\overset{\circ}{q}_2, \overset{\circ}{s}_2)]$$

mit dem Büschelparameter c dargestellt ist.

Die Tangenten an die Kurve x werden durch (x, x') oder auch durch (\tilde{x}, \tilde{x}') geliefert. Zwischen diesen beiden Vektoren des Geradenraumes besteht bei richtiger Numerierung ihrer Komponenten Proportionalität, insbesondere ist

$$(7,4) \quad x_0 x'_1 - x_1 x'_0 = \varrho (X_0 X'_1 - X_1 X'_0),$$

und wir können durch eine Umnormierung etwa des Vektors \tilde{x} erreichen, daß

$$(7,5) \quad \begin{aligned} x_0 x'_1 - x_1 x'_0 &= -E (X_0 X'_1 - X_1 X'_0) \\ x_0 x'_2 - x_2 x'_0 &= -E (X_0 X'_2 - X_2 X'_0) \\ x_0 x'_3 - x_3 x'_0 &= +E (X_1 X'_2 - X_2 X'_1) \\ x_2 x'_3 - x_3 x'_2 &= -E (X_2 X'_3 - X_3 X'_2) \\ x_3 x'_1 - x_1 x'_3 &= -E (X_3 X'_1 - X_1 X'_3) \\ x_1 x'_2 - x_2 x'_1 &= +E (X_0 X'_3 - X_3 X'_0). \end{aligned}$$

Über die Größe E , für die wir die Werte 1, -1 zulassen müssen, ist durch die Forderung der Realität verfügt.

Zu dem Komplexbüschel (3) gehören zwei verschiedene Korrelationen, etwa die [vgl. (6,11), (6,12), (6,13)], die den Punkt

$$(7,6) \quad p = p_0 \overset{\circ}{q}_1 + p_1 \overset{\circ}{s}_1 + p_2 \overset{\circ}{s}_2 + p_3 \overset{\circ}{q}_2$$

in die Ebene

$$(7,7) \quad \mathbb{P} = -p_1 \overset{\circ}{Q}_1 + \varepsilon p_0 \overset{\circ}{E}_1 - p_2 \overset{\circ}{E}_2 + \varepsilon p_2 \overset{\circ}{Q}_2$$

bzw. in die Ebene

$$(7,8) \quad \overline{\mathbb{P}} = p_2 \overset{\circ}{Q}_1 - p_2 \overset{\circ}{E}_1 - \bar{\varepsilon} p_0 \overset{\circ}{E}_2 + \bar{\varepsilon} p_1 \overset{\circ}{Q}_1$$

überführen.

Wenden wir diese Korrelationen auf unsere Punkt- bzw. Ebenenmannigfaltigkeit (1) bzw. (2) an, so entstehen drei weitere Kurven bzw. Ebenengesamtheiten, welche die Schmiegeebenen der gleichbezeichneten Kurven sind:

$$(7,9) \quad \begin{aligned} q_1 &= \{ x_0, x_1, x_2, x_3 \} \\ s_1 &= \{ -\varepsilon X_1, X_0, -\varepsilon X_2, X_2 \} \\ s_2 &= \{ -\bar{\varepsilon} X_2, \bar{\varepsilon} X_3, X_0, -X_1 \} \\ q_2 &= \Phi \{ -\varepsilon \bar{\varepsilon} x_3, -\bar{\varepsilon} x_2, \varepsilon x_1, x_0 \} \\ Q_1 &= \{ X_0, X_1, X_2, X_3 \} \\ (7,10) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= E \{ -\varepsilon x_1, x_0, -\varepsilon x_3, x_2 \} \\ \mathcal{Q}_2 &= E \{ -\bar{\varepsilon} x_2, \bar{\varepsilon} x_3, x_0, -x_1 \} \\ Q_2 &= \Phi \{ -\varepsilon \bar{\varepsilon} X_3, -\bar{\varepsilon} X_2, \varepsilon X_1, X_0 \}. \end{aligned} \end{aligned}$$

Die Vektoren (9) bzw. (10) bilden die Basis einer K_3 -Schiebung, in der die Kurve γ Bahnkurve ist, und eine jede solche Schiebung läßt sich so darstellen.

Daß diese Vektoren nach geeigneter Normierung die Basis einer Schiebung bilden, wissen wir bereits. Nun bestätigt man aber sofort, daß bei der von uns gewählten Normierung eine jede Ebene

$$(7,11) \quad p_0 Q_1 + p_1 \mathcal{Q}_1 + p_2 \mathcal{Q}_2 + p_3 Q_2$$

die Schmiegeebene der Bahnkurve des Punktes

$$(7,12) \quad p_0 q_1 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 q_2$$

ist. Um dies nachzuweisen, braucht man nur zu prüfen, daß gilt:

$$\begin{aligned} Q_1 s'_1 + \mathcal{Q}_1 q'_1 &= 0 & Q_2 s'_2 + \mathcal{Q}_2 q'_2 &= 0 \\ Q_1 s'_2 + \mathcal{Q}_2 q'_1 &= 0 & Q_2 s'_1 + \mathcal{Q}_1 q'_2 &= 0 \\ Q_1 q_2 + Q_2 q_1 &= 0 & \mathcal{Q}_1 s_2 + \mathcal{Q}_2 s_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dies folgt mittels der Produkttabelle (1,4) aus (7,5).

Es ist jetzt noch die Frage nach dem ausgezeichneten Komplex im bewegten System dieser Schiebung offen. Wir wissen nur, daß dieser durch

$$(7,13) \quad (q_1, q_2) + C (s_1, s_2), \quad C = \text{const.}$$

dargestellt wird. Welches ist der Wert der hier eintretenden Konstanten?

Nach (1,8) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 q'_1 &= \alpha_{12} \mathcal{Q}_1 s_2 \\ Q_1 s'_1 &= \beta_{12} Q_1 q_2, \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\alpha_{12} \mathfrak{S}_1 \mathfrak{s}_2 + \beta_{12} \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{q}_2 = 0,$$

also:

$$(7,14) \quad \alpha_{12} E + \beta_{12} \Phi = 0.$$

Der im bewegten System der Schiebung (9) ausgezeichnete Komplex wird dann und nur dann durch

$$\mathfrak{w} = (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) + (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$$

dargestellt, wenn wir

$$\Phi = E$$

setzen. Die beiden festen Komplexe in der Schiebung sind dann durch

$$\mathfrak{a} = \Phi \varepsilon (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_2) + (\mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_1)$$

$$\mathfrak{b} = \Phi \bar{\varepsilon} (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{s}_1) - (\mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_2)$$

gegeben.

Hier sehen wir nun, wie sich der Typus der entstehenden K_3 -Schiebung bestimmt. Durch das vorgegebene Komplexbüschel waren die Größen $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ nur bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt. Es stehen ja die vier Möglichkeiten der Tabelle (6,8) offen. Durch E werden dann $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ völlig festgelegt. Durch E wird aber im wesentlichen der Windungssinn der gegebenen Kurve bestimmt. Der Typus einer K_3 -Schiebung wird durch das feste Komplexbüschel und durch den Windungssinn einer ihrer Bahnkurven bestimmt. Insbesondere: Die nicht geradlinigen Bahnkurven einer K_3 -Schiebung sind alle gleichsinnig gewunden.

Wir fassen zusammen: Eine jede K_3 -Schiebung läßt sich explizit durch ihre Basis (9) angeben. Dort ist

$$\mathfrak{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

eine beliebige Raumkurve,

$$\mathfrak{X} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$$

deren Schmiegebenen. Diese Vektoren sind so normiert, daß (5) gilt, was bei einer bestimmten Wahl von $E = 1, -1$ zu erreichen ist. Für $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ sind die Wertepaare $1, 1; 1, -1; 0, 1; 0, 0$ zuzulassen.

8. Die K_3 -Flächen. Durch Schiebung einer Komplexkurve von \mathfrak{w} des bewegten Systems entsteht in einer K_3 -Schiebung eine K_3 -Fläche. Die Asymptotenlinien der anderen Schar sind die Bahnkurven in der Schiebung. So übertragen sich deren Eigenschaften auf die zweite Asymptotenlinienschar einer K_3 -Fläche. Wir können uns darauf beschränken, die Ergebnisse auszusprechen.

Die K_3 -Flächen sind genau diejenigen Komplexflächen, bei denen die Tangenten an die Komplexkurven längs einer jeden Asymptotenlinie der anderen Schar Komplexregelflächen bilden. Es gibt sechs reell verschiedene Typen von

K_3 -Flächen. Vier verschiedene Typen werden unterschieden durch die vier möglichen Fälle eines mit der Fläche verbundenen festen Komplexbüschels [vgl. Tabelle (6,10)]. Den Komplexen dieses Büschels gehören die erwähnten Komplexregelflächen mit ihren Komplexkurven als Komplexorte an. Zwei der vier Fälle spalten sich nochmals nach dem Windungssinn einer — und damit aller — Asymptotenlinien der anderen Schar auf. Insbesondere: *Die Asymptotenlinien der anderen Schar einer K_3 -Fläche sind alle gleichsinnig gewunden.*

Der Eindeutigkeitsatz: *Durch Angabe je einer Asymptotenlinie der beiden Scharen ist eine K_3 -Fläche eindeutig bestimmt, wenn außerdem das mit der Fläche verbundene Komplexbüschel bekannt ist und nicht zufällig eine der Kurven in einem Komplex des Büschels liegt.* Die Vorgaben bestimmen ja die zugehörige K_3 -Schiebung, und ferner ist die Lage der Komplexkurve im bewegten System bekannt.

Der Existenzsatz: *Gibt man im projektiven Raum, in dem ein Komplexbüschel ausgezeichnet ist, eine beliebige Kurve, die nicht einem der Komplexe des Büschels angehört, und eine Komplexkurve vor, so gibt es mindestens eine K_3 -Fläche, die die gegebene Kurve als Asymptotenlinie besitzt, deren Tangenten an die Komplexkurven längs der Asymptotenlinien der anderen Schar jeweils in einem der Komplexe des vorgegebenen Büschels liegen und deren Komplexkurven mit der vorgegebenen projektiv verwandt sind.* Die Gesamtheit der durch die Vorgaben fixierten Flächen hängen nur von Konstanten ab. Legt man an einer Stelle die Komplexkurve fest, so erzielt man Eindeutigkeit.

Die Konstruktion: Durch das Komplexbüschel sind zwei verschiedene, eventuell ausgeartete Korrelationen (im allgemeinen Fall Nullsysteme) definiert, die, angewandt auf die gegebene Kurve, drei weitere punktweise aufeinander bezogene Kurven erzeugen. Es entsteht ein bewegtes Vierseit, so daß die Eckpunkte auf den aus den Seiten entstehenden Regelflächen Asymptotenlinien beschreiben. Normieren wir die Eckpunktsvektoren so, daß auch die anderen Bahnkurven auf diesen Regelflächen Asymptotenlinien sind, so haben wir die zu der Fläche gehörende K_3 -Schiebung. Betrachten wir nun das bewegte System an einer bestimmten Stelle. In ihm ist ein Punkt der gegebenen Kurve und der zu der Schiebung gehörende Komplex ausgezeichnet. Sorgen wir durch eine Projektivität dafür, daß die gegebene Komplexkurve mit dem Punkt indiziert und in den Komplex fällt, und halten dann diese Lage der Komplexkurve im bewegten System fest, so entsteht bei Anwendung der konstruierten K_3 -Schiebung die gewünschte K_3 -Fläche. — Jede andere Fläche der genannten Klasse erhält man dann, indem man im bewegten System auf die Komplexkurve eine Projektivität anwendet, die deren Komplex festläßt und denselben oder einen anderen Punkt der Komplexkurve mit dem zu dem Parameterwert gehörenden Punkt der gegebenen Kurve zur Inzidenz bringt.

Die explizite Darstellung einer jeden K_3 -Fläche folgt unmittelbar aus der Konstruktion nach (1,14), (7,5), (7,9): *Eine jede K_3 -Fläche läßt sich integrallos*

darstellen in der Form:

$$\begin{aligned}
 (8,1) \quad y_0 &= x_0 - \varepsilon s X_1 - \bar{\varepsilon} G'(s) X_2 - \varepsilon \bar{\varepsilon} E [2 G(s) - s G'(s)] x_3 \\
 y_1 &= x_1 + s X_0 + \bar{\varepsilon} G'(s) X_3 - \bar{\varepsilon} E [2 G(s) - s G'(s)] x_2 \\
 y_2 &= x_2 - \varepsilon s X_3 + G'(s) X_0 + \varepsilon E [2 G(s) - s G'(s)] x_1 \\
 y_3 &= x_3 + s X_2 - G'(s) X_1 + E [2 G(s) - s G'(s)] x_0.
 \end{aligned}$$

Hierin ist $G(s)$ eine willkürliche Funktion, γ eine beliebige Kurve, und die X_i sind aus

$$\begin{aligned}
 (8,2) \quad X_0 x_3 + X_1 x_2 - X_2 x_1 - X_3 x_0 &= 0 \\
 X_0 x'_3 + X_1 x'_2 - X_2 x'_1 - X_3 x'_0 &= 0 \\
 X_0 x''_3 + X_1 x''_2 - X_2 x''_1 - X_3 x''_0 &= 0 \\
 X_0 X'_1 - X_1 X'_0 &= E (x_0 x'_1 - x_1 x'_0)
 \end{aligned}$$

zu berechnen, was bei einer durch die Kurve γ bestimmten Wahl von E möglich ist ($E = 1, -1$). Für $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ läßt man die Wertepaare $1, 1$; $1, -1$; $0, 1$; $0, 0$ zu. Den Typus der entstehenden K_3 -Fläche entnimmt man aus der Tabelle (6,8), (6,10), indem man dort $E \varepsilon, E \bar{\varepsilon}$ mit ε bzw. $\bar{\varepsilon}$ identifiziert.

Über die Kurve γ hatten wir nur vorauszusetzen, daß sie nicht einem der Komplexe des Büschels

$$(\overset{\circ}{q}_1, \overset{\circ}{s}_2) + \varepsilon (\overset{\circ}{q}_2, \overset{\circ}{s}_1) + c [(\overset{\circ}{q}_1, \overset{\circ}{s}_1) - \bar{\varepsilon} (\overset{\circ}{q}_2, \overset{\circ}{s}_2)], \quad c = \text{const.}$$

angehört. Sie darf jedoch sehr wohl Komplexkurve eines anderen Komplexes sein — in diesem Fall entsteht, wie wir unten noch genauer sehen werden — eine K_3 -Fläche.

Noch eine Bemerkung! Mit einer K_3 -Fläche ist im allgemeinen Fall eine feste involutorische Projektivität verbunden. Zu einer K_3 -Fläche gehört also eine weitere, projektiv gleichwertige, die durch Spiegelung an dem festen Geradenpaar aus der ersten hervorgeht.

9. Die K_3 -Schiebungen. An dieser Stelle wollen wir den Zusammenhang zu der üblichen Behandlungsweise dieser Schiebungen herstellen. Dies erscheint uns wichtig, da durch den weiteren Rahmen, in den wir die K_3 -Schiebungen durch die vorliegende Untersuchung gestellt haben, auch auf diese selbst ein neues Licht fällt. Auf die zahlreichen Eigenschaften der K_3 -Schiebungen gehen wir nicht weiter ein, man vergleiche dazu die Literatur¹³⁾.

Im bewegten System des Geradenraumes, das zu einer K_3 -Schiebung gehört, gibt es eine feste Ebene der Dimension zwei. Die Hyperebene E des bewegten Systems rollt über einen Kegel mit dem Scheitel in dieser Ebene ab. Der Pol w der Ebene E beschreibt eine ebene Kurve der Dimension 2, und diese Ebene ist nach Abschnitt 2 die Polarebene der festen Ebene der Dimension zwei.

Durch den ausgezeichneten Komplex w und die feste Ebene, die wir uns durch die drei linear unabhängigen Punkte a, b, c aufgespannt denken, ist im bewegten System des R_3 ein Raum der Dimension drei ausgezeichnet, im

¹³⁾ Man vergleiche etwa die auf S. 445 zitierte Arbeit von STRUBECKER, wo sich weitere Literaturhinweise finden.

bewegten System des R_3 ist also eine lineare Kongruenz hervorgehoben. Ein Punkt einer dieser ausgezeichneten Geraden beschreibt, wie wir wissen, in der Schiebung eine Komplexkurve. Da nun durch jeden Punkt eine Gerade der linearen Kongruenz geht, so gilt: *Sämtliche Bahnkurven einer K_2 -Schiebung sind Komplexkurven, die Komplexen des durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ definierten Bündels angehören — oder Gerade, deren Bilder durch die Ebene $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aus \mathcal{Q} ausgeschnitten werden.*

Die Figur einer K_2 -Schiebung läßt ∞^3 Korrelationen und also ∞^2 Projektivitäten in sich zu. Es folgt: *Sämtliche nicht geradlinige Bahnkurven einer K_2 -Schiebung sind projektiv verwandte Komplexkurven.* Damit äquivalent ist die Aussage: *Eine jede Gerade des bewegten Systems, die dem Komplex \mathfrak{w} angehört, erzeugt in einer K_2 -Schiebung eine Kongruenzregelfläche.*

Wir kommen gleich zu der analytischen Behandlung der K_2 -Schiebungen. Betrachten wir im bewegten System des R_3 alle Geraden durch \mathfrak{w} des von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{w}$ aufgespannten Raumes. Da dem Schnittgebilde dieser Geraden-gesamtheit mit der absoluten Quadrik als Bild im R_3 eine lineare Kongruenz entspricht, so gibt es sicher eine Gerade durch \mathfrak{w} , die \mathcal{Q} in zwei verschiedenen reellen Punkten schneidet. Der Schnitt dieser Geraden mit der Polarhyper-ebene E sei der Punkt \mathfrak{c} , der dann sicher nicht auf \mathcal{Q} liegt. \mathfrak{c} ist ein Punkt der festen Ebene, er möge mit \mathfrak{a} und \mathfrak{b} ein Polardreieck in dieser Ebene bilden.

An Hand dieser Voraussetzungen können wir die Basis des bewegten Systems des R_3 so wählen, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= \mathfrak{v} = (q_1, q_2) - (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) \\ (9,1) \quad \mathfrak{a} &= (q_1, \mathfrak{s}_2) + \varepsilon (q_2, \mathfrak{s}_1) \\ \mathfrak{b} &= (q_1, \mathfrak{s}_1) - \bar{\varepsilon} (q_2, \mathfrak{s}_2) \end{aligned}$$

die festen Punkte des R_3 sind. Die Überlegungen des Abschnitts sechs lassen sich hierauf übertragen. Es gilt dann: *Bei geeigneter Wahl der Basis einer K_2 -Schiebung ist die durch die Punkte (1) aufgespannte Ebene punktweise fest, für die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen gilt dann:*

$$(9,2) \quad \alpha = 0, \alpha_{11} - \varepsilon \alpha_{22} = 0, \alpha_{12} + \bar{\varepsilon} \alpha_{21} = 0.$$

Führen wir in der Ebene $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{v}$ durch

$$(9,3) \quad \mathfrak{h} = h_0 \mathfrak{v} + h_1 \mathfrak{a} + h_2 \mathfrak{b}$$

lokale Koordinaten ein, so hat das Schnittgebilde mit der absoluten Quadrik die Gleichung:

$$(9,4) \quad -h_0^2 + \varepsilon h_1^2 + \bar{\varepsilon} h_2^2 = 0.$$

Die Tabelle (6,8) ist wieder anwendbar, man hat dort $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ durch ihren negativen Wert zu ersetzen. Es folgt: *Durch eine K_2 -Schiebung sind im R_3 je nachdem eine Quadrik, zwei verschränkte Geradenbüschel oder zwei zusammenfallende Geradenbüschel ausgezeichnet.* Mit anderen Worten: *Durch eine K_2 -Schiebung ist im projektiven Raum eine elliptische, eine quasielliptische oder eine isotrope Geometrie definiert.* Vom reellen Standpunkt aus spaltet sich der erste Fall in drei, der zweite in zwei verschiedene Typen auf.

Da die Geradenscharen der quadratischen Gebilde in der Schiebung fest sind bzw. in sich übergehen, ist zu vermuten, daß gilt: *Die K_2 -Schiebungen sind die Clifford-Schiebungen einer elliptischen, einer quasielliptischen oder einer isotropen Geometrie.* Diese Aussage werden wir sofort durch die explizite Darstellung dieser Schiebungen bestätigt erhalten.

Eine jede Bahnkurve der Schiebung ist eine Komplexkurve. Wollen wir die Konstruktion der K_2 -Schiebungen hier anwenden, so müssen wir also notwendig von einer Komplexkurve ausgehen, die nicht dem dort benützten Komplexbüschel angehört. Wir werden sie dem Komplex \mathfrak{v} zugehören lassen, da sie ja andererseits in einem Komplex des Bündels (1) liegen muß. Machen wir dies, so entsteht tatsächlich eine K_2 -Schiebung, da nun in der Figur drei unabhängige Nullsysteme ausgezeichnet sind. So folgt: *Wenden wir die Konstruktion einer K_2 -Schiebung auf eine Komplexkurve an, die nicht dem mit der K_2 -Schiebung verbundenen Komplexbüschel angehört, so entsteht eine K_2 -Schiebung, und jede K_2 -Schiebung läßt sich so erzeugen.*

Wird die Kurve γ durch das Nullsystem von \mathfrak{v} in ihre Schmiegeebengesamtheit übergeführt, so ist

$$(9,5) \quad X_0 = x_0, \quad X_1 = -x_1, \quad X_2 = -x_2, \quad X_3 = x_3,$$

und eine jede solche Kurve läßt sich explizit angeben:

$$(9,6) \quad \{1, t, F'(t), [t F'(t) - 2 F(t)]\}.$$

$F(t)$ ist hierin frei wählbar.

Nach (5) ist die Normierungsbedingung (7,5) mit $E = +1$ erfüllt. Aus (7,9) folgt dann unmittelbar: *Der Basis einer jeden K_2 -Schiebung kann man die integrallose Gestalt geben:*

$$(9,7) \quad \begin{aligned} q_1 &= \{x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3\} \\ \mathfrak{a}_1 &= \{\varepsilon x_1, \quad x_0, \quad -\varepsilon x_3, \quad -x_2\} \\ \mathfrak{a}_2 &= \{\bar{\varepsilon} x_2, \quad \bar{\varepsilon} x_3, \quad x_0, \quad x_1\} \\ q_2 &= \{-\varepsilon \varepsilon x_3, \quad -\bar{\varepsilon} x_2, \quad \varepsilon x_1, \quad x_0\}, \end{aligned}$$

wenn man hierin γ als Komplexkurve von \mathfrak{v} in der Gestalt (6) verwendet. Für $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ sind die sechs, in der Tabelle (6,8) als verschieden angemerkten Wertepaare zuzulassen.

Ein Punkt

$$(9,8) \quad \hat{p} = p_0 q_1 + p_1 \mathfrak{a}_1 + p_2 \mathfrak{a}_2 + p_3 q_2$$

des bewegten Systems der Schiebung (7) beschreibt eine Bahnkurve mit den Komponenten

$$(9,9) \quad \begin{aligned} \hat{p}_0 &= p_0 x_0 + \varepsilon p_1 x_1 + \varepsilon p_2 x_2 - \varepsilon \bar{\varepsilon} p_3 x_3 \\ \hat{p}_1 &= p_0 x_1 + p_1 x_0 + \bar{\varepsilon} p_2 x_3 - \bar{\varepsilon} p_3 x_2 \\ \hat{p}_2 &= p_0 x_2 - \varepsilon p_1 x_3 + p_2 x_0 + \varepsilon p_3 x_1 \\ \hat{p}_3 &= p_0 x_3 - p_1 x_2 + p_2 x_1 + p_3 x_0. \end{aligned}$$

Definieren wir durch

$$(9,10) \quad \begin{aligned} p &= p_0 e_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 \\ x &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \end{aligned}$$

hyperkomplexe Zahlen und genügen die e_i der Produkttable:

$$(9,11) \quad \begin{array}{c|cccc} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & \varepsilon e_0 & -e_3 & -\varepsilon e_2 \\ e_2 & e_2 & e_3 & \bar{\varepsilon} e_0 & \bar{\varepsilon} e_1 \\ e_3 & e_3 & \varepsilon e_2 & -\bar{\varepsilon} e_1 & -\varepsilon \bar{\varepsilon} e_0 \end{array}$$

so stellt

$$(9,12) \quad \hat{p} = p \cdot x$$

den laufenden Punkt der von \hat{p} beschriebenen Bahnkurve dar. Hierin liegt der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes, daß die K_2 -Schiebungen die CLIFFORDSchen Schiebungen einer elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Geometrie sind.

Man vergleiche hierzu die zitierte Arbeit von STRUBECKER, in der die skizzierten Zusammenhänge ausführlich dargelegt werden. Um den Vergleich zu erleichtern, stellen wir noch eine Liste auf, aus der zu entnehmen ist, wie man ε , $\bar{\varepsilon}$ wählen muß, damit das Schema (11) in das zugehörige der Arbeit von STRUBECKER übergeht:

$\varepsilon, \bar{\varepsilon}$	1, 1	1, -1	-1, -1	1, 0	-1, 0	0, 0	¹⁴⁾
	(52)		(24)	(53)	(27)	(28)	

Die genannten Formelnummern beziehen sich, wie gesagt, auf die Arbeit: K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Math. Zeitschr. 52, 401—435 (1949).

10. Die K_2 -Flächen sind definitionsgemäß die Komplexflächen, die Schiebflächen in K_2 -Schiebungen sind. Also: Die K_2 -Flächen sind zweisinnige Komplexflächen, das heißt, die Asymptotenlinien beider Scharen gehören linearen Komplexen an. Der Komplex einer jeden Kurve der einen Schar liegt polar zu dem Komplex einer jeden Kurve der anderen Schar. Man sagt auch: Die Komplexe der Kurven beider Scharen gehören involutorischen Komplexbündeln an.

Umgekehrt ist aber auch eine jede zweisinnige Komplexfläche eine K_2 -Fläche. Da die Komplexkurven einer Schar von Asymptotenlinien untereinander projektiv gleichwertig sind, so gibt es in der Schiebung, die diese Kurven als Bahnkurven enthält, sicher eine einparametrische Schar von Projektivitäten, die die Figur in sich überführt. Dies ist aber nur bei den K_2 -Schiebungen der Fall.

¹⁴⁾ Das zugehörige Absolutgebilde entnimmt man der Tab. (6,8), hat aber dort ε , $\bar{\varepsilon}$ durch ihre negativen Werte zu ersetzen.

Indem man also eine K_2 -Fläche in zweifacher Weise als Schiebfläche in einer K_2 -Schiebung auffaßt, gewinnt man ihre geometrischen Eigenschaften. Durch diese Schiebungen wird in unserem Raum eine elliptische, quasi-elliptische oder isotrope Geometrie erklärt, und man kann insbesondere auch die metrischen Eigenschaften der zweisinnigen Komplexflächen in bezug auf diese nichteuklidischen Geometrien untersuchen. Doch hierauf soll nicht weiter eingegangen werden.

Wir geben der Vollständigkeit halber noch die integrallose Darstellung¹⁵⁾ der zweisinnigen Komplexflächen an, die man unmittelbar nach (1,14) an (9,7), (9,6) abliest: Sind $F(t)$ und $G(s)$ willkürliche Funktionen und $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ Zahlen, die der Werte 1, 0, -1 fähig sind, so stellt

$$(10,1) \quad \begin{aligned} y_0 &= 1 + \varepsilon s t + \bar{\varepsilon} G'(s) F'(t) + \varepsilon \bar{\varepsilon} [t F'(t) - 2 F(t)] [s G'(s) - 2 G(s)] \\ y_1 &= t + s - \bar{\varepsilon} G'(s) [t F'(t) - 2 F(t)] + \bar{\varepsilon} F'(t) [s G'(s) - 2 G(s)] \\ y_2 &= F'(t) + \varepsilon s [t F'(t) - 2 F(t)] + G'(s) - \varepsilon t [s G'(s) - 2 G(s)] \\ y_3 &= [t F'(t) - 2 F(t)] - s F'(t) + t G'(s) - [s G'(s) - 2 G(s)] \end{aligned}$$

eine Komplexfläche dar, und jede Komplexfläche wird hierdurch gegeben. Zu der Fläche gehört eine nichteuklidische Geometrie, deren Absolutgebilde von der Wahl der $s, \bar{\varepsilon}$ abhängt. Hierüber gibt die Tabelle (6,8) Aufschluß, wenn man $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ durch ihre negativen Werte ersetzt.

¹⁵⁾ Man kann diese Darstellungen noch vereinfachen, wenn man die Basis des bewegten Systems so wählt, daß den Basisvektoren soweit als möglich geradlinige Bahnkurven zugeordnet sind. Eine gemeinsame Behandlung der verschiedenen Fälle ist dann nicht mehr möglich, weshalb wir auf die Angabe dieser Formeln verzichten. Man gewinnt sie leicht aus (9,7).

(Eingegangen am 9. Oktober 1952.)

Über den Endomorphismenring eines Vektorraumes und den Satz von der Normalbasis.

Von

FRIEDRICH KASCH in Göttingen.

I. Problemstellung und Ergebnisse.

Ist K ein kommutativer, galoisscher Erweiterungskörper endlichen Ranges über dem Grundkörper H , so besagt der Satz von der Normalbasis, daß es in K ein Element gibt, welches zusammen mit seinen Konjugierten bei den Automorphismen von K/H eine Basis von K/H bildet. Bezeichnet man die Automorphismen von K/H mit g_1, g_2, \dots, g_n und versteht man unter $(k g_i)$ das Bildelement von k bei dem Automorphismus g_i , so existiert also eine Basis von K/H der Gestalt

$$(k g_1), (k g_2), \dots, (k g_n).$$

Für diesen Satz gibt es in der Literatur zahlreiche Beweise ([1—3, 5—11, 14, 15, 17, 18])⁰⁾. Hier soll nur auf die zwei Arbeiten hingewiesen werden, die M. DEURING über diesen Gegenstand publiziert hat ([7, 8]). Der in der zweiten Arbeit enthaltene Beweis wurde von T. NAKAYAMA weiter ausgebaut und auch auf den Fall ausgedehnt, daß K/H eine galoissche Schiefkörpererweiterung mit nur äußeren Automorphismen¹⁾ ist ([14, 15]).

Den Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen bildet die nachstehende, von E. NOETHER stammende zweite Fassung des Satzes von der Normalbasis ([16]).

Betrachtet man K als Modul, so kann man die Automorphismen g_1, g_2, \dots, g_n der Galoisgruppe \mathfrak{G} von K/H auch als Endomorphismen dieses Moduls auffassen. Multipliziert man K von rechts bzw. links mit einem Element $k \in K$, so wird dadurch ebenfalls ein Endomorphismus des Moduls K erzeugt, den wir mit k^r bzw. k^l bezeichnen wollen²⁾. Ferner sei H^r der durch die Endomorphismen h^r mit $h \in H$ und $\mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}]$ der durch H^r und die Automorphismen aus \mathfrak{G} erzeugte Endomorphismenring von K . Die zweite Fassung

⁰⁾ Zusatz bei der Korrektur. Siehe auch [15a—15d]. In diesen Arbeiten, die mir bei der Abfassung vorliegender Arbeit nicht bekannt waren, finden sich bereits einige Schlüsse, die auch hier verwendet werden; die Ergebnisse sind jedoch nicht ineinander enthalten. Insbesondere werden dort keine inneren Automorphismen berücksichtigt, deren Zulassung hier einer der Hauptgesichtspunkte ist.

¹⁾ Vom identischen Automorphismus wird hier wie auch im folgenden bei dieser Ausdrucksweise abgesehen.

²⁾ Die Seitenangabe bei den durch Multiplikatoren erzeugten Endomorphismen erfolgt im Hinblick auf nichtkommutative Ringe, wo dies wesentlich ist.

des Satzes von der Normalbasis besagt dann, daß \mathfrak{R} und K als \mathfrak{R} -Rechtsmoduln operatorisomorph sind³⁾, wofür wir $\mathfrak{R} \xrightarrow{\mathfrak{R}} K$ schreiben wollen.

Diese Fassung gibt nun zu folgender Überlegung Anlaß. Zunächst stellt man unmittelbar fest, daß die Endomorphismen aus $\mathfrak{R} = [H', \mathfrak{G}]$ lineare Abbildungen von K/H sind, wenn man K als Vektorraum mit H als Links-skalarenkörper betrachtet:

$$K = Hv_1 + Hv_2 + \cdots + Hv_n,$$

wobei v_1, v_2, \dots, v_n eine Basis von K/H bilden. Bezeichnet man den Ring aller linearen Abbildungen von K/H bei dieser Auffassung mit \mathfrak{E} , so ist also $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{E}$. Grundlegend für das folgende ist die Feststellung, daß nicht nur $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{E}$, sondern daß darüber hinaus \mathfrak{E} eine Rechtsbasis⁴⁾ der Länge n über \mathfrak{R} besitzt:

$$\mathfrak{E} = e_1 \mathfrak{R} + e_2 \mathfrak{R} + \cdots + e_n \mathfrak{R},$$

d. h. \mathfrak{E} ist Rechtsvektorraum der Dimension n über \mathfrak{R} . Dies entnimmt man, auch in dem Fall, daß K/H eine galoissche Schiefkörpererweiterung mit nur äußeren Automorphismen ist, fast unmittelbar den Ergebnissen der Galoischen Theorie ([4, 12]).

Einen beliebigen Unterring \mathfrak{S} von \mathfrak{E} , über dem \mathfrak{E} eine Rechtsbasis besitzt, d. h. über dem \mathfrak{E} Vektorraum ist, wollen wir als *Rechtsskalarenring* von \mathfrak{E} bezeichnen.

Auf Grund des geschilderten Zusammenhangs bei galoisschen Erweiterungen erhebt sich nun allgemein die folgende Frage: Sei \mathfrak{E} der Endomorphismenring eines Vektorraums

$$V = Hv_1 + Hv_2 + \cdots + Hv_n$$

über einem Linksskalarenring H und sei \mathfrak{S} ein Rechtsskalarenring von \mathfrak{E} ; besteht dann zwischen \mathfrak{S} und V ebenfalls eine Operatorisomorphie — oder allgemeiner eine Operatorhomomorphiebeziehung? Diese Frage kann unter recht allgemeinen Voraussetzungen — insbesondere unabhängig vom Galoischen — im positiven Sinne beantwortet werden: *Eine Operatorhomomorphiebeziehung zwischen \mathfrak{S} und V als \mathfrak{S} -Rechtsmoduln besteht bereits dann, wenn H ein 1-Element besitzt und \mathfrak{S} ein Ring mit Minimal- und Maximalbedingung ist*

³⁾ Bei E. NOETHER wird allerdings \mathfrak{R} als der formal gebildete Gruppenring von \mathfrak{G} in H eingeführt, wobei aber bereits die Anwendung der Elemente von \mathfrak{R} auf K in dem hier angegebenen Sinne zu verstehen ist. Dieser Unterschied ist im Fall eines kommutativen galoisschen Erweiterungskörpers oder allgemeiner einer galoisschen Schiefkörpererweiterung mit nur äußeren Automorphismen unwesentlich, denn dann ist der Gruppenring von \mathfrak{G} in H und $\mathfrak{R} = [H', \mathfrak{G}]$ ringisomorph. Das folgt aus der bekannten Tatsache, daß dann die Automorphismen aus \mathfrak{G} als Endomorphismen von K linear unabhängig über H' sind ([4, 12]). Wenn K/H eine beliebige galoissche Schiefkörpererweiterung ist, wird im allgemeinen der formal gebildete Gruppenring von \mathfrak{G} in H einen unendlichen Rang über H besitzen. Er ist dann nicht mehr isomorph sondern nur noch homomorph zum Endomorphismenring $\mathfrak{R} = [H', \mathfrak{G}]$, der stets einen endlichen Rang über H' hat.

⁴⁾ Seitenangaben bei Basen, Rängen, Vektorräumen, Skalarerenngen usw. geben stets die Seite an, auf der die Koeffizienten stehen. $(\mathfrak{E} : \mathfrak{R})_r$ bzw. $(\mathfrak{E} : \mathfrak{R})_l$ bedeute den Rechts- bzw. Linksrang von $\mathfrak{E} \mathfrak{R}$. Fehlt die Seitenangabe, so stimmen die Ränge überein.

(Satz 4). Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf eine Verallgemeinerung eines Satzes von E. NOETHER, den bereits M. DEURING bei seinem ersten Beweis für den Satz von der Normalbasis benutzt hat ([7], Zusatz bei der Korrektur).

Auf Grund der zuvor gemachten Bemerkung folgt aus diesem Ergebnis sofort ein neuer, ganz einfacher Beweis für den Satz von der Normalbasis im Falle, daß K/H eine galoissche Schiefkörpererweiterung mit nur äußeren Automorphismen ist.

Der Endomorphismenring $\mathfrak{R} = [H^*, \mathfrak{G}]$ kann offenbar auch bei beliebigen galoisschen Erweiterungen K/H eingeführt werden und soll im folgenden als *Automorphismenring* bezeichnet werden. Es erhebt sich nun die folgende Frage: Unter welchen Voraussetzungen gilt die im Falle von nun äußeren Automorphismen zum Satz von der Normalbasis äquivalente Tatsache $\mathfrak{R} \xleftarrow{\mathfrak{R}} K$ auch bei galoisschen Schiefkörpererweiterungen mit inneren Automorphismen und bei galoisschen Erweiterungen einfacher Ringe?

Daß $\mathfrak{R} \xleftarrow{\mathfrak{R}} K$ nicht bei beliebigen galoisschen Erweiterungen richtig ist, kann man sich bereits am Beispiel des Quaternionenschiefkörpers Q , aufgefaßt als galoissche Erweiterung über seinem Zentrum Z , klar machen. Wie man durch eine Rechnung feststellen kann, ist in diesem Falle $(\mathfrak{R} : Z^*) = 10$, und folglich können aus Ranggründen \mathfrak{R} und Q als \mathfrak{R} -Rechtsmoduln nicht operatorisomorph sein⁴⁾.

Dennoch gibt es galoissche Erweiterungen, die vom identischen verschiedenen innere Automorphismen besitzen und wo $\mathfrak{R} \xleftarrow{\mathfrak{R}} K$ gilt.

Sei K jetzt ein einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung für Rechtsideale, also bis auf Isomorphie der volle Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Schiefkörper. H bezeichne einen in einem noch zu präzisierenden Sinne galoisschen Unterring endlichen Ranges unter K und \mathfrak{G} die Galoisgruppe von K/H . Schließlich sei Z das Zentrum von K und T der Zentralisator von H in K , also die Gesamtheit der Elemente von K , die mit allen Elementen von H einzeln vertauschbar sind.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir die folgende Antwort auf die zuvor gestellte Frage: *Besitzt K/H nur äußere Automorphismen, d. h., ist $Z = T$ oder gilt $T \subseteq H$, so ist \mathfrak{R} Rechtsaskalarenring des Endomorphismenrings \mathfrak{G} von K/H und es besteht die Rangbeziehung $(K : H)_r = (\mathfrak{R} : H^*)_r$. Auf Grund des zuvor erwähnten allgemeinen Satzes folgt daraus sofort $\mathfrak{R} \xleftarrow{\mathfrak{R}} K$. Ist K Schiefkörper, so gilt hiervon auch die Umkehrung.*

Dieser Satz kann als Verallgemeinerung des Satzes von der Normalbasis betrachtet werden, und daraus folgt auch wieder die übliche Fassung, die jetzt folgendermaßen lautet: *Ist $Z = T$ oder $T \subseteq H$, so gibt es $n = (K : H)$ Automorphismen g_1, g_2, \dots, g_n von K/H und dazu ein Element $k \in K$, so daß die Elemente $(k g_1), (k g_2), \dots, (k g_n)$ eine Rechtsbasis von K/H bilden.*

⁴⁾ Darauf machte mich F. K. SCHMIDT aufmerksam.

In diesem Sinne besitzt z. B. ein zentraler Schiefkörper⁶⁾ eine Normalbasis über jedem seiner maximalen kommutativen Unterkörper, denn dann ist $T = H$.

Ferner erhält man aus dem angegebenen Isomorphiesatz auch die folgende Verallgemeinerung des Satzes vom primitiven Element auf Schiefkörper: *Jede galoissche Schiefkörpererweiterung K/H besitzt zwei erzeugende Elemente über H . Ist $Z = T$ oder $T \subseteq H$, so existiert bereits ein erzeugendes Element von K/H .*

Danach besitzt also z. B. ein zentraler Schiefkörper über jedem seiner maximalen kommutativen Unterkörper ein erzeugendes Element. —

Bei verschiedenen in der Literatur enthaltenen Beweisen für den Satz von der Normalbasis im kommutativen Fall wird die Voraussetzung gemacht, daß der zum Automorphismenring $\mathfrak{R} = [H', \mathfrak{G}]$ isomorphe Gruppenring von \mathfrak{G} in H vollständig reduzibel sei. Daher ist die Frage von Interesse, welche Bedeutung der vollständigen Reduzibilität in diesem Zusammenhang zukommt. Diese Frage kann ebenfalls unabhängig vom Galoisschen für einen beliebigen vollständig reduziblen Unterring \mathfrak{S} des Endomorphismenrings \mathfrak{E} eines Vektorraums V/H behandelt werden. Es zeigt sich, daß die vollständige Reduzibilität von \mathfrak{S} bereits eine Homomorphiebeziehung zwischen \mathfrak{S} und V als \mathfrak{S} -Rechtsmoduln nach sich zieht, ohne daß \mathfrak{S} Rechtsskalarenring von \mathfrak{E} ist. Statt dessen wird nur verlangt, daß $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}$ ein endliches Rechtserzeugendensystem einer Länge $\leq (V:H)_1$ besitzt (Satz 5). Daraus folgt insbesondere: *Besitzt eine galoissche Erweiterung K/H , die den zuvor angegebenen Voraussetzungen genügt, einen vollständig reduziblen Automorphismenring \mathfrak{R} , so kann \mathfrak{R} als \mathfrak{R} -Rechtsmodul operatorhomomorph auf K als \mathfrak{R} -Rechtsmodul abgebildet werden: $\mathfrak{R}^{\mathfrak{R}} \rightarrow K$.*

Läßt man schließlich noch die Voraussetzung fallen, daß \mathfrak{S} vollständig reduzibel sei, so kann auch dann noch eine Homomorphieaussage gemacht werden: *Betrachtet man \mathfrak{S} und V als \mathfrak{S} -Rechtsmoduln, so kommen die Kompositions faktoren einer Kompositionsreihe von V (bis auf Isomorphie) unter den Kompositions faktoren einer Kompositionsreihe von \mathfrak{S} vor.* Die Voraussetzungen dieses Satzes sind z. B. erfüllt, wenn $V = K$ eine beliebige galoissche Erweiterung über H und $\mathfrak{S} = \mathfrak{R} = [H', \mathfrak{G}]$ der Automorphismenring von K/H ist.

Wie schon erwähnt, besitzt beim Quaternionenschiefkörper der Automorphismenring \mathfrak{R} den Rang 10 über Z' , während $(\mathfrak{E}:Z') = 16$ ist. Daraus folgt, daß \mathfrak{R} weder vollständig reduzibel noch Rechtsskalarenring von \mathfrak{E} sein kann. Es kann also weder auf Grund von Satz 4 noch auf Grund von Satz 5 eine Operatorhomomorphie zwischen \mathfrak{R} und Q behauptet werden. Trotzdem ist eine operatorhomomorphe Abbildung von \mathfrak{R} auf Q möglich, da es einen Unterring von \mathfrak{R} gibt, der Rechtsskalarenring von \mathfrak{E} ist. Auch bei gewissen anderen galoisschen Erweiterungen ist eine solche operatorhomomorphe Abbildung möglich (Satz 12). An diesen Sachverhalt kann man die Frage knüpfen, ob bei einer beliebigen galoisschen Erweiterung K/H der Automorphismenring \mathfrak{R} operatorhomomorph auf K mit \mathfrak{R} als Operatorbereich abgebildet werden kann. Damit im Zusammenhang steht die Frage nach der

⁶⁾ Darunter verstehen wir einen Schiefkörper endlichen Ranges über seinem Zentrum.

Struktur von \mathfrak{R} und K als \mathfrak{R} -Rechtsmodul. Diese Fragen dürften für die Kenntnis der galoisschen Erweiterungen von Interesse sein, doch können sie bisher nicht beantwortet werden.

II. Verallgemeinerungen eines Satzes von E. NOETHER.

Zur Abkürzung bezeichnen wir im folgenden die Minimal- und Maximalbedingung als MM-Bedingung und einen Modul mit Operatorenbereich, der der MM-Bedingung genügt, als MM-Modul. Sind V und \mathfrak{S} zwei Moduln mit dem gemeinsamen Operatorenbereich \mathfrak{A} , so verstehen wir wie bisher unter $V \xrightarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{S}$ bzw. $V \xleftarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{S}$ eine operatorhomomorphe Abbildung von V auf \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{S} auf V ; $V \xleftrightarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{S}$ bedeute entsprechend Operatorisomorphie. Operatoren denken wir uns stets von rechts auf die Elemente des Moduls ausgeübt.

Wir beginnen mit der folgenden Verallgemeinerung des erwähnten Satzes von E. NOETHER ([7], Zusatz bei der Korrektur).

Satz 1: Seien V und \mathfrak{S} zwei MM-Moduln mit dem gemeinsamen Operatorenbereich \mathfrak{A} und

$$\mathfrak{N} = V_1 + \dots + V_n, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{S}_1 + \dots + \mathfrak{S}_m$$

direkte Summen von Moduln, die ebenfalls \mathfrak{A} als Operatorenbereich besitzen mögen und für die gilt

$$V_i \xleftrightarrow{\mathfrak{A}} V \quad (i = 1, \dots, n), \quad \mathfrak{S}_j \xleftrightarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{S} \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

ist ferner

$$\mathfrak{N} \xleftrightarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{M},$$

so folgt

$$V \xleftrightarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{S} \quad \text{für } n \leq m.$$

Der Beweis erfolgt nach dem Vorbild in [7]. Zwei Moduln, die bis auf einen Operatorisomorphismus übereinstimmen, bezeichnen wir im folgenden Beweis als gleich. Da V und \mathfrak{S} und damit auch \mathfrak{N} und \mathfrak{M} der MM-Bedingung genügen, können diese Moduln nach dem Satz von REMAK-KRULL-SCHMIDT in eine direkte Summe von direkt unzerlegbaren Summanden zerlegt werden und diese Zerlegungen sind (im Sinne unserer Gleichheit) eindeutig bestimmt. \mathfrak{N} enthält jeden direkten Summanden von V genau n mal so oft wie V und \mathfrak{M} enthält jeden direkten Summanden von \mathfrak{S} genau m mal so oft wie \mathfrak{S} . Da wegen der Operatorisomorphie von \mathfrak{N} und \mathfrak{M} diese Moduln jeden direkten Summanden je gleich oft enthalten, gilt dies, falls $n = m$ ist, auch für V und \mathfrak{S} , d. h. V und \mathfrak{S} sind operatorisomorph. Ist $n > m$, so enthält \mathfrak{S} jeden direkten Summanden von V mindestens so oft wie V , d. h. \mathfrak{S} kann operatorhomomorph auf V abgebildet werden. Entsprechend gilt für $n < m$, daß V operatorhomomorph auf \mathfrak{S} abgebildet werden kann.

Satz 1 wird im folgenden in dem Fall angewendet, daß $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ ein Endomorphismenring ist. Dann ist die Voraussetzung $\mathfrak{N} \xleftrightarrow{\mathfrak{A}} \mathfrak{M}$ von vorn herein erfüllt.

Außer Satz 1 benutzen wir noch eine zweite Verallgemeinerung des Satzes von NOETHER.

Satz 2: Bei sonst gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1, sei

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{N},$$

$m \leq n$ und \mathfrak{S} vollständig reduzibel. Dann gilt

$$\mathfrak{S} \xrightarrow{\alpha} V.$$

Der Beweis ergibt sich nach dem Vorbild des Beweises von Satz 1, wenn man noch berücksichtigt, daß mit \mathfrak{S} auch \mathfrak{M} vollständig reduzibel ist und daß eine homomorphe Abbildung eines irreduziblen Moduls entweder die Abbildung des ganzen Moduls auf Null oder ein Isomorphismus ist.

III. Operatorhomomorphe Untermoduln eines Endomorphismenrings.

1. Es sei V ein Vektorraum der Dimension n über einem beliebigen Ring H mit 1-Element als Linksskalarenring:

$$V = H v_1 + H v_2 + \cdots + H v_n,$$

also eine additive Gruppe mit H als Linksmultiplikatorenbereich, die über H eine Linksbasis besitzt. Bezeichnet e das 1-Element von H , so schreiben wir statt $e v_i$ auch kurz v_i . Ist e ein Endomorphismus von V und $v \in V$, so bezeichne $(v e)$ das Bild von v bei diesem Endomorphismus. \mathfrak{E} sei der volle Endomorphismenring von V/H , also die Gesamtheit der Endomorphismen e von V , für die

$$h(v e) = ((h v) e) \text{ mit } h \in H, v \in V$$

gilt.

Ist H ein Schiefkörper, so ist \mathfrak{E} ein einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung. Dann ist bekanntlich \mathfrak{E} direkte Summe von n Rechtsidealen, von denen jedes zu V operatorisomorph mit \mathfrak{E} als Operatorenbereich ist. Dies gilt ebenso unter der hier gemachten schwächeren Voraussetzung, daß H ein Ring mit 1-Element ist. Wir formulieren diese Tatsache sogleich in der für das folgende zweckmäßigen Form als

Satz 3: Ist V ein Vektorraum der Dimension n über dem Linksskalarenring H und besitzt H ein 1-Element, dann ist der Endomorphismenring \mathfrak{E} von V/H direkte Summe von n Moduln

$$\mathfrak{E} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n,$$

von denen jeder zu V operatorisomorph mit \mathfrak{E} als Operatorenbereich ist: $V_i \xrightarrow{\epsilon} V$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Der Beweis ergibt sich in bekannter Weise sofort aus der Matrizendarstellung von \mathfrak{E} in H mittels der Basis v_1, v_2, \dots, v_n . Unter V_i ist dann das aus den Matriceinheiten der i -ten Zeile erzeugte Rechtsideal von \mathfrak{E} zu verstehen, und den angegebenen Isomorphismus zwischen V_i und V erhält man, indem man der Matriceinheit in der i -ten Zeile und j -ten Spalte das Basiselement v_j zuordnet.

Sei nun \mathcal{S} ein Rechtsskalarenring von \mathcal{E} , d. h. es gelte eine Basisdarstellung der Form:

$$\mathcal{E} = e_1 \mathcal{S} + \cdots + e_m \mathcal{S}.$$

Faßt man \mathcal{E} als \mathcal{S} -Rechtsmodul auf, so ist diese Summe direkt. Auf Grund der Zuordnung

$$e_i s \longleftrightarrow s, \quad s \in \mathcal{S}$$

ist jeder der Moduln $e_i \mathcal{S}$ zu \mathcal{S} operatorisomorph mit \mathcal{S} als Rechtsoperatorenbereich: $e_i \mathcal{S} \xrightarrow{\Theta} \mathcal{S}$. Erfüllt \mathcal{S} die MM-Bedingung, so auch \mathcal{E} als \mathcal{S} -Rechtsmodul.

Andrerseits ist \mathcal{E} nach Satz 3 eine direkte Summe zu V operatorisomorpher Moduln V_i mit \mathcal{E} und wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ auch mit \mathcal{S} als Operatorenbereich. Erfüllt \mathcal{E} als \mathcal{S} -Rechtsmodul die MM-Bedingung, so auch jeder direkte Summand V_i . Dann folgt aus Satz 1 für $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{E}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ unmittelbar

Satz 4: Ist V ein Vektorraum über einem Linksskalarenring H mit 1-Element und ist \mathcal{S} ein der MM-Bedingung genügender Rechtsskalarenring des Endomorphismenrings \mathcal{E} von V/H , dann gilt

$$V \xrightleftharpoons[\Theta]{\Theta} \mathcal{S} \quad \text{für } (V:H)_l \cong (\mathcal{E}:\mathcal{S})_r.$$

2. Aus diesem Satz folgt bereits der Satz von der Normalbasis in dem Fall, daß K/H eine galoissche Schiefkörpererweiterung mit nur äußeren Automorphismen ist. Da K/H eine Linksbasis besitzt, kann K als Vektorraum über dem Linksskalarenring H aufgefaßt werden. Ferner besitzt H ein 1-Element und der Automorphismenring $\mathcal{R} = [H^*, \mathcal{S}]$ genügt der MM-Bedingung. Schließlich ist \mathcal{R} Rechtsskalarenring des Endomorphismenrings \mathcal{E} von K/H und es gilt $(K:H) = (\mathcal{E}:\mathcal{R})_r$. Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß die Automorphismen aus \mathcal{S} eine Linksbasis von \mathcal{E} über dem durch die Elemente aus K als Rechtsmultiplikatoren von K erzeugten Endomorphismenring K^* bilden [4, 12]:

$$\mathcal{E} = K^* g_1 + K^* g_2 + \cdots + K^* g_n.$$

Da jeder der Automorphismen g_i mit jedem h^* ($h \in H$) vertauschbar ist, folgt daraus die Basisdarstellung

$$\mathcal{R} = H^* g_1 + H^* g_2 + \cdots + H^* g_n.$$

Ist dann w_1, w_2, \dots, w_n eine Rechtsbasis von K/H , so ist $w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*$ eine Rechtsbasis von \mathcal{E}/\mathcal{R} :

$$\mathcal{E} = \sum_{i,j=1}^n (w_i^* H^*) g_j = w_1^* \mathcal{R} + w_2^* \mathcal{R} + \cdots + w_n^* \mathcal{R}.$$

Dann sind nach Satz 4 \mathcal{R} und K als \mathcal{R} -Rechtsmoduln operatorisomorph.

3. Sei nun wieder V ein Vektorraum über einem beliebigen Linksskalarenring H mit 1-Element und \mathcal{E} der Endomorphismenring von V/H . \mathcal{S} bezeichne jetzt einen vollständig reduziblen Unterring von \mathcal{E} , und es besitze \mathcal{E} ein endliches Rechtserzeugendensystem f_1, f_2, \dots, f_m mit $m \leq (V:H)_l$ über \mathcal{S} , d. h.

es sei

$$\mathcal{E} = f_1 \mathcal{S} + f_2 \mathcal{S} + \cdots + f_m \mathcal{S}, \quad m \leq (V:H)_1,$$

wobei diese Darstellung nicht notwendig eindeutig zu sein braucht. Unter diesen Voraussetzungen gilt

Satz 5: *Betrachtet man \mathcal{S} und V als \mathcal{S} -Rechtsmoduln, so kann \mathcal{S} operatorhomomorph auf V abgebildet werden und V ist demzufolge als \mathcal{S} -Rechtsmodul vollständig reduzibel.*

Zum Beweis betrachten wir den \mathcal{S} -Rechtsmodul

$$\mathcal{M} = f_1^* \mathcal{S} + f_2^* \mathcal{S} + \cdots + f_m^* \mathcal{S}$$

mit Unbestimmten f_1^*, \dots, f_m^* , so daß diese Summe per Definition direkt ist. Außerdem gilt $f_i^* \mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{S}$ ($i = 1, \dots, m$). \mathcal{M} kann als \mathcal{S} -Rechtsmodul operatorhomomorph auf \mathcal{E} als \mathcal{S} -Rechtsmodul abgebildet werden, indem man jedem Element $f_i^* \in \mathcal{M}$ den Endomorphismus $f_i \in \mathcal{E}$ zuordnet. Dann sind aber für \mathcal{M} und \mathcal{E} alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, und zusammen mit Satz 3 folgt die Behauptung.

4. Sei jetzt \mathcal{S} ein Ring mit den eben angegebenen Eigenschaften, aber \mathcal{S} sei nicht notwendig vollständig reduzibel. Dann kann zwar keine Homomorphieaussage zwischen \mathcal{S} und V selbst gemacht werden, jedoch besteht eine Beziehung zwischen den Kompositions faktoren von V und \mathcal{S} als \mathcal{S} -Rechtsmoduln.

Satz 6: *Sei \mathcal{S} ein der MM-Bedingung genügender Unterring von \mathcal{E} , und es besitze \mathcal{E} ein Rechtserzeugendensystem einer Länge $m \leq (V:H)_1$ über \mathcal{S} . Betrachtet man \mathcal{S} und V als \mathcal{S} -Rechtsmoduln, so kommen die Kompositions faktoren einer Kompositionsreihe von V (bis auf Isomorphie) unter den Kompositions faktoren einer Kompositionsreihe von \mathcal{S} vor.*

Zum Beweis benutzen wir wieder den zuvor angegebenen Modul \mathcal{M} und betrachten \mathcal{M} und \mathcal{E} als \mathcal{S} -Rechtsmoduln. Operatorisomorphe Moduln bezeichnen wir im folgenden als gleich. Sei $\mathcal{E}' - \mathcal{E}''$ ein Kompositions faktor von \mathcal{E} . \mathcal{M}' bezeichne einen minimalen Untermodul von \mathcal{M} , der bei dem Homomorphismus $\mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{E}$ auf ganz \mathcal{E}' abgebildet wird, und \mathcal{M}'' die Urbildmenge von \mathcal{E}'' innerhalb \mathcal{M}' bei diesem Homomorphismus. Dann ist offenbar $\mathcal{M}' - \mathcal{M}''$ ein Kompositions faktor von \mathcal{M} und es gilt $\mathcal{M}' - \mathcal{M}'' \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{E}' - \mathcal{E}''$. Jeder Kompositions faktor von \mathcal{E} ist also operatorisomorphes Bild eines solchen von \mathcal{M} . Nach dem JORDAN-HÖLDERschen Satz kommt jeder Kompositions faktor von \mathcal{S} m mal so oft in einer Kompositionsreihe von \mathcal{M} wie in einer von \mathcal{S} vor. Entsprechend gilt dies für V und \mathcal{E} . Wegen $m \leq (V:H)_1$ folgt dann die Behauptung.

IV. Über den Endomorphismenring einer galoisschen Erweiterung.

1. Ist K ein beliebiger Ring und \mathcal{G} eine Automorphismengruppe von K , so bilden die Elemente aus K , die bei allen Automorphismen aus \mathcal{G} fest bleiben, einen Unterring von K , den wir den Fixring von \mathcal{G} nennen. Die in \mathcal{G} ent-

haltene Gruppe von inneren Automorphismen sei \mathfrak{T} . Ist $k \in K$ ein invertierbares Element, so sei t_k der durch k erzeugte innere Automorphismus von K .

Betrachtet man die Endomorphismen g von K als Endomorphismen des als Modul aufgefaßten Rings K , so besteht die folgende *Vertauschungsregel* mit den durch die Elemente von K als Rechtsmultiplikatoren von K erzeugten Endomorphismen:

$$k^r g = g(k g)^r, \quad k \in K.$$

Daraus folgt, daß Automorphismen, die über K^r rechts linear unabhängig sind, auch über K^r links linear unabhängig sind⁷⁾.

Im folgenden sei nun K ein einfacher Ring mit den anfangs angegebenen Eigenschaften. Wir bezeichnen einen der MM-Bedingung genügenden Unterring H von K als *galoisschen Unterring* von K , wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- (1) H ist Fixring der Gruppe \mathfrak{G} aller Automorphismen von K/H ;
- (2) der Zentralisator T von H in K ist regulär erzeugbar⁸⁾;
- (3) es besteht die Rangrelation $(K:H) = \text{Ord}(\mathfrak{G}/\mathfrak{T})(T:Z)^9)$;

2. Das Ziel der folgenden Überlegungen besteht zunächst in dem Nachweis, daß der Automorphismenring $\mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}]$ im Falle $Z = T$ oder $T \subseteq H$ Rechts-skalarenring des Endomorphismenrings \mathfrak{E} von K/H ist. Dieser Nachweis erfolgt nach dem angegebenen Vorbild, doch bedarf es einiger zusätzlicher Überlegungen.

Hilfssatz 1¹⁰⁾: Die Automorphismen g_1, g_2, \dots, g_r sind dann und nur dann linear abhängig über K^r , wenn es darunter Automorphismen g_1, g_2, \dots, g_s gibt und dazu Elemente $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s \in T$ mit

$$\sum_{i=1}^s \tau_i = 0, \quad g_i = g t_{\tau_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Innere Automorphismen sind also dann und nur dann linear abhängig über K^r , wenn die sie erzeugenden Elemente linear abhängig über dem Zentrum von K sind.

Daß die Voraussetzung hinreichend ist, folgt aus der Beziehung

$$\sum_{i=1}^s (k g_i) \tau_i = \sum_{i=1}^s \tau_i (k g) = \left(\sum_{i=1}^s \tau_i \right) (k g) = 0,$$

⁷⁾ Die Elemente f_1, \dots, f_n eines Moduls \mathfrak{F} mit \mathfrak{E} als Rechtsoperatorenbereich heißen rechts linear unabhängig über \mathfrak{E} , wenn aus dem Bestehen einer Gleichung

$$f_1 s_1 + \dots + f_n s_n = 0, \quad s_i \in \mathfrak{E}$$

folgt $s_1 = \dots = s_n = 0$; sonst heißen sie rechts linear abhängig.

⁸⁾ Regulär erzeugbar bedeutet, daß sich jedes Element als Summe von regulären Elementen darstellen lasse.

⁹⁾ Zusatz bei der Korrektur. Diese Voraussetzungen sind z. B. erfüllt, wenn H Fixring einer halbregulären Automorphismengruppe (im Sinne von T. NAKAYAMA) von K ist. Siehe dazu F. KASCH, Halblinare Abbildungen und die Rangrelation bei galoisschen Erweiterungen, Archiv der Math. (im Druck). In diesem Falle ist $[K^r, \mathfrak{G}]$ halbeinfach und dann erhält man die im folgenden zu beweisende Beziehung $\mathfrak{E} = [K^r, \mathfrak{G}]$ unmittelbar aus einem Satz von J. DIEUDONNÉ ([9], Théorème 1).

¹⁰⁾ Vgl. [4], Lemme 1; [12] Lemma 1; [9] Lemme 2.

die für jedes $k \in K$ gilt. Demnach ist $\sum_{i=1}^{\sigma} g_i \tau_i^r = 0$. Um zu zeigen, daß die Bedingung notwendig ist, betrachten wir unter allen Gleichungen

$$a = \sum_{i=1}^{\sigma} g_i k_i^r = 0, \quad k_i \in K$$

eine solche, bei der möglichst wenig Koeffizienten, aber mindestens einer ungleich Null sind. Wir nennen eine solche Gleichung eine Gleichung minimaler Länge. Sei vorstehende Gleichung eine solche und die Bezeichnung so, daß $k_1 \neq 0$ ist. Dann folgt aus der Voraussetzung, daß K einfach ist, zusammen mit der Vertauschungsregel, daß es auch eine Gleichung minimaler Länge mit $k_1 = 1$ gibt. Dies sei in vorstehender Gleichung bereits der Fall. Dann kann keines der Elemente $k_i \neq 0$ Nullteiler sein, denn wäre etwa $k_r c = 0$ mit $k_r, c \neq 0$, so wäre in $a c^r = \sum_{i=1}^{\sigma} g_i (k_i c)^r = 0$ der erste Koeffizient $c^r \neq 0$ und diese Gleichung hätte wegen $(k_r c)^r = 0$ eine kleinere Länge als a . Bildet man mit beliebigem $x \in K$

$$x^r a - a (x g_1)^r = a',$$

so ist auch $a' = 0$ und wegen der Vertauschungsregel gilt

$$a' = \sum_{i=1}^{\sigma} g_i ((x g_i) k_i - k_i (x g_1))^r.$$

Wegen $k_1 = 1$ ist darin der erste Koeffizient gleich Null und folglich müssen alle Koeffizienten verschwinden, da a' sonst eine kleinere Länge als a besitzen würde. Also gilt

$$(x g_i) k_i = k_i (x g_1), \quad i = 1, 2, \dots, \sigma,$$

und daraus folgt, da die von Null verschiedenen k_i invertierbar sind

$$g_i = g_1 t_{k_i} \quad \text{für } k_i \neq 0.$$

Bezeichnet man die von Null verschiedenen k_i mit $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_e$, so folgt aus $a = 0$ durch Einsetzen von $g_i = g_1 t_{\tau_i}$

$$a = g_1 \left(\sum_{i=1}^{\sigma} \tau_i \right)^r = 0,$$

wobei $\left(\sum_{i=1}^{\sigma} \tau_i \right)^r$ den durch das in der Klammer stehende Element erzeugten Linksmultiplikator von K bezeichnet. Folglich gilt wie behauptet,

$$\sum_{i=1}^e \tau_i = 0.$$

Da die τ_i in \mathfrak{G} enthaltene innere Automorphismen erzeugen, liegen sie in T . Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Darüber hinaus haben wir sogleich gezeigt

Hilfssatz 2: Automorphismen von K , die über K^r linear abhängig sind, sind bereits über T^r linear abhängig.

Es soll jetzt die Beziehung $\mathfrak{E} = [K^r, \mathfrak{G}]$ nachgewiesen werden. Wir bereiten den Beweis durch drei allgemeine Hilfssätze vor.

Hilfssatz 3: Es sei A ein beliebiger Ring mit 1-Element von (nicht notwendig gleichem) endlichem Rechts- und Linksrang über einem Schiefkörper B . Dann ist jedes Element aus A entweder Nullteiler oder Einheit in A .

Legt man in A/B etwa eine Rechtsbasis zu Grunde, so sind die Koeffizienten eines Produktes $a_1 a_2$ mit $a_1, a_2 \in A$ lineare Formen in den Koeffizienten von a_2 . Je nachdem, ob die zu diesen linearen Formen gehörende Matrix regulär oder singular ist, ist a_1 Rechtseinheit oder Rechtsnullteiler. Ist a_1 aber Rechtseinheit, so kann a_1 nicht Linksnullteiler sein und muß folglich, da auch für die linke Seite nur die Alternative Einheit oder Nullteiler besteht, Linkseinheit sein. Das gleiche gilt für die Nullteiler.

Hilfssatz 4: Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{b}_1 A + \dots + \mathfrak{b}_n A$ ein Vektorraum über dem Rechts-skalarerenring A und genügt A den Voraussetzungen von Hilfssatz 3, so bilden je n über A rechts linear unabhängige Elemente g_1, \dots, g_n aus \mathfrak{E} eine Rechtsbasis von \mathfrak{E}/A .

Zum Beweis sei $(\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_n) \Gamma = (g_1 \dots g_n)$, wobei Γ eine n -reihige quadratische Matrix mit Matrixelementen aus A bezeichne. Nach Hilfssatz 3 ist Γ Nullteiler oder Einheit im Ring aller solcher Matrizen. Da g_1, \dots, g_n rechts linear unabhängig über A sind, kann Γ kein Nullteiler sein, ist also Einheit, und folglich bilden g_1, \dots, g_n eine Rechtsbasis von \mathfrak{E}/A .

Hilfssatz 5: Sei K ein Ring mit 1-Element e , H ein Linksskalarerenring von K und $e \in H$. Ferner besitze K/H eine Linksbasis der Gestalt v_1, \dots, v_n . Dann ist K^r Rechtsskalarerenring des Endomorphismenrings \mathfrak{E} von K/H und es gilt $(\mathfrak{E} : K^r)_r = (K : H)_l$.

Zum Beweis definieren wir n Endomorphismen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$ von K/H in folgender Weise:

$$(v_i \mathfrak{b}_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ e & \text{für } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Dann läßt sich jeder Endomorphismus c aus \mathfrak{E} in der Form

$$c = \mathfrak{b}_1 k_1' + \mathfrak{b}_2 k_2' + \dots + \mathfrak{b}_n k_n'$$

darstellen. Ist nämlich $(v_i c) = w_i$, so setze man $k_i' = w_i$. Da aus $c = 0$ wegen $(v_i c) = e k_i = k_i$ auch $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ folgt, ist diese Darstellung eindeutig und damit Hilfssatz 5 bewiesen.

Nach diesem Hilfssatz besitzt der Endomorphismenring \mathfrak{E} einer galoischen Erweiterung K/H eine Rechtsbasis der Länge $n = (K : H)$ über K^r . Andererseits gibt es auf Grund von Hilfssatz 1 und der Voraussetzung (3) auch n Automorphismen $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathfrak{G}$, die über K^r linear unabhängig sind. Wegen $[K^r, \mathfrak{G}] \subseteq \mathfrak{E}$ und Hilfssatz 4 für $A = K^r$ gilt dann aber

$$\mathfrak{E} = [K^r, \mathfrak{G}] = g_1 K^r + g_2 K^r + \dots + g_n K^r.$$

Auf Grund der Vertauschungsregel bilden diese Automorphismen dann auch eine Linksbasis von \mathfrak{E}/K^r :

$$\mathfrak{E} = K^r g_1 + K^r g_2 + \dots + K^r g_n.$$

Ist w_1, w_2, \dots, w_n eine Rechtsbasis von K/H , so folgt daraus

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^n (w_i^r (H^r g_1 + H^r g_2 + \dots + H^r g_n)).$$

Besitzt K/H nur äußere Automorphismen, d. h. ist $Z = T$, so ist wegen $n = \text{Ord}(\mathfrak{G})$ offenbar

$$H^r g_1 + H^r g_2 + \dots + H^r g_n = \mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}].$$

Ist andererseits $T \subseteq H$, so folgt die Richtigkeit dieser Gleichung aus Hilfssatz 2. In beiden Fällen existiert also die Basisdarstellung

$$\mathfrak{E} = w_1^r \mathfrak{R} + w_2^r \mathfrak{R} + \dots + w_n^r \mathfrak{R},$$

d. h. \mathfrak{R} ist Rechtsskalarenring von \mathfrak{E} und es gilt $(K:H) = (\mathfrak{E}:\mathfrak{R})_r$. Da H der MM-Bedingung für Rechtsideale genügt, gilt dies auch für \mathfrak{R} und damit folgt jetzt aus Satz 4

Satz 7: *Besitzt K/H nur äußere Automorphismen oder (und) gilt $T \subseteq H$, so sind der Automorphismenring $\mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}]$ und K als \mathfrak{R} -Rechtsmoduln operatorisomorph: $\mathfrak{R} \xrightarrow{\mathfrak{R}} K$.*

Zusatz: *Besitzt K/H nur innere Automorphismen, so ist dann und nur dann $T \subseteq H$, wenn T kommutativ ist.*

Der Zusatz ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß beim Vorhandensein von nur inneren Automorphismen H der Zentralisator von T ist.

Sei K/H eine beliebige galoissche Erweiterung und \mathfrak{A} der durch $\mathfrak{A} = [M^r, \mathfrak{G}]$ definierte Endomorphismenring, wobei

$$M = \begin{matrix} H & \text{für } Z = T \\ [H, T] & \text{sonst} \end{matrix}$$

sei. Dann stimmt \mathfrak{A} offenbar mit \mathfrak{R} überein, wenn $Z = T$ oder $T \subseteq H$ ist. Wird noch vorausgesetzt, daß das Zentrum von T ein Körper ist, so gilt

Satz 8: *Betrachtet man \mathfrak{A} und K als \mathfrak{A} -Rechtsmoduln, so kann \mathfrak{A} operatorhomomorph auf K abgebildet werden, $\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathfrak{A}} K$, und es ist $(\mathfrak{E}:\mathfrak{A})_r = (K:M)$. Operatorisomorphie tritt also dann und nur dann ein, wenn $M = H$, d. h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ ist.*

Der Beweis soll hier nicht im einzelnen ausgeführt werden. Man schließt ebenso wie beim Beweis von Satz 7 und hat nur noch die Tatsache hinzuzunehmen, daß K über M galoissch ist. Dies folgt unschwer aus [9].

3. Ist K ein Schiefkörper, so kann von Satz 7 auch die Umkehrung bewiesen werden.

Satz 9: *Ist K eine galoissche Schiefkörpererweiterung endlichen Ranges über H , so sind der Endomorphismenring $\mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}]$ und K als \mathfrak{R} -Rechtsmoduln dann und nur dann operatorisomorph, $\mathfrak{R} \xrightarrow{\mathfrak{R}} K$, wenn $Z = T$ oder $T \subseteq H$ gilt.*

Daß die Bedingungen hinreichend sind, ist in Satz 7 enthalten. Ihre Notwendigkeit ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satz.

Satz 10: Sei K eine galoissche Schiefkörpererweiterung endlichen Ranges über H . Dann und nur dann ist

$$(\mathfrak{R} : H^r) = (K : H),$$

wenn $Z = T$ oder $T \subseteq H$ gilt.

Aus diesem Ergebnis zusammen mit dem Zusatz von Satz 7 erhält man unmittelbar die

Folgerung: Besitzt K/H nur innere Automorphismen, so ist dann und nur dann

$$(\mathfrak{R} : H^r) = (K : H),$$

wenn T kommutativ ist.

Daß die Bedingungen hinreichend sind, ist ebenfalls in Satz 7 enthalten. Den Beweis, daß sie notwendig sind, führen wir indirekt. Es enthalte \mathfrak{G} also innere Automorphismen, d. h. $(T : Z) > 1$, es sei $T \subseteq H$, und g_1, \dots, g_n mit $n = (K : H)$ bezeichne eine Automorphismenbasis von \mathfrak{R}/H^r . Dann bilden g_1, \dots, g_n offenbar auch eine Basis von \mathfrak{G}/K^r . Sind t_1, \dots, t_m die sämtlichen in der Basis g_1, \dots, g_n enthaltenen inneren Automorphismen, so bilden nach Hilfssatz 1 die sie erzeugenden Elemente τ_1, \dots, τ_m eine Basis von T über dem Zentrum Z von K und es läßt sich jeder innere Automorphismus von K/H durch t_1, \dots, t_m darstellen. Wir geben nun einen inneren Automorphismus t_r an, bei dem die Koeffizienten in der Darstellung durch t_1, \dots, t_m nicht alle in H^r enthalten sind, und haben damit einen Widerspruch erhalten.

1. Fall: $Z \subseteq H$. Wie man unmittelbar nachrechnet, ist

$$t_{\tau_1 + \tau_2} = t_{\tau_1}(\tau_1(\tau_1 + \tau_2)^{-1})^r + t_{\tau_2}(\tau_2(\tau_1 + \tau_2)^{-1})^r.$$

Ist $\tau_1(\tau_1 + \tau_2)^{-1} \notin H$, so ist man fertig; sei also $\tau_1(\tau_1 + \tau_2)^{-1} = h \in H$. Ferner sei $z \in Z$, aber $z \notin H$. Es ist

$$t_{\tau_1 + z\tau_2} = t_{\tau_1}(\tau_1(\tau_1 + z\tau_2)^{-1})^r + t_{\tau_2}(\tau_2 z(\tau_1 + z\tau_2)^{-1})^r.$$

Angenommen, es wäre auch $\tau_1(\tau_1 + z\tau_2)^{-1} = h' \in H$, so folgte $z^{-1}(h'^{-1} - 1)\tau_1 = \tau_2$ und zusammen mit der entsprechenden Beziehung für h

$$z = (h'^{-1} - 1)(h^{-1} - 1)^{-1}.$$

Dies ist sinnvoll, denn es ist $h \neq 1$. Das würde bedeuten, daß z entgegen der Voraussetzung in H enthalten ist.

2. Fall: $Z \subseteq H$; $\tau_1, \dots, \tau_m \notin H$. Ist $1 = \tau_1 z_1 + \dots + \tau_m z_m$, so ist

$$t_1 = t_{\tau_1}(\tau_1 z_1)^r + \dots + t_{\tau_m}(\tau_m z_m)^r$$

und für $z_i \neq 0$ gilt $\tau_i z_i \notin H$.

3. Fall: $(Z \subseteq H)$; $\tau_1 \in H$, $\tau_2 \notin H$ (bei geeigneter Numerierung). Es ist

$$t_{\tau_1 + \tau_2} = t_{\tau_1}(\tau_1(\tau_1 + \tau_2)^{-1})^r + t_{\tau_2}(\tau_2(\tau_1 + \tau_2)^{-1})^r$$

mit $\tau_1(\tau_1 + \tau_2)^{-1} \notin H$.

4. Es soll nun die anfangs erwähnte Tatsache bewiesen werden, daß beim Quaternionenschiefkörper Q der Automorphismenring \mathfrak{R} operatorhomomorph auf Q abgebildet werden kann. Wir zeigen dazu sogleich etwas mehr.

Sei Q jetzt eine zentrale, einfache Algebra vom Rang 4 über dem Körper Z und es sei die Charakteristik $\chi(Z) \neq 2$. Dann hat bekanntlich Q/Z eine Basis der Gestalt

$$1, v, w, vw$$

mit $v^2 = z_1 \in Z$, $w^2 = z_2 \in Z$ und $vw = -wv$; mit anderen Worten, Q ist eine Quaternionenalgebra. Nach Hilfssatz 1 und 4 bilden die durch die Elemente 1, v, w, vw erzeugten inneren Automorphismen t_1, t_v, t_w, t_{vw} eine Basis von \mathcal{E}/Q' . Außerdem bilden diese Automorphismen eine Gruppe. Demzufolge ist der Endomorphismenring

$$\mathcal{E} = [Z', t_1, t_v, t_w, t_{vw}]$$

Rechtsakalarenring von \mathcal{E} und $(\mathcal{E}:\mathcal{E})_r = (Q:Z)$. Da nach dem Satz von MASCHKE \mathcal{E} außerdem vollständig reduzibel ist, gilt jetzt auf Grund von Satz 4 (oder Satz 5)

Satz 10: Ist Q eine zentrale, einfache Algebra vom Rang 4 über dem Körper Z und ist $\chi(Z) \neq 2$, so gibt es einen durch Automorphismen von Q/Z und Z erzeugten Endomorphismenring \mathcal{S} mit $\mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{E}} Q$. Ferner sind \mathcal{S} und Q als \mathcal{S} -Rechtsmoduln vollständig reduzibel und wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} = [Z', \mathcal{S}]$ gilt $\mathcal{R} \xrightarrow{\mathcal{R}} Q$.

5. Der eben angegebene Zusammenhang gibt ferner Anlaß zur Betrachtung endlicher Untergruppen \mathcal{G}_0 der Galoisgruppe \mathcal{G} von K/H , die eine Automorphismenbasis von \mathcal{E}/K' enthalten. Ist letzteres der Fall, so wollen wir \mathcal{G}_0 als *unabhängig* bezeichnen. Sei nun \mathcal{G}_0 eine unabhängige Untergruppe endlicher Ordnung von \mathcal{G} , und die Charakteristik $\chi(K)$ sei kein Teiler der Ordnung von \mathcal{G}_0 . Dann ist nach dem Satz von MASCHKE der formal gebildete Gruppenring von \mathcal{G}_0 in H , den wir mit \mathcal{E}^* bezeichnen wollen, vollständig reduzibel. \mathcal{E}^* kann ringhomomorph auf $\mathcal{S} = [H', \mathcal{G}_0]$ abgebildet werden, indem man jedem Element $\sum_i g_i h_i$ aus \mathcal{E}^* das Element $\sum_i g_i h'_i$ aus \mathcal{S} zuordnet. Da bei einer homomorphen Abbildung ein vollständig reduzibler Ring in einen ebensolchen übergeht, ist auch \mathcal{S} vollständig reduzibel. Ist w_1, w_2, \dots, w_n eine Rechtsbasis von K/H , so ist w'_1, w'_2, \dots, w'_n ein Rechtserzeugendensystem von \mathcal{E}/\mathcal{S} , denn \mathcal{S} enthält nach Voraussetzung eine Automorphismenbasis von \mathcal{E}/K' . Damit erhält man aus Satz 5 das folgende Ergebnis.

Satz 11: Sei \mathcal{G}_0 eine unabhängige Untergruppe endlicher Ordnung von \mathcal{G} , und sei die Charakteristik von K nicht Teiler der Ordnung von \mathcal{G}_0 . Dann gilt

$$\mathcal{S} = [H', \mathcal{G}_0] \xrightarrow{\mathcal{E}} K$$

und K ist als \mathcal{S} -Rechtsmodul vollständig reduzibel. Wegen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ gilt dann auch $\mathcal{R} \xrightarrow{\mathcal{R}} K$.

Einfache Beispiele für galoissche Erweiterungen K/H mit einer Automorphismengruppe unendlicher Ordnung, die eine unabhängige Untergruppe endlicher Ordnung enthält, kann man sofort angeben. Sei P ein kommutativer galoisscher Erweiterungskörper über H mit der Galoisgruppe $\mathfrak{P} = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$, und es besitze P/H eine Basis aus Radikalen r_1, r_2, \dots, r_n (also $r_i^n \in H$). Den Endomorphismenring von P/H , der zum Ring aller quadrati-

schen n -reihigen Matrizen mit Elementen aus H isomorph ist, bezeichnen wir mit K und betrachten K als galoissche Erweiterung über $H^{(1)}$. Dann besteht die Galoisgruppe \mathfrak{G} von K/H aus allen inneren Automorphismen von K und der Zentralisator von H in K stimmt mit K überein. Ist v_1, v_2, \dots, v_n eine Basis aus regulären Elementen von K/H , so bilden nach Hilfssatz 1 die durch sie erzeugten inneren Automorphismen t_{v_i} ($i = 1, 2, \dots, n^2$) eine Basis des Endomorphismenrings von K/H über K^r . Die durch diese Automorphismen erzeugte Untergruppe \mathfrak{G}_0 von \mathfrak{G} ist also unabhängig. Da H das Zentrum von K ist, gilt

$$\mathfrak{G}_0 \cong \{v_i\}/H^+,$$

wobei $\{v_i\}$ die durch die Elemente v_1, \dots, v_n erzeugte multiplikative Gruppe und H^+ die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente aus H sei.

Wie allgemein festgestellt, ist

$$K = [P, \mathfrak{P}] = p_1 P + \dots + p_n P$$

(mit anderen Worten: K ist verschränktes Produkt von P/H zum Faktorensystem 1), und folglich gibt es die Basis

$$p_i r_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

von K/H . Wir betrachten nun

$$\mathfrak{G}_0 \cong \{p_i r_j\}/H^+$$

und behaupten, daß \mathfrak{G}_0 eine endliche Ordnung besitzt. Dies ist sofort einzusehen, denn auf Grund der Vertauschungsregel erzeugen die Elemente

$$\prod_{v, \mu=1}^n p_i(r_v p_\mu)^{j_{v\mu}},$$

wobei $i, j_{11}, j_{12}, \dots, j_{nn}$ unabhängig voneinander die Zahlen $1, 2, \dots, n$ durchlaufen mögen, (nicht notwendig eindeutig) alle Klassen von $\{p_i r_j\}$ nach H^+ . Also ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_0 \leq n^{n^2+1}$ und, wie unmittelbar einzusehen, sogar ein Teiler hiervon.

Um das Ergebnis dieser Überlegungen kurz formulieren zu können, bezeichnen wir eine aus einfachen Radikalen bestehende Basis von P/H als *Radikalbasis*. Dann gilt

Satz 12: *Es bezeichne K den Ring aller n -reihigen, quadratischen Matrizen mit Elementen aus einem Körper H . Die Charakteristik von H sei nicht Teiler von n . Gibt es über H eine kommutative galoissche Erweiterung vom Grad n , die eine Radikalbasis über H besitzt, so ist der Automorphismenring \mathfrak{R} von K/H operatorhomomorph zu $K: \mathfrak{R} \xrightarrow{\cong} K^{(2)}$.*

¹¹⁾ Bei den durch Elemente aus P als Rechtsmultiplikatoren von P erzeugten Endomorphismen werden wir im folgenden die Seitenangabe fortlassen, also statt w_i^r, H^r, P^r usw. nur w_i, H, P usw. schreiben, um Verwechslungen mit den Rechtsmultiplikatoren von K zu vermeiden.

¹²⁾ Zusatz bei der Korrektur. Auf anderem Wege konnte ich inzwischen diesen Satz weitgehend verallgemeinern. F. KASCH, Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums, Archiv der Math., IV, 182 (1953), Satz 5.

6. Wie festgestellt, ist bei einer beliebigen galoisschen Erweiterung $\mathfrak{E} = [K^r, \mathfrak{G}]$. Daher besitzt \mathfrak{E} über dem Automorphismenring $\mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}]$ das zuvor angegebene Rechtserzeugendensystem w'_1, w'_2, \dots, w'_n . Daher folgt aus Satz 6

Satz 13: *Ist K/H eine galoissche Erweiterung mit der Galoisgruppe \mathfrak{G} und betrachtet man den Automorphismenring $\mathfrak{R} = [H^r, \mathfrak{G}]$ und K als \mathfrak{R} -Rechtsmoduln, so kommen die Kompositionsfaktoren einer Kompositionsreihe von K (bis auf Isomorphie) unter den Kompositionsfaktoren einer Kompositionsreihe von \mathfrak{R} vor.*

V. Folgerung.

Unter der Voraussetzung, daß K ein Schiefkörper ist, gilt der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung des Satzes vom primitiven Element auf Schiefkörper darstellt.

Satz 14: *Ist K/H eine galoissche Schiefkörpererweiterung endlichen Ranges, so besitzt K zwei erzeugende Elemente über H : $K = H(k_1, k_2)$. Ist $Z = T$ oder $T \subseteq H$, so existiert bereits ein erzeugendes Element von K über H : $K = H(k)$.*

Darin ist also z. B. enthalten, daß jeder zentrale Schiefkörper ein erzeugendes Element über jedem seiner maximalen kommutativen Unterkörper besitzt.

Zum Beweis des Satzes greifen wir aus dem Zentralisator T von H in K einen über dem Zentrum von T separablen, maximalen kommutativen Unterkörper S heraus, was bekanntlich stets möglich ist. F sei der Zentralisator von S in K , d. h. der Fixkörper der durch die Elemente aus S erzeugten inneren Automorphismen. Dann besitzt, wie in [13] gezeigt, F ein erzeugendes Element über H : $F = H(k_1)$. Andererseits besitzt K über F nur innere Automorphismen mit dem kommutativen Transformatorenkörper S , d. h. es ist $S \subseteq F$. Man hat also jetzt nur noch den im Satz behaupteten zweiten Fall zu beweisen. Dazu nehme man ein Element k , welches eine Normalbasis von K/H erzeugt. $H(k)$ bleibt dann nur bei dem identischen Automorphismus fest und stimmt daher auf Grund der galoisschen Zuordnung mit K überein.

Literaturverzeichnis.

- [1] E. ARTIN: Galois Theory. Notre Dame Mathematical Lectures No. 2. 2. Ausg. (1948). — [2] E. ARTIN: Linear mappings and the existence of a normal basis. Studies and Essays presented to R. COURANT on his 60th birthday (Interscience Publishers, New York, S. 1 (1948). — [3] R. BRAUER: Über die KLEINSche Theorie der algebraischen Gleichungen. Math. Ann. **110**, 482, (1934). — [4] H. CARTAN: Théorie de Galois pour les corps non commutatifs. Ann. Ec. Norm (3) **64**, 59 (1947). — [5] J. W. S. CASSELS, G. E. WALL: The normal basis theorem. Journal London Math. Soc. **25**, 259 (1950). — [6] C. CHEVALLEY: Sur la théorie du corps des classes dans les corps finis et les corps locaux. J. Tokyo Univ. Faculty of Science **2**, 365 (1933). — [7] M. DEURING: GALOISsche Theorie und Darstellungstheorie. Math. Ann. **107**, 140 (1932). — [8] M. DEURING: Anwendungen der Darstellungen von Gruppen durch lineare Substitutionen auf die GALOISsche Theorie. Math. Ann. **113**, 40 (1936). — [9] J. DIEUDONNÉ: La théorie de GALOIS des anneaux simples et semi-simples. Commentarii Math. Helvetici **21**, 154 (1948).

- [10] H. HASSE: Klassenkörpertheorie. Hektographierte Vorlesungsausarbeitung, Marburg 1932—1933, S. 157. — [11] K. HENSEL: Über die Darstellung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen Primdivisor. *Crelles J.* **103**, 230 (1888). — [12] N. JACOBSON: A note on division rings. *Amer. Journal of Math.* **69**, 27 (1947). — [13] F. KASCH: Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern. *Journal f. Math.* **189**, 150 (1951). — [14] T. NAKAYAMA: Normal basis of a quasi-field. *Proc. J. A. Tokyo* **16**, 532 (1940); [15] On Frobenius algebras II. *Annals of Math.* **42**, 1 (1941); [15a] Halblinare Erweiterung des Satzes von der Normalbasis und ihre Anwendung auf die Existenz der derivierten (differentialen) Basis, I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **21**, 141 (1945); [15b] dgl. Teil II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **22**, 55 (1946); [15c] Semilinear normal basis for quasi-fields. *Amer. J. of Math.* **71**, 241 (1949); [15d] Galois Theory for general rings with minimum condition. *Journ. Math. Soc. Jap.* **1**, 203 (1949). — [16] E. NOETHER: Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung. *Journal f. Math.* **167**, 147 (1931). — [17] S. PERLIS: Normal bases of cyclic fields of prime-power degree. *Duke Math. J.* **9**, 507 (1942). — [18] R. STAUFFER: The construction of a normal basis in a separable normal extension field. *Amer. J. of Math.* **58**, 585 (1936).

(Eingegangen am 29. Januar 1953.)

Ein Kriterium für das Vorhandensein von Faktoren in beliebigen Graphen.

Von

THEODOR KALUZA jr. in Braunschweig.

T und W seien zwei Graphen, von denen T völlig beliebig ist, W aber die Gestalt eines endlichen oder einseitig unendlichen Weges hat. Wenn wir dann einen (bzw. den) Endpunkt von W mit einem beliebigen Knotenpunkt von T identifizieren — ohne aber noch weitere Bestandteile von W mit Bestandteilen von T als identisch anzusehen —, so wollen wir sagen, daß wir dem Graphen T den Weg W angefügt haben. Ist wieder T ein beliebiger Graph und W ein endlicher Weg und werden die beiden Endpunkte von W — aber keine weiteren Bestandteile — mit zwei Punkten von T identifiziert, so soll dieser Prozeß als *Einfügen eines Steges in T* beschrieben werden.

Verstehen wir sodann unter einem Weg *nicht-gerader Länge* einen Weg, der entweder von ungerader Länge oder einseitig unendlich ist, und unter einem Weg *nicht-ungerader Länge* einen, der entweder von gerader Länge oder einseitig unendlich ist, so gilt der

Satz: Ein beliebiger Graph G besitzt dann und nur dann einen Faktor ersten Grades, wenn sich jede seiner Komponenten aus einem Weg nicht-gerader Länge durch Anfügen von Wegen nicht-ungerader Länge und Einfügen von Stegen ungerader Länge aufbauen läßt, — wobei unter Aufbau eine wohlgeordnete Folge der genannten Prozesse zu verstehen ist.

Es genügt, den Beweis für einen zusammenhängenden Graphen G zu führen:

G besitze einen Faktor F , und K_1 sei eine beliebige Kante von F . Gibt es in G noch Punkte, die nicht mit K_1 inzident sind, so gibt es wegen des Zusammenhanges auch einen Punkt P_2 , der von einem der (End-)Punkte von K_1 — er heiße P_1 — die Entfernung 1 hat. Die Kante P_1P_2 heiße K_2 und die Kante von F , die mit P_2 inzident ist, heiße K_3 . Dann ist K_1 ein Weg nicht-gerader Länge und K_2-K_3 ein an K_1 angefügter Weg nicht-ungerader Länge. Ferner stellen alle etwaigen Kanten, die Punkte von K_1 und K_3 verbinden, Stege der ungeraden Länge 1 dar.

Als Regel für den Aufbau von G soll nun gelten, daß man zu dem bereits aufgebauten Teil, von einem geeigneten seiner Punkte ausgehend, abwechselnd Nicht-Faktorkanten und Faktorkanten so hinzufügt, daß sie aneinander anschließend eben Stege ungerader Länge, einseitig unendliche Wege oder Wege gerader Länge bilden. Daß der Aufbau von G gemäß dieser Regel begonnen werden kann, wurde im vorhergehenden Absatz gezeigt; daß er gemäß dieser Regel fortgeführt werden kann, wenn der bereits aufgebaute Teil T noch nicht alle Punkte von G enthält, sieht man auch aus dem vorangehenden Absatz, wenn man dort sinngemäß T anstelle von K_1 setzt. Sind schließlich alle

Punkte erfaßt, so können etwaige noch nicht erfaßte Kanten als Stege der Länge 1 eingefügt werden.

Dem Zweifel, ob dieser Prozeß überhaupt zu Ende führt (den ganzen Graphen G liefert), kann mit Hilfe des Wohlordnungssatzes so begegnet werden: Die Punkte und die Kanten von G mögen — jede der Mengen für sich — wohlgeordnet gedacht werden; dann wird als zweite Aufbau-Regel festgesetzt, daß der nächste Schritt jeweils durch den ersten von dem bereits aufgebauten Teil T noch nicht erfaßten Punkt P folgendermaßen bestimmt wird: P wird mit T durch einen (endlichen) Weg W verbunden. Der T nächstgelegene Punkt von W heiße P_1 und werde an T wie oben angeschlossen. Das Stück $P - P_1$ von W ist um 1 kürzer als W selbst, — P kann also nach endlich vielen Schritten an T angeschlossen werden. Nach Erfassung aller Punkte werden die noch fehlenden Kanten so, wie sie in der Wohlordnung aufeinander folgen, als Stege eingefügt.

Läßt sich umgekehrt G im Sinne des Satzes aufbauen, so ergibt sich wiederum durch Induktion die Existenz eines Faktors in G : Der Weg nichtgerader Länge, mit dem der Aufbau begonnen werden kann, besitzt nämlich einen Faktor; hat man einen Teil T von G aufgebaut und besitzt T einen Faktor, so besitzt auch die aus T beim nächsten Aufbau-Schritt entstehende Erweiterung T' einen Faktor, der aus den Faktorkanten von T und den Kanten mit gerader Nummer des angefügten Weges bzw. des eingefügten Steges besteht (Zählung mit 1 bei der bzw. einer Kante mit identifiziertem Endpunkt beginnen). Da also eine im Laufe des Aufbaus einmal zur Faktorkante gemachte Kante im Laufe des weiteren Aufbaus Faktorkante bleibt, bilden die Faktorkanten aller Teile T tatsächlich einen Faktor von G , womit alles bewiesen ist.

Anmerkung. Als die wichtigsten bisher bekannt gewordenen Bedingungen für die Existenz eines Faktors ersten Grades in einem Graphen G können wohl gelten:

G endlich, brückenlos und regulär 3. Grades — hinreichend (Satz von PETERSEN, 1891);

G paar und regulär endlichen Grades — hinreichend [Bew. von D. KÖNIG für endliche G (1914) und von D. KÖNIG und ST. VALKÓ für unendliche G (1926)];

G regulär vom unendlichen Grade g und Existenz eines $h < g$ so, daß je zwei Punkte von G durch weniger als h Kanten verbunden sind, — hinreichend [Bew. von D. KÖNIG, G. HAJÓS und L. KALMAR (1935 [?])];

Beweise, Literaturangaben, Anwendungen und einfache Verallgemeinerungen hierzu s. etwa D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akad. Verl. Ges. Leipzig 1936, S. 186, 190, 170 und 220;

zu je k unabhängigen Punkten in G existieren k verschiedene Punkte in G , deren jeder mit mindestens einem der ersteren verbunden ist, — notwendig und hinreichend bei paaren Graphen endlichen Grades (Bew. P. HALL, On representations of subsets, Journ. London Math. Soc. 10, 26—30, (1935), mengentheoretisch formuliert für endliche G ; für unendliche G s. R. RADO, Factorization of even graphs, Quart. Journ. Math. [Oxford Series 20, 95—104, (1949)];

die Zahl der Teile mit ungerader Punktezahl, in die G nach Streichung von s beliebigen Punkten und den von ihnen ausgehenden Kanten zerfällt, ist stets kleiner oder gleich s , — notwendig und hinreichend bei allen Graphen endlichen Grades (Bew. für endliche G s. W. T. TUTTE, The factorization of linear graphs, Journ. London Math. Soc. 22, 107 bis 111 (1947); für unendliche G s. W. T. TUTTE, The factorization of locally finite graphs, Canadian Journ. Math. 2, 44—49 (1950).

(Eingegangen am 17. März 1953.)

Diskontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung.

Von

OTTO FÖLLINGER in Frankfurt am Main.

Im folgenden werden Variationsprobleme des einfachsten Typs, also ebene Probleme ohne Nebenbedingungen, in x -Darstellung behandelt, bei denen jedoch im Gegensatz zur üblichen Problemstellung das Gefälle y' der zulässigen Kurven durch die Ungleichung $g(x, y) < y' < G(x, y)$ eingeschränkt ist, wobei $g(x, y)$, $G(x, y)$ gegebene Funktionen sind. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben für zwei Typen diskontinuierlicher Lösungen. Bei beiden besteht die Lösung C_0 aus zwei glatten, in einer Ecke zusammentreffenden Kurvenstücken, bei dem einen Typ hat das erste Kurvenstück in jedem Punkt eine zwischen $g(x, y)$ und $G(x, y)$ gelegene Steigung, das zweite das Maximalgefälle $y' = G(x, y)$, während bei dem anderen Typ der erste Bogen das Minimalgefälle $y' = g(x, y)$, der zweite das Maximalgefälle $y' = G(x, y)$ besitzt. In einem Spezialfall wurden diese Probleme bereits von B. FLODIN¹⁾ behandelt, nämlich für $g(x, y) = a$, $G(x, y) = b$. Die hier verwandte Methode zur Herleitung notwendiger Bedingungen ist von der von FLODIN benutzten verschieden, und zwar kann sie aufgefaßt werden als eine Kombination der Variations- und Differentiationsmethode, wie diese in der Theorie der Variationsprobleme mit variablen Endpunkten üblich sind. Die geometrische Deutung der so erhaltenen Bedingungen führt zu Resultaten, welche die entsprechenden FLODINSchen Ergebnisse enthalten. Wie in der bekannten Theorie der diskontinuierlichen Lösungen kommt man so zur Konstruktion einer Eckenkurve und der Einbettung von C_0 in ein Kurvenfeld. Die hierbei auftretenden Felder bestehen jedoch nicht aus Extremalen oder gebrochenen Extremalen, sondern setzen sich aus Extremalen und Lösungen der Differentialgleichungen $y' = g(x, y)$, $y' = G(x, y)$ zusammen. Infolgedessen ist die für die Aufstellung hinreichender Bedingungen entscheidende Darstellung der totalen Variation mit Hilfe der WEIERSTRASSschen \mathcal{L} -Funktion hier nicht durchführbar. An die Stelle der letzteren tritt vielmehr eine Funktion, welche von FLODIN für Felder konstruiert wurde, die sich aus Geraden- und Extremalenscharen zusammensetzen, und welche speziell für Extremalenfelder in die \mathcal{L} -Funktion übergeht. Die Konstruktion dieser Funktion wird hier auf beliebige Kurvenfelder verallgemeinert. Mit Hilfe derselben erhält man ein Analogon der WEIERSTRASS-Bedingung und aus diesem weitere notwendige Bedingungen, welche durch die Beschaffenheit der Funktionen $g(x, y)$

¹⁾ Über diskontinuierliche Lösungen bei Variationsproblemen mit Gefällbeschränkung, Acta Soc. Scient. Fennicae, Helsingfors, 1945.

und $G(x, y)$ bestimmt sind. Die Gesamtheit der so erhaltenen Bedingungen erweist sich dann nach gewissen Verschärfungen als hinreichend.

1. Problemstellung.

Gegeben ein offener Bereich \mathfrak{G}_2 der x, y -Ebene und $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathfrak{G}_2$ mit $x_1 < x_2$. In \mathfrak{G}_2 seien zwei Funktionen $g(x, y)$ und $G(x, y)$ erklärt und von der Klasse $C^{(2)2}$ mit $g(x, y) < G(x, y)$. Dann sei \mathfrak{G}_3 : $(x, y) \in \mathfrak{G}_2, g(x, y) \leq y' \leq G(x, y)$. Sei $C: y = \varphi(x), x_1 \leq x \leq x_2$, eine stückweis glatte Kurve mit $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$. Ihr werde die Kurve $\dot{C}: y = \varphi(x), y' = \varphi'(x), x_1 \leq x \leq x_2$, des x, y, y' -Raumes zugeordnet. C heiße zulässig, wenn $\dot{C} \subset \mathfrak{G}_3$. Der Integrand $f(x, y, y')$ des zu einem Minimum zu machenden Integrals $I(C) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$ sei in dem offenen Bereich $\mathfrak{G}_3 \supset \mathfrak{G}_2$ von der Klasse $C^{(3)}$.

Die zulässige Kurve $C_0: y = \varphi_0(x), x_1 \leq x \leq x_2$, liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn ein $\varrho > 0$ existiert so, daß $I(C_0) \leq I(C)$ für alle zulässigen Kurven C mit $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \varrho, x_1 \leq x \leq x_2$. Dies Minimum heißt eigentlich, wenn $I(C) = I(C_0)$ nur für $C = C_0$.

Im folgenden werde eine zulässige Kurve betrachtet, welche aus zwei glatten Kurvenstücken $E_0: y = \varphi_0(x), x_1 \leq x \leq x_0$, und $\bar{E}_0: y = \bar{\varphi}_0(x), x_0 \leq x \leq x_2$, besteht, die in der Ecke $P_0 = (x_0, y_0)$ zusammentreffen, so daß also $p_0 \neq \bar{p}_0$, wenn $\varphi'_0(x_0) = p_0, \bar{\varphi}'_0(x_0) = \bar{p}_0$. Unter den verschiedenen Lage-möglichkeiten von E_0 und \bar{E}_0 in \mathfrak{G}_3 seien zwei herausgegriffen:

- I. E_0 liegt im Innern, \bar{E}_0 auf dem oberen Rand von \mathfrak{G}_3 .
- II. E_0 liegt auf dem unteren, \bar{E}_0 auf dem oberen Rand von \mathfrak{G}_3 .

2. Herleitung notwendiger Bedingungen im Fall I.

2.1. Liefert $C_0 = E_0 + \bar{E}_0$ ein Minimum von $I(C)$, so muß auch jedes Teilstück von C_0 ein Minimum erzeugen, insbesondere auch E_0 . Da E_0 im \mathfrak{G}_3 -Innern liegt, kann man durch geringfügige Modifikation der üblichen Schlußweisen zeigen, daß hierfür die Gültigkeit der EULERSchen Gleichung, der LEGENDRE-, JACOBI- und WEIERSTRASS-Bedingung für E_0 notwendig ist. Im folgenden wird daher angenommen, daß E_0 eine Extremale ist, welche die verschärfte LEGENDRE- und JACOBI-Bedingung sowie die WEIERSTRASS-Bedingung, d. h. $\mathcal{L}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x), \tilde{p}) \geq 0$ für $g(x, \varphi_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \varphi_0(x)), x_1 \leq x \leq x_2$, erfüllt. Die bisher gemachten Voraussetzungen seien mit (V) bezeichnet.

Dann existiert ein Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \varphi(x, \alpha), x_1 - h \leq x \leq x_2 + h, |\alpha - \alpha_0| < \delta$ mit $\varphi(x, \alpha_0) = \varphi_0(x)$, dessen Träger P_1 ist und für dessen Elemente $E \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{G}_3$ gilt. Da \bar{E}_0 auf dem oberen Rand von \mathfrak{G}_3 liegt, erfüllt $y = \bar{\varphi}_0(x)$ die Differentialgleichung $y' = G(x, y)$. Eine Umgebung von \bar{E}_0 wird von einer Integralkurvenschare $\bar{\mathfrak{b}}: y = \bar{\varphi}(x, \beta), x_0 - h \leq x \leq x_2 + h, |\beta - \beta_0| < \bar{\delta}, \bar{\mathfrak{A}}$, dieser Differentialgleichung schlicht überdeckt, die \bar{E}_0 für $\beta = \beta_0$ enthalte

²⁾ Definition der Klasse $C^{(n)}$ siehe BOLZA, Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 14.

und für die $\bar{\varphi}_\beta(x, \beta) \neq 0^3$ in $\bar{\mathfrak{A}}$ gilt. Diese Schar, deren Elemente \bar{E} seien, werde als allgemeines Integral von $y' = G(x, y)$ bezeichnet.

2.2. Nun werde eine spezielle Schar \mathfrak{f} zulässiger Kurven konstruiert, die

in einer beliebig engen Umgebung von C_0 liegt und C_0 enthält.

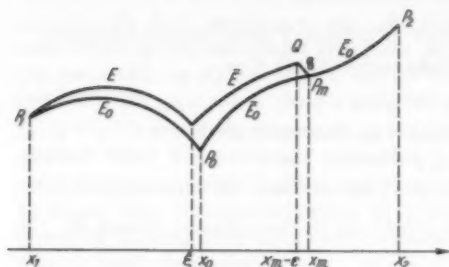


Fig. 1.

Sei $P_m = (x_m, y_m)$ mit $x_m \in (x_0, x_2]$ und $y_m = \bar{\varphi}_0(x_m)$. Durch P_m werde das Geradenstück $g: x = x_m - \varepsilon, y = y_m - \tilde{p}\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_0$, mit $g(x_m, y_m) < \tilde{p} < G(x_m, y_m)$ gelegt. Bringt man \bar{b} mit g zum Schnitt, $\bar{\varphi}(x_m - \varepsilon, \beta) = y_m - \tilde{p}\varepsilon$, so existiert eine diese Gleichung erfüllende Funktion $\beta = b(\varepsilon)$,

$|\varepsilon| < \varepsilon_0$, mit $b(0) = \beta_0$. Damit ist

$$\bar{b}: y = \bar{\varphi}(x, b(\varepsilon)) = \bar{\varphi}(x, \varepsilon), \quad x_0 - h \leq x \leq x_2 + h, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Jetzt bringe man b und \bar{b} zum Schnitt: $\varphi(\xi, \alpha) = \bar{\varphi}(\xi, \varepsilon)$. Da E_0 die verschärfte JACOBI-Bedingung erfüllt, ist $\varphi_x(x_0, \alpha_0) \neq 0$, und es gibt daher ein $k > 0$ so, daß in $|\xi - x_0| < k, |\varepsilon| < k$ eine Funktion $\alpha = A(\xi, \varepsilon)$ existiert mit $\varphi(\xi, A(\xi, \varepsilon)) = \bar{\varphi}(\xi, \varepsilon)$ und $A(x_0, 0) = \alpha_0$. Hiermit ist $b: y = \varphi(x, A(\xi, \varepsilon)) = \psi(x; \xi, \varepsilon), x_1 \leq x \leq \xi, |\xi - x_0| < k, |\varepsilon| < k$. Nunmehr sei \mathfrak{f} definiert durch

$$\begin{aligned} y &= \psi(x; \xi, \varepsilon), & x_1 &\leq x \leq \xi, \\ y &= \bar{\varphi}(x, \varepsilon), & \xi &\leq x \leq x_m - \varepsilon, \\ \mathfrak{f}: y &= y_m + \tilde{p}(x - x_m), & x_m - \varepsilon &\leq x \leq x_m, \\ y &= \bar{\varphi}_0(x), & x_m &\leq x \leq x_2, \\ |\xi - x_0| &< k, & 0 &\leq \varepsilon < k. \end{aligned}$$

2.3. Das Grundintegral längs einer Kurve von \mathfrak{f} ist

$$\begin{aligned} u(\xi, \varepsilon) &= \int_{x_1}^{\xi} f(x, \psi(x; \xi, \varepsilon), \psi_x(x; \xi, \varepsilon)) dx + \int_{\xi}^{x_m - \varepsilon} f(x, \bar{\varphi}(x, \varepsilon), \bar{\varphi}_x(x, \varepsilon)) dx + \\ &+ \int_{x_m - \varepsilon}^{x_m} f(x, y_m + \tilde{p}(x - x_m), \tilde{p}) dx + \int_{x_m}^{x_2} f(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) dx, \end{aligned}$$

$|\xi - x_0| < k, 0 \leq \varepsilon < k$. Die Funktion $u(\xi, \varepsilon)$ ist jedoch in der ganzen Umgebung von $(x_0, 0)$ erklärt und von der Klasse $C^{(2)}$. Da C_0 ein Minimum liefert, ist $u(x_0, 0) \leq u(\xi, \varepsilon)$ in $|\xi - x_0| < k, 0 \leq \varepsilon < k$ für genügend kleines k . Hierfür ist notwendig $u_\xi(x_0, 0) = 0, u_\varepsilon(x_0, 0) \geq 0, u_{\xi\xi}(x_0, 0) \geq 0$. Hieraus erhält

³⁾ Vgl. etwa BOLZA, a. a. O., S. 175—176.

man die Relationen

$$\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) = 0;$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_m} \bar{\varphi}_x(x, 0) \left(\bar{f}_y(x, 0) - \frac{d}{dx} \bar{f}_y'(x, 0) \right) dx + \bar{\varphi}_x(x_0, 0) (f_y'(x_0, y_0, p_0) - \\ & - f_y'(x_0, y_0, \bar{p}_0)) + \\ & + \bar{\varphi}_x(x_m, 0) f_y(x_m, y_m, y'_m) + f(x_m, y_m, \tilde{p}) - f(x_m, y_m, y'_m) \geq 0 \text{ mit} \\ & \bar{f}(x, 0) = f(x, \bar{\varphi}(x, 0), \bar{\varphi}_x(x, 0)), y'_m = \varphi'_0(x_m); \\ & f_x - \bar{f}_x + \bar{p}_0 (f_y - \bar{f}_y) + \bar{y}'_0 (f_y' - \bar{f}_y') + (\bar{p}_0 - p_0) f_y + (\bar{p}_0 - p_0)^2 f_{yy'} + \\ & + (\bar{p}_0 - p_0)^2 f_{yy'} \cdot \frac{\varphi_{\alpha x}(x_0, \alpha_0)}{\varphi_{\alpha}(x_0, \alpha_0)} \geq 0 \end{aligned}$$

mit $\bar{y}'_0 = \bar{\varphi}'_0(x_0)$ und $f_x = f_x(x_0, y_0, p_0)$, $\bar{f}_x = f_x(x_0, y_0, \bar{p}_0)$ usw. Die erste dieser Relationen werde mit (A), die letzte mit (B) bezeichnet. Führt man in der zweiten dieser Relationen an Stelle des Scharparameters ε wieder α ein und schreibt außerdem für x_m x , so erhält man auf Grund von 2.2.

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{p} - \bar{\varphi}'_0(x)}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \cdot \int_{x_0}^x \bar{\varphi}_\beta(\tau, \beta_0) \left(\bar{f}_y(\tau, \beta_0) - \frac{d}{d\tau} \bar{f}_y'(\tau, \beta_0) \right) d\tau - \\ (C) \quad & - (\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0(x)) \frac{\bar{\varphi}_\beta(x_0, \beta_0)}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} (f_y'(x_0, y_0, p_0) - f_y'(x_0, y_0, \bar{p}_0)) - \\ & - (\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0(x)) f_y'(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}'_0(x)) + f(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) - f(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}'_0(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

mit $\bar{f}(x, \beta) = f(x, \bar{\varphi}(x, \beta), \bar{\varphi}_x(x, \beta))$. Diese Ungleichung gilt zunächst nur für $x_0 < x \leq x_0$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) < \tilde{p} < G(x, \bar{\varphi}_0(x))$. Da jedoch die durch die linke Seite dieser Ungleichung erklärte Funktion in dem abgeschlossenen Bereich erklärt und stetig ist, folgt, daß (C) in $x_0 \leq x \leq x_0$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$ gilt.

3. Konstruktion einer Eckenkurve.

3.1. Nach (V) ist $\mathcal{L}(x, \varphi_0, \varphi'_0, G(x, \varphi_0)) = \bar{\mathcal{L}}(x) \geq 0$ in $x_1 \leq x \leq x_0$. Wegen (A) ist $\bar{\mathcal{L}}(x_0) = 0$ und daher $\bar{\mathcal{L}}(x) = (x - x_0)(\Omega_0 + \omega(x - x_0))$, $x_1 \leq x \leq x_0$, mit $\Omega_0 = \bar{\mathcal{L}}_x(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x - x_0) = 0$. Also muß

$$(D) \quad \Omega_0 = \bar{f}_x - f_x + p_0 \bar{f}_y - \bar{p}_0 f_y + (G_x + p_0 G_y) (\bar{f}_y' - f_y')|_0^4 \leq 0 \text{ sein.}$$

Die Ungleichung $\Omega_0 < 0$, die im folgenden stets vorausgesetzt wird, sei mit (D') bezeichnet.

3.2. Sei $v(x)$ eine in x_0 verschwindende, nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBI'schen Differentialgleichung (J). Da E_0 die verschärfte JACOBI-Bedingung erfüllt, liegt die erste vor x_0 gelegene Nullstelle x'_0 von $v(x)$ nicht in $[x_1, x_0]$. Es sei $\xi \in (x'_0, x_0)$ und $y = \Phi(x, \alpha)$, $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, das Extremalenbüschel durch $Q = (\xi, \varphi_0(\xi))$ mit $\Phi(x, \alpha_0) = \varphi_0(x)$. Es ist dann $\Phi_\alpha(x, \alpha_0) = c \Lambda(x, \xi)$ mit $c = c(\xi) \neq 0$ und $\Lambda(x, \xi) =$

⁴⁾ Das Symbol $|_0$ soll andeuten, daß der vorhergehende Ausdruck an der Stelle P_0 zu nehmen ist.

$= u_2(\xi) u_1(x) - u_1(\xi) u_2(x)$, $x'_0 \leq x$, $\xi \leq x_0$, wobei $u_1(x)$, $u_2(x)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von (J) ist.

Wegen (A) ist für $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$ die Gleichung

$$\mathcal{L}\{x, \Phi(x, \alpha), \Phi_x(x, \alpha), G(x, \Phi(x, \alpha))\} = \tilde{\mathcal{L}}(x, \alpha) = 0$$

erfüllt. Da außerdem $\tilde{\mathcal{L}}_x(x_0, \alpha_0) = \Omega_0 < 0$ gemäß (D'), existiert in $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ eine Funktion $x = \hat{x}(\alpha)$ mit $\tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}(\alpha), \alpha) = 0$ und $\hat{x}(\alpha_0) = x_0$. Das glatte Jordankurvenstück $\hat{C}: x = \hat{x}(\alpha)$, $y = \hat{y}(\alpha) = \Phi(\hat{x}(\alpha), \alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, sei als Eckenkurve des Extremalenbüschels $y = \Phi(x, \alpha)$ bezeichnet. Ihr Anstieg für $\alpha = \alpha_0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{p}_0(\xi) &= p_0 - \Omega_0 \frac{\Phi_\alpha(x_0, \alpha_0)}{A_\alpha \Phi_\alpha(x_0, \alpha_0) + B_0 \Phi_{\alpha x}(x_0, \alpha_0)} = \\ &= p_0 - \Omega_0 \frac{\Delta(x_0, \xi)}{A_\alpha \Delta(x_0, \xi) + B_0 \Delta_x(x_0, \xi)}, \quad x'_0 < \xi < x_0, \end{aligned}$$

mit $A_0 = \bar{f}_y - f_y + G_y(\bar{f}_{y'} - f_{y'}) - (\bar{p}_0 - p_0) f_{yy'}|_0$, $B_0 = -(\bar{p}_0 - p_0) f_{y'y'}|_0 < 0$.

4. Einbettung von C_0 in ein Feld.

4.1. Durch die letzte Gleichung ist die Funktion $\hat{p}_0(\xi)$ in $x'_0 \leq \xi \leq x_0$ erklärt mit $\hat{p}_0(x_0) = p_0$, $\hat{p}_0(x_0) = p_0$. Man zeigt nun auf die in der Theorie der diskontinuierlichen Lösungen übliche Weise, daß $\hat{p}_0(\xi)$ in $[x'_0, x_0]$ monoton steigt und in (x'_0, x_0) genau eine Unstetigkeitsstelle x_∞ besitzt, in der die Funktion von $+\infty$ auf $-\infty$ springt, so daß sie also in $x'_0 < \xi \leq x_0$ jeden Wert genau einmal annimmt⁵⁾. Insbesondere werde die Stelle ξ , für welche $\hat{p}_0(\xi) = \bar{p}_0$ ist, mit q_0 bezeichnet und $(q_0, \varphi_0(q_0))$ mit Q_0 . Anschaulich gesprochen: Während der Träger Q des Büschels $y = \Phi(x, \alpha)$ auf E_0 von P'_0 nach P_0 wandert, dreht sich die in P_0 genommene Tangente an die Eckenkurve des Q -Büschels aus der durch die E_0 -Tangente in P_0 charakterisierten Grenzlage um den Winkel π monoton in dieselbe Grenzlage und fällt daher genau einmal mit der \bar{E}_0 -Tangente in P_0 zusammen. Dies geschieht gerade für $Q = Q_0$.

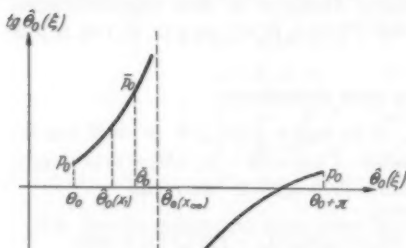


Fig. 2.

4.2. Auf Grund von (B) soll nun gezeigt werden, daß $q_0 \in (x_1, x_0]$, falls C_0 ein Minimum liefert.

Dazu werde der Tangentenwinkel von \hat{C} in P_0 mit $\hat{\theta}_0(\xi)$ bezeichnet, so daß also $\hat{p}_0(\xi) = \tan \hat{\theta}_0(\xi)$ ist. Nun ist

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{p}_0(x_1) - \bar{p}_0}{\hat{p}_0(x_1) - p_0} = \\ &= -\frac{1}{\Omega_0} \left(f_x - \bar{f}_x + \bar{p}_0(f_y - \bar{f}_y) + (\bar{p}_0 - p_0)f_y + (G_x + \bar{p}_0 G_y)(f_{y'} - \bar{f}_{y'}) + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{p}_0 - p_0)^2 f_{yy'} + (\bar{p}_0 - p_0)^2 f_{y'y'} \frac{\Delta(x_0, x_1)}{\Delta(x_0, x_1)} \right) |_0. \end{aligned}$$

⁵⁾ Siehe etwa BOLZA, Amer. Journ. of Math. 30 (1908).

Wegen $\bar{\varphi}'_0(x) = G(x, \bar{\varphi}_0(x))$ ist $\bar{y}'_0 = G_x(x_0, y_0) + \bar{p}_0 G_y(x_0, y_0)$, und da weiterhin $\varphi_*(x, \alpha_0) = c \Delta(x, x_1)$, folgt aus (B), daß $\frac{\hat{p}_0(x_1) - \bar{p}_0}{\hat{p}_0(x_1) - p_0} \geq 0$ ist. Angenommen, es sei $q_0 \in (x_1, x_0]$. Dann gilt (vgl. Fig. 2) $\theta_0 < \hat{\theta}_0(x_1) < \bar{\theta}_0 < \theta_0 + \pi$. Da $\bar{p}_0 > p_0$, ist $\theta_0 < \hat{\theta}_0(x_\infty)$, also auch $\hat{\theta}_0(x_1) < \theta_0(x_\infty)$. Man hat daher die Ungleichung $p_0 < \hat{p}_0(x_1) < \bar{p}_0$, woraus $\hat{p}_0(x_1) - p_0 > 0$, $\hat{p}_0(x_1) - \bar{p}_0 < 0$, also $\frac{\hat{p}_0(x_1) - p_0}{\hat{p}_0(x_1) - \bar{p}_0} < 0$ folgt.

4.3. Verschärft man (B) zu (B'), d. h., läßt man in der Ungleichung (B) das Gleichheitszeichen weg, so gilt $q_0 \notin [x_1, x_0]$. Dann kann man in üblicher Weise zeigen, daß sich C_0 in ein Feld einbetten läßt. Dazu betrachte man das Extremalenbüschel f durch einen Punkt $T \in E_0$ mit $Q_0 < T < P_1$ und konstruiere dessen Eckenkurve \hat{C} . Da E_0 und \bar{E}_0 bei P_0 auf verschiedenen Seiten von \hat{C} liegen, trennt \hat{C} f und die Kurvenschar $y = \bar{\varphi}(x, \beta)$. Infolgedessen hat man, wenn nur T hinreichend nahe bei P_1 liegt, in

$$f: y = t(x, \alpha), x_1 - k \leq x \leq \hat{x}(\alpha), |\alpha - \alpha_0| < \delta: a, \text{ mit } t(x, \alpha_0) = \varphi_0(x)$$

$$\text{und } \bar{f}: y = \bar{\varphi}(x, \beta), \hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2 + k, |\beta - \beta_0| < \bar{\delta},$$

ein zusammengesetztes, C_0 einbettendes Feld. Seine Existenz ist durch (V), (A), (B') und (D') gesichert.

Man kann in $f + \bar{f}$ α als gemeinsamen Parameter einführen, indem man $t(\hat{x}(\alpha), \alpha) = \bar{\varphi}(\hat{x}(\alpha), \beta)$ nach β auflöst, wodurch man die Funktion $\beta = b(\alpha)$ erhält. Hiermit wird

$$f: y = \bar{\varphi}(x, b(\alpha)) = \bar{\varphi}(x, \alpha), \hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2 + k, |\alpha - \alpha_0| < \bar{\delta};$$

mit $\bar{\varphi}_*(x, \alpha) \neq 0$ in \bar{a} . Das Gesamtfeld sei nunmehr durch $y = \chi(x, \alpha)$, $(x, \alpha) \in a + \bar{a}$, dargestellt. Es bedecke den Bereich \mathfrak{G} der x, y -Ebene. Der von f bzw. \bar{f} überdeckte Teilbereich von \mathfrak{G} sei g bzw. \bar{g} .

5. Eine Verallgemeinerung der WEIERSTRASSschen \mathcal{L} -Funktion.

5.1. In Erweiterung einer Konstruktion von B. FLODIN⁶⁾ soll jetzt eine Funktion gebildet werden, die eine Verallgemeinerung der WEIERSTRASSschen \mathcal{L} -Funktion darstellt. Letztere ist auf einem Extremalenfeld mit der Gefällefunktion $p(x, y)$ von der Form $\mathcal{L}(x, y, p(x, y), \tilde{p}) = f(x, y, \tilde{p}) - u(x, y) - v(x, y)\tilde{p}$, und ihre Bedeutung für das Variationsproblem beruht auf den folgenden beiden Eigenschaften:

$$1. \mathcal{L}(x, y, p(x, y), p(x, y)) = 0,$$

$$2. H(C) = \int_C (u(x, y) dx + v(x, y) dy) \text{ ist auf dem Feld wegunabhängig}$$

für stückweis glatte Kurven C .

Auf Grund dieser beiden Tatsachen läßt sich nämlich die totale Variation ΔI für jede in dem Feld gelegene zulässige Kurve $C: y = \varphi(x)$ darstellen in der Form

$$\Delta I = \int_C \mathcal{L}(x, \varphi, p(x, \varphi), \varphi') dx \text{ (WEIERSTRASSscher Fundamentalsatz).}$$

⁶⁾ B. FLODIN, a. a. O., S. 7 und ferner.

Bei den vorliegenden Variationsproblemen ist dieser Satz nicht anwendbar, da die auftretenden Felder \mathfrak{k} nicht aus Extremalen oder gebrochenen Extremalen bestehen. Um hier zu einer dem Fundamentalsatz analogen Aussage zu gelangen, soll im folgenden eine Funktion $\Gamma(x, y, \tilde{p}) = f(x, y, \tilde{p}) - u(x, y) - v(x, y) \tilde{p}$, $(x, y) \in \mathfrak{k}$, $g(x, y) \leq \tilde{p} \leq G(x, y)$, konstruiert werden, welche auf \mathfrak{k} die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. Dann ist für jede in \mathfrak{k} gelegene zulässige Kurve C $\Delta I = I(C) - I(C_0) = \int_C \Gamma(x, y, \varphi') dx$.

5.2. Sei zunächst ein in \mathfrak{G}_2 gelegenes Kurvenfeld \mathfrak{k} gegeben durch $\mathfrak{k}: y = \varphi(x, \alpha)$, $X_1 < x < X_2$, $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2: \mathfrak{A}$, φ, φ_x von der Klasse C' und $\varphi_x \neq 0$ in \mathfrak{A} . \mathfrak{k} überdecke den Bereich \mathfrak{G} der x, y -Ebene schlicht. \mathfrak{G} ist dann ein einfach zusammenhängendes Gebiet. $a(x, y)$ sei die inverse Funktion, $p(x, y)$ die Gefällefunktion des Feldes.

Angenommen, es sei auf \mathfrak{k} eine Funktion $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ mit den geforderten Eigenschaften gefunden. Dann folgt aus 1. durch Differentiation nach y : $f_y + f_p p_y - u_y - v_y p - v p_y = 0$. Andererseits ist $H(C)$ in \mathfrak{G} dann und nur dann wegunabhängig, wenn dort $u_y = v_y$. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt $v_x + p v_y + p_y v - f_y - p_y f_x = 0$ in \mathfrak{G} , eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $v(x, y)$. Sie besitzt die charakteristischen Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dv}{dx} + p_y v - f_y - p_y f_x = 0$.

Als deren Lösungen ergeben sich

$$y = \varphi(x, \alpha),$$

$$(*) \quad v = \frac{1}{\varphi_x(x, \alpha)} \left\{ \beta - \int_{\alpha}^{w(\alpha)} (f_y(\tau, \varphi, \varphi_x) \varphi_x + f_{y'}(\tau, \varphi, \varphi_x) \varphi_{xx}) d\tau \right\}$$

Dabei ist β Integrationsparameter und $w(\alpha)$ eine in $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ erklärte, stetig differenzierbare Funktion mit $X_1 < w(\alpha) < X_2$, die sonst jedoch beliebig sein darf. Ist nun $\beta = w(\alpha)$ eine in $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ erklärte, stetig differenzierbare, sonst aber beliebige Funktion und setzt man für α bzw. β $a(x, y)$ bzw. die aus (*) sich ergebende Funktion von x, y ein, so hat man damit eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Dieselbe lautet also

$$v = \frac{1}{\varphi_x(x, \alpha)} \left\{ w(\alpha) - \int_{\alpha}^{w(\alpha)} (f_y(\tau, \varphi, \varphi_x) \varphi_x + f_{y'}(\tau, \varphi, \varphi_x) \varphi_{xx}) d\tau \right\}$$

mit $\alpha = a(x, y)$, $(x, y) \in \mathfrak{G}$. u ergibt sich jetzt aus der Gleichung

$$f(x, y, p) - u(x, y) - v(x, y) p = 0$$

zu

$$u = f(x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x(x, \alpha)) - \frac{\varphi_x(x, \alpha)}{\varphi_x(x, \alpha)} \left\{ w(\alpha) - \int_{\alpha}^{w(\alpha)} (f_y(\tau, \varphi, \varphi_x) \varphi_x + f_{y'}(\tau, \varphi, \varphi_x) \varphi_{xx}) d\tau \right\}$$

mit $\alpha = a(x, y)$, $(x, y) \in \mathfrak{G}$.

Man verifiziert, daß die mit diesen Funktionen u und v gebildete Funktion $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ in der Tat 1. und 2. erfüllt.

5.3. Nunmehr werde ein aus zwei Teilfeldern zusammengesetztes Kurvenfeld betrachtet. Es sei

$\mathfrak{F}: y = \varphi(x, \alpha), x_1 - h < x < x_0 + h, |\alpha - \alpha_0| < \delta: \mathfrak{A}, \varphi, \varphi_x$ von der Klasse C' , $\varphi_x \neq 0$ in \mathfrak{A} . Das von \mathfrak{F} schlicht überdeckte, einfach zusammenhängende Gebiet der x, y -Ebene sei \mathfrak{G} , die inverse Funktion bzw. Gefällefunktion von \mathfrak{F} $a(x, y)$ bzw. $p(x, y)$. Weiterhin sei $\bar{\mathfrak{F}}: y = \bar{\varphi}(x, \alpha), x_0 - h < x < x_2 + h, |\alpha - \alpha_0| < \delta: \bar{\mathfrak{A}}$, mit analogen Eigenschaften ein zweites Kurvenfeld. Schließlich sei $\hat{C}: x = \hat{x}(\alpha), y = \hat{y}(\alpha) = \varphi(\hat{x}(\alpha), \alpha), |\alpha - \alpha_0| < \delta$, ein glattes Jordankurvenstück mit $\hat{x}(\alpha_0) = x_0$, und es gelte $\varphi(\hat{x}(\alpha), \alpha) = \bar{\varphi}(\hat{x}(\alpha), \alpha)$. Die Felder $\mathfrak{f}: y = \varphi(x, \alpha), x_1 - h < x \leq \hat{x}(\alpha), |\alpha - \alpha_0| < \delta: \mathfrak{a}$, und $\bar{\mathfrak{f}}: y = \bar{\varphi}(x, \alpha), \hat{x}(\alpha) \leq x < x_2 + h, |\alpha - \alpha_0| < \delta: \bar{\mathfrak{a}}$, mögen außer den Punkten von \hat{C} keinen Punkt gemeinsam haben. \mathfrak{f} bzw. $\bar{\mathfrak{f}}$ überdeckt den Bereich \mathfrak{g} bzw. $\bar{\mathfrak{g}}$ der x, y -Ebene. $\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}}$ werde dann ein zusammengesetztes Feld genannt.

Man bilde die Funktionen u, v bzw. \bar{u}, \bar{v} auf \mathfrak{f} bzw. $\bar{\mathfrak{f}}$, indem man $w(\alpha) = \hat{x}(\alpha)$

setzt. Dann ist $u = f - \frac{\varphi_x}{\varphi_\alpha} \left(\omega(\alpha) - \int_x^{\hat{x}} (f_y \varphi_\alpha + f_{y'} \varphi_{\alpha x}) d\tau \right), v = \frac{1}{\varphi_x} \left(\omega(\alpha) - \int_x^{\hat{x}} (f_y \varphi_\alpha + f_{y'} \varphi_{\alpha x}) d\tau \right)$ mit $\varphi = \varphi(x, \alpha), f = f(x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x(x, \alpha))$ usw., $\alpha = a(x, y)$ und $\bar{u} = \bar{f} - \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\varphi}_\alpha} \left(\bar{\omega}(\alpha) + \int_x^{\hat{x}} (\bar{f}_y \bar{\varphi}_\alpha + \bar{f}_{y'} \bar{\varphi}_{\alpha x}) d\tau \right), \bar{v} = \frac{1}{\bar{\varphi}_x} \left(\bar{\omega}(\alpha) + \int_x^{\hat{x}} (\bar{f}_y \bar{\varphi}_\alpha + \bar{f}_{y'} \bar{\varphi}_{\alpha x}) d\tau \right)$ mit $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x, \alpha), \bar{f} = f(x, \bar{\varphi}(x, \alpha), \bar{\varphi}_x(x, \alpha))$ usw., $\alpha = \bar{a}(x, y)$.

$\omega(\alpha)$ und $\bar{\omega}(\alpha)$ sollen jetzt bestimmt werden durch die Forderung $u(\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha)) = \bar{u}(\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha)), v(\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha)) = \bar{v}(\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha)), |\alpha - \alpha_0| < \delta$. Aus ihr ergibt sich

$$\omega = \varphi_\alpha \frac{\bar{f} - f}{\bar{\varphi}_x - \varphi_x}, \bar{\omega} = \bar{\varphi}_\alpha \frac{\bar{f} - f}{\bar{\varphi}_x - \varphi_x} \text{ mit } \varphi = \varphi(\hat{x}(\alpha), \alpha), \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\hat{x}(\alpha), \alpha), \\ f = f(\hat{x}, \hat{y}, \varphi_x(\hat{x}, \alpha)) = f(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y})), \bar{f} = \bar{f}(\hat{x}, \hat{y}, \bar{\varphi}_x(\hat{x}, \alpha)) = \bar{f}(\hat{x}, \hat{y}, \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})).$$

Hiermit stellt sich $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ auf \mathfrak{f} bzw. $\bar{\mathfrak{f}}$ dar in der Form

$$\gamma(x, y, \tilde{p}) = f(x, y, \tilde{p}) - f(x, y, p) - \frac{\tilde{p} - p}{\varphi_\alpha(x, \alpha)} \left\{ \varphi_\alpha(\hat{x}, \alpha) \frac{f(\hat{x}, \hat{y}, \tilde{p}(\hat{x}, \hat{y})) - f(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y}))}{\tilde{p}(\hat{x}, \hat{y}) - p(\hat{x}, \hat{y})} \right. \\ \left. - \int_x^{\hat{x}} \{ f_y(\tau, \varphi(\tau, \alpha), \varphi_x(\tau, \alpha)) \varphi_\alpha(\tau, \alpha) + f_{y'}(\tau, \varphi(\tau, \alpha), \varphi_x(\tau, \alpha)) \varphi_{\alpha x}(\tau, \alpha) \} d\tau \right\} \\ \text{mit } p = p(x, y), \hat{x} = \hat{x}(\alpha), \hat{y} = \hat{y}(\alpha), \alpha = a(x, y) \text{ und } (x, y) \in \mathfrak{g}, g(x, y) \leq \tilde{p} \leq G(x, y) \text{ bzw.}$$

$$\bar{\gamma}(x, y, \tilde{p}) = \bar{f}(x, y, \tilde{p}) - \bar{f}(x, y, \bar{p}) - \frac{\tilde{p} - \bar{p}}{\bar{\varphi}_\alpha(x, \alpha)} \left\{ \bar{\varphi}_\alpha(x, \alpha) \frac{\bar{f}(\hat{x}, \hat{y}, \tilde{p}(\hat{x}, \hat{y})) - \bar{f}(\hat{x}, \hat{y}, \bar{p}(\hat{x}, \hat{y}))}{\tilde{p}(\hat{x}, \hat{y}) - \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})} \right. \\ \left. + \int_x^{\hat{x}} \{ \bar{f}_y(\tau, \bar{\varphi}(\tau, \alpha), \bar{\varphi}_x(\tau, \alpha)) \bar{\varphi}_\alpha(\tau, \alpha) + \bar{f}_{y'}(\tau, \bar{\varphi}(\tau, \alpha), \bar{\varphi}_x(\tau, \alpha)) \bar{\varphi}_{\alpha x}(\tau, \alpha) \} d\tau \right\} \\ \text{mit } \bar{p} = \bar{p}(x, y), \hat{x} = \hat{x}(\alpha), \hat{y} = \hat{y}(\alpha), \alpha = \bar{a}(x, y) \text{ und } (x, y) \in \bar{\mathfrak{g}}, g(x, y) \leq \tilde{p} \leq G(x, y).$$

Wegen $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ längs \hat{C} ist längs dieser Kurve $\gamma(x, y, \tilde{p}) = \bar{\gamma}(x, y, \tilde{p})$ für jeden Wert von \tilde{p} . $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ ist daher auf $\bar{f} + \bar{f}$ stetig. Die so konstruierte Funktion $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ erfüllt in der Tat die Forderungen 1. und 2.

6. Ein Analogon der WEIERSTRASSschen Bedingung.

6.1. $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ soll nunmehr auf dem in 5.3. konstruierten, C_0 einbettenden Feld betrachtet werden. Zunächst werde gezeigt, daß $\gamma(x, y, \tilde{p}) = -\mathcal{L}(x, y, p(x, y), \tilde{p})$ ist. Dazu ist die Gültigkeit von

$$(**) \quad \frac{1}{t_\alpha(x, \alpha)} \left\{ t_\alpha(\hat{x}, \alpha) \frac{f(\hat{x}, \hat{y}, \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})) - f(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y}))}{\bar{p}(\hat{x}, \hat{y}) - p(\hat{x}, \hat{y})} - \int_{\hat{x}}^{\hat{z}} (f_y t_\alpha + f_{y'} t_{\alpha z}) d\tau \right\} =$$

$$= f_{y'}(x, y, p(x, y)) \quad \text{mit} \quad \alpha = \alpha(x, y), f = f(x, t(x, \alpha), t_\alpha(x, \alpha)) \quad \text{nachzuweisen.}$$

Nun ist

$$\int_{\hat{x}}^{\hat{z}} (f_y t_\alpha + f_{y'} t_{\alpha z}) d\tau = t_\alpha(\hat{x}, \alpha) f_{y'}(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y})) - t_\alpha(x, \alpha) f_{y'}(x, y, p(x, y)),$$

da ja \bar{f} ein Extremalenfeld ist. Damit wird die linke Seite von (**)

$$\frac{1}{t_\alpha(x, \alpha)} \left[\frac{t_\alpha(\hat{x}, \alpha)}{\bar{p}(\hat{x}, \hat{y}) - p(\hat{x}, \hat{y})} \{ f(\hat{x}, \hat{y}, \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})) - f(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y})) \} - \right.$$

$$\left. - (\bar{p}(\hat{x}, \hat{y}) - p(\hat{x}, \hat{y})) f_{y'}(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y})) \right] + t_\alpha(x, \alpha) f_{y'}(x, y, p(x, y)).$$

Hierin ist die geschweifte Klammer gleich $\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}, p(\hat{x}, \hat{y}), \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})) = -\mathcal{L}(\hat{x}, t(\hat{x}, \alpha), t_\alpha(\hat{x}, \alpha), \bar{q}_\alpha(\hat{x}, \alpha)) = \mathcal{L}\{\hat{x}, t(\hat{x}, \alpha), t_\alpha(\hat{x}, \alpha), G(\hat{x}, \bar{q}(\hat{x}, \alpha))\} = \mathcal{L}\{\hat{x}, t(\hat{x}, \alpha), t_\alpha(\hat{x}, \alpha), G(\hat{x}, t(\hat{x}, \alpha))\} = 0$ auf Grund der Definition der Eckenkurve. Daraus folgt die Behauptung.

6.2. Auf dem Feld $\bar{f}: y = \bar{\varphi}(x, \alpha)$ ist $\bar{\gamma}(x, y, \tilde{p})$ gemäß 5.3. gegeben, wenn man nur $\varphi(x, \alpha)$ durch $\bar{\varphi}(x, \alpha)$ ersetzt. Führt man jetzt wieder den ursprünglichen Scharparameter β in \bar{f} ein, so ergibt sich speziell längs \bar{E}_0

$$\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) = f(x, \bar{\varphi}_0, \tilde{p}) - f(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) -$$

$$- \frac{\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \left\{ \bar{\varphi}_\beta(x_0, \beta_0) \frac{f(x_0, y_0, \bar{p}_0) - f(x_0, y_0, p_0)}{\bar{p}_0 - p_0} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^x (f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \bar{\varphi}_\beta(\tau, \beta_0) + f_{y'}(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \bar{\varphi}_{\beta z}(\tau, \beta_0)) d\tau \right\}.$$

Formt man das Integral durch partielle Integration um und berücksichtigt $\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) = 0$, so ergibt sich hieraus

$$\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) = - \frac{\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \int_{x_0}^x \bar{\varphi}_\beta(\tau, \beta_0) \left(f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) - \frac{d}{d\tau} f_{y'}(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \right) d\tau -$$

$$- (\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0) \frac{\bar{\varphi}_\beta(x_0, \beta_0)}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} (f_{y'}(x_0, y_0, p_0) - f_{y'}(x_0, y_0, \bar{p}_0)) -$$

$$- (\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0) f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) + f(x, \bar{\varphi}_0, \tilde{p}) - f(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0)$$

mit $\bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}_0(x)$. Durch Vergleich mit (C) erhält man das Resultat: (C) ist äquivalent mit der Relation

$$\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) \geq 0 \quad \text{in} \quad x_0 \leq x \leq x_2, \quad g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x)).$$

Es ist $\bar{\gamma}(x_0, y_0, p_0) = -\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) = 0$. Als die verschärfte Bedingung (C),

symbolisiert durch (C') , werde daher die folgende Aussage bezeichnet: $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{p}) \geq 0$, $x_0 \leq x \leq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \bar{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$ mit $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{p}) = 0$ nur für $\bar{p} = \bar{\varphi}'_0(x)$, $x_0 \leq x \leq x_2$, und $x = x_0$, $\bar{p} = p_0$. Ganz analog wird hier wegen $\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) = 0$ unter der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung die Beziehung verstanden:

$\mathcal{L}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x), \bar{p}) \geq 0$, $x_1 \leq x \leq x_0$, $g(x, \varphi_0(x)) \leq \bar{p} \leq G(x, \varphi_0(x))$ mit $\mathcal{L}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x), p) = 0$ nur für $\bar{p} = \varphi'_0(x)$, $x_1 \leq x \leq x_0$, und $x = x_0$, $\bar{p} = \bar{p}_0$.

7. Herleitung weiterer notwendiger Bedingungen aus (C) und der WEIERSTRASS-Bedingung.

Setzt man $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{p}) = \bar{\gamma}(x, \bar{p})$, so ist für irgendein $x \in [x_0, x_2]$ $\bar{\gamma}(x, \bar{p}) = \bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x)) + (\bar{p} - \bar{\varphi}_0(x))(\bar{\gamma}'_p(x, \bar{\varphi}_0) + \omega(\bar{p} - \bar{\varphi}_0))$ mit $\lim_{\bar{p} \rightarrow \bar{\varphi}_0} \omega(\bar{p} - \bar{\varphi}_0) = 0$. Wegen $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0) = \bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) = 0$ und $\bar{p} - \bar{\varphi}_0 < 0$ für $\bar{p} \neq \bar{\varphi}'_0$ muß also $\bar{\gamma}'_p(x, \bar{\varphi}_0) \leq 0$ sein, da sonst (C) nicht erfüllt wäre. Liefert also C_0 ein Minimum, so ist

$$(C_1) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}'_p(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) &= -\frac{\bar{\varphi}_{\beta}(x_0, \beta_0)}{\bar{\varphi}_{\beta}(x, \beta_0)} (f'_y(x_0, y_0, p_0) - f'_y(x_0, y_0, \bar{p}_0)) - \\ &- \frac{1}{\bar{\varphi}_{\beta}(x, \beta_0)} \int_{x_0}^x \bar{\varphi}_{\beta}(\tau, \beta_0) \left(f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) - \frac{d}{dx} f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \right) d\tau \leq 0. \end{aligned}$$

Verschärft man diese Bedingung durch Weglassen des Gleichheitszeichens, so sei sie mit (C'_1) bezeichnet.

Setzt man in $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}(x, \beta), \bar{p})$ $\beta = \beta_0$ und entwickelt um die Stelle x_0 nach x , so erhält man in analoger Weise die Ungleichung

$$(C_2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}(x, \beta), \bar{p}) \Big|_{x=x_0, \beta=\beta_0} &= \\ &= f_x - \bar{f}_x + \bar{p}_0 f_y - p_0 \bar{f}_y + (\bar{f}_y - f_y) \left((\bar{p}_0 - p_0) \frac{\bar{\varphi}_{\beta x}}{\bar{\varphi}_{\beta}} \bar{\varphi}'_0 \right) \Big|_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Ihre Verschärfung heiße (C'_2) .

Entsprechend (C_1) ergibt sich aus der WEIERSTRASS-Bedingung:

$$(W) \quad \gamma'_p(x_0, y_0, \bar{p}_0) = \mathcal{L}'_p(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) = f'_y(x_0, y_0, \bar{p}_0) - f'_y(x_0, y_0, p_0) \leq 0,$$

Verschärfung (W') .

8. Hinreichende Bedingung im Fall I.

Im folgenden wird bewiesen: Sind die Voraussetzungen (V) erfüllt, genügt E_0 darüber hinaus der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung und gelten (A), (B'), (C'), (C'_1) , (C'_2) , (D') und (W') , so liefert C_0 ein relatives starkes eigentliches Minimum von $I(C)$.

8.1. Auf Grund von (V), (A), (B') und (D') läßt sich C_0 in ein Feld einbetten, wie dies in 4.3. angegeben wurde. Es sei α als Parameter des gesamten Feldes eingeführt, wodurch sich in (C') , (C'_1) und (C'_2) nichts weiter ändert, als daß $\bar{\varphi}_{\beta}(x_0, \beta_0)$ bzw. $\bar{\varphi}_{\beta x}(x_0, \beta_0)$ durch $\bar{\varphi}_{\alpha}(x_0, \alpha_0)$ bzw. $\bar{\varphi}_{\alpha x}(x_0, \alpha_0)$ zu ersetzen ist. Im übrigen seien die Bezeichnungen von 4.3. gültig, nur daß jetzt als Definitionsbereich des Gesamtfeldes $x_1 \leq x \leq x_2$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$ mit einem

geeigneten $\delta > 0$ gewählt sei. Im folgenden wird zunächst das Vorzeichen von $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p}) = \gamma(x, t(x, \alpha), \tilde{p}) = \mathcal{L}(x, t(x, \alpha), t_x(x, \alpha), \tilde{p})$ in $x_1 \leq x \leq \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $g(x, t(x, \alpha)) \leq \tilde{p} \leq G(x, t(x, \alpha))$ und von $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) = \bar{\gamma}(x, \tilde{p}(x, \alpha), \tilde{p})$ in $\hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $g(x, \tilde{p}(x, \alpha)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \tilde{p}(x, \alpha))$ untersucht.

8.2. Wegen (C'_1) ist $\gamma_{1\tilde{p}}(x, \alpha_0, \tilde{p}(x, \alpha_0)) < 0$ für $x_0 \leq x \leq x_2$. Man kann daher $\delta > 0$ so wählen und außerdem ein $k_2 > 0$ derart angeben, daß $\gamma_{2\tilde{p}}(x, \alpha, \tilde{p}) < 0$ in $\mathfrak{U}_2: \hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $G(x, \tilde{p}(x, \alpha)) - k_2 \leq \tilde{p} \leq G(x, \tilde{p}(x, \alpha))$. Daraus folgt mit Rücksicht auf $\gamma_2(x, \alpha, G(x, \tilde{p})) = \gamma(x, \tilde{p}, \tilde{p}_x) = 0$, daß $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) \geq 0$ in \mathfrak{U}_2 mit $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) = 0$ nur für $\tilde{p} = G(x, \tilde{p}(x, \alpha))$. In ganz entsprechender Weise zeigt man mit Hilfe der verschärften LEGENDRE-Bedingung, daß eine Punktmenge

$$\mathfrak{U}_1: x_1 \leq x \leq \hat{x}(\alpha), |\alpha - \alpha_0| \leq \delta, |\tilde{p} - t_x(x, \alpha)| \leq k_1, k_1 > 0,$$

existiert derart, daß $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p}) \geq 0$ in \mathfrak{U}_1 und nur verschwindet für $\tilde{p} = t_x(x, \alpha)$.

8.3. Werde nun $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p})$ in einer linksseitigen Umgebung von (x_0, y_0, \bar{p}_0) betrachtet. Da gemäß (W') $\gamma_{1\tilde{p}}(x_0, \alpha_0, \bar{p}_0) < 0$, kann man $\delta, k_2 > 0$ so wählen und ein $h_1 > 0$ derart bestimmen, daß

$$\gamma_{1\tilde{p}}(x, \alpha, \tilde{p}) < 0 \text{ in } \mathfrak{V}_1: \hat{x}(\alpha) - h_1 \leq x \leq \hat{x}(\alpha), |\alpha - \alpha_0| \leq \delta, G(x, t(x, \alpha)) - k_2 \leq \tilde{p} \leq G(x, t(x, \alpha)).$$

Nach 3.2. ist wegen $\Omega_0 < 0$ $\frac{d}{dx} \gamma(x, t(x, \alpha), G(x, t))|_0 = \tilde{\mathcal{L}}_x(x, \alpha)|_0 < 0$, so daß $h_1, \delta > 0$ existieren mit $\frac{d}{dx} \gamma(x, t(x, \alpha), G(x, t)) < 0$ für $\hat{x}(\alpha) - h_1 \leq x \leq \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$. Sei nun $(x, \alpha, \tilde{p}) \in \mathfrak{V}_1$. Dann ist $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p}) - \gamma(x, t(x, \alpha), G(x, t)) = (\tilde{p} - G(x, t)) \gamma_{1\tilde{p}}(x, \alpha, \pi)$ mit $\tilde{p} < \pi < G(x, t(x, \alpha))$. Weiterhin ist $\gamma(x, t(x, \alpha), G(x, t)) = \gamma(\hat{x}, t(\hat{x}, \alpha), G(\hat{x}, t)) + (x - \hat{x}) \left[\frac{d}{dx} \gamma(x, t(x, \alpha), G(x, t)) \right]_{x=\xi}$ mit $x < \xi < \hat{x}(\alpha)$. Somit gilt wegen $\gamma(\hat{x}, t(\hat{x}, \alpha), G(\hat{x}, t)) = \tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}, \alpha) = 0$: $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p}) = (x - \hat{x}) \left[\frac{d}{dx} \gamma(x, t(x, \alpha), G(x, t)) \right]_{x=\xi} + (\tilde{p} - G(x, t)) \gamma_{1\tilde{p}}(x, \alpha, \pi)$. Daher ist $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p}) \geq 0$ in \mathfrak{V}_1 mit $\gamma_1(x, \alpha, \tilde{p}) = 0$ nur für $x = \hat{x}(\alpha)$, $\tilde{p} = G(\hat{x}, \hat{y})$.

8.4. Jetzt werde $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p})$ in einer rechtsseitigen Umgebung von (x_0, y_0, p_0) untersucht. Wegen (C'_2) kann man $\delta, k_1 > 0$ so wählen und ein $h_2 > 0$ so bestimmen, daß $\gamma_{2x}(x, \alpha, \tilde{p}) > 0$ ist in $\mathfrak{V}_2: \hat{x}(\alpha) \leq x \leq \hat{x}(\alpha) + h_2$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\tilde{p} - p_0| < k_1$. Außerdem darf man $k_1 > 0$ so klein annehmen, daß $f_{y'y'}(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) > 0$ für $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\tilde{p} - p_0| < k_1$. Nun ist $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) - \gamma_2(\hat{x}, \alpha, t_x(\hat{x}, \alpha)) = \gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) - \gamma_2(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) + \gamma_2(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) - \gamma_2(\hat{x}, \alpha, t_x(\hat{x}, \alpha))$, also wegen $\gamma_2(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) = \gamma_1(\hat{x}, \alpha, \tilde{p})$ und $\gamma_1(\hat{x}, \alpha, t_x(\hat{x}, \alpha)) = 0$:

$$\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) = \gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) - \gamma_2(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) + \gamma_1(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) - \gamma_1(\hat{x}, \alpha, t_x(\hat{x}, \alpha)).$$

Formt man jede der beiden auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Differenzen mit Hilfe des TAYLORSchen Satzes um, so erhält man wegen $\gamma_{1\tilde{p}}(\hat{x}, \alpha, t_x(\hat{x}, \alpha)) = 0$, $\gamma_{1\tilde{p}\tilde{p}}(\hat{x}, \alpha, \tilde{p}) = f_{y'y'}(\hat{x}, \alpha, \tilde{p})$: $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) = (x - \hat{x})$

$\gamma_{2x}(\xi, \alpha, \tilde{p}) + 1/2 (\tilde{p} - t_x(\hat{x}, \alpha))^2 f y'(\hat{x}, \alpha, \pi)$, wobei $\hat{x} < \xi < x$ gilt und π zwischen \tilde{p} und $t_x(\hat{x}, \alpha)$ gelegen ist. Somit ist $\gamma_2(x, \alpha, \tilde{p}) \geq 0$ in \mathfrak{V}_2 und verschwindet nur für $x = \hat{x}(\alpha)$, $\tilde{p} = t_x(\hat{x}, \alpha)$.

8.5. Man betrachte nun den Durchschnitt \mathfrak{D} der beiden Mengen $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{V}_2 \cup \mathfrak{U}_2 \cup \mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{M}_2: x_1 \leq x \leq x_2, \alpha = \alpha_0, g(x, \chi(x, \alpha_0)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \chi(x, \alpha_0))$. Nach Konstruktion von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$ und auf Grund der Gültigkeit von (C') und der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung ist $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) > 0$ auf der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{D}$. Da $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p})$ eine in dem Bereich $\mathfrak{A}: x_1 \leq x \leq x_2, |\alpha - \alpha_0| \leq \delta, g(x, \chi(x, \alpha)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \chi(x, \alpha))$ stetige Funktion ist, kann man $\delta > 0$ so wählen, daß $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) > 0$ für alle $(x, \alpha, \tilde{p}) \in \mathfrak{A} - \mathfrak{M}_1$. Damit ist $\Gamma(x, \chi(x, \alpha), \tilde{p}) \geq 0$ in ganz \mathfrak{A} und verschwindet nur für $\tilde{p} = t_x(x, \alpha), x_1 \leq x \leq \hat{x}(\alpha), |\alpha - \alpha_0| \leq \delta$ und $\tilde{p} = G(x, \tilde{\varphi}(x, \alpha)) = \tilde{\varphi}_x(x, \alpha), \hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2, |\alpha - \alpha_0| \leq \delta$.

Daher ist $\Gamma(x, y, \tilde{p}) \geq 0$ für $(x, y) \in \mathfrak{G}, g(x, y) \leq \tilde{p} \leq G(x, y)$ mit $\Gamma(x, y, \tilde{p}) = 0$ lediglich für $\tilde{p} = p(x, y), (x, y) \in \mathfrak{g}$ und $\tilde{p} = G(x, y), (x, y) \in \bar{\mathfrak{g}}$, wenn $p(x, y)$ Gefällefunktion von f ist. Damit gilt für jede in \mathfrak{G} gelegene zulässige Kurve $C: y = \varphi(x), x_1 \leq x \leq x_2, \Delta I = I(C) - I(C_0) = \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx \geq 0$, d. h. C_0 liefert ein relatives starkes Minimum.

8.6. Bleibt zu zeigen, daß dasselbe eigentlich ist. Sei also $I(C) = I(C_0)$, d. h. $\Gamma(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, x_1 \leq x \leq x_2$. Q_1 möge der erste, Q_2 der letzte Schnittpunkt von C mit \bar{C} sein. Das Stück $P_1 Q_1$ zerfällt in endlich viele glatte Bögen. Da längs jedes derselben $\gamma(x, y, y') = 0$ ist, muß jeder Bogen die Differentialgleichung $y' = p(x, y)$ erfüllen. Da speziell der erste dieser Bögen durch P_1 geht, muß er wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieser Differentialgleichung mit E_0 zusammenfallen, insbesondere muß sein Endpunkt R_1 wieder auf E_0 gelegen sein. Daraus folgt, daß auch der zweite C -Bogen mit E_0 zusammenfallen muß usw. Also ist das gesamte C -Stück $P_1 Q_1$ mit E_0 identisch, woraus speziell $Q_1 = P_0$ folgt. In analoger Weise zeigt man, daß das Stück $Q_2 P_2$ von C mit \bar{E}_0 identisch ist, also auch $Q_2 = P_0 = Q_1$ gilt. Daher ist in der Tat $C = C_0$.

9. Notwendige und hinreichende Bedingungen im Fall II.

In ganz analoger Weise wie im Fall I sollen nun auch im Fall II notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Minimum von $I(C)$ durch C_0 hergeleitet werden.

9.1. Es sei, im Sinne der Ausführungen von 2.1.,

$$b: y = \varphi(x, \alpha), x_1 - h \leq x \leq x_0 + h, |\alpha - \alpha_0| < \delta \text{ bzw.}$$

$$\bar{b}: y = \bar{\varphi}(x, \beta), x_0 - h \leq x \leq x_2 + h, |\beta - \beta_0| < \delta$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung $y' = g(x, y)$ bzw. $y' = G(x, y)$, welches E_0 bzw. \bar{E}_0 für $\alpha = \alpha_0$ bzw. $\beta = \beta_0$ enthalte. Die Kurven der ersten Schar seien mit E , die der zweiten mit \bar{E} bezeichnet.

Zunächst werde eine spezielle Schar zulässiger Kurven konstruiert, welche C_0 enthält. Dazu werde durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ mit $x_1 \leq x_0 < x_2$ und

$y_a = \varphi_0(x_a)$ eine Gerade der Steigung \tilde{p}_a mit $g(x_a, y_a) < \tilde{p}_a < G(x_a, y_a)$ gelegt, $\bar{g}: x = x_a + \sigma$, $y = y_a + \tilde{p}_a \sigma$, die im Intervall $|\sigma| < \sigma_0$ mit $\sigma_0 > 0$ betrachtet werde. Bringt man \bar{b} mit \bar{g} zum Schnitt, so kann man σ an Stelle von α als Scharparameter einführen, wodurch man $\bar{b}: y = \varphi(x, \alpha) = \psi(x, \sigma)$, $x_1 - h \leq x \leq x_2 + h$, $|\sigma| < \sigma_0$, erhält. Weiterhin werde durch $P_b = (x_b, y_b)$ mit $x_0 < x_b \leq x_2$, $y_b = \bar{\varphi}_0(x_b)$ ein Geradenstück vom Anstieg \tilde{p}_b mit $g(x_b, y_b) < \tilde{p}_b < G(x_b, y_b)$ gelegt, $\bar{g}: x = x_b - \tau$, $y = y_b - \tilde{p}_b \tau$, $|\tau| < \tau_0$, $\tau_0 > 0$. Durch den Schnitt von \bar{b} mit \bar{g} kann τ statt β als Scharparameter in \bar{b} eingeführt werden, wodurch sich $\bar{b}: y = \bar{\varphi}(x, \beta) = \bar{\psi}(x, \tau)$, $x_0 - h \leq x \leq x_2 + h$, $|\tau| < \tau_0$ ergibt. Nun werde \bar{b} mit \bar{b} geschnitten: $\bar{\psi}(x, \tau) - \psi(x, \sigma) = 0$. Da diese Gleichung für $x = x_0$, $\sigma = 0$, $\tau = 0$ erfüllt ist und außerdem $\bar{\psi}_x(x_0, 0) - \psi_x(x_0, 0) = \bar{p}_0 - p_0 \neq 0$ gilt, gibt es eine Funktion $x = X(\sigma, \tau)$ mit $X(0, 0) = x_0$ und $\bar{\psi}(X(\sigma, \tau), \tau) - \psi(X(\sigma, \tau), \sigma) = 0$ für $|\sigma| < \sigma_0$, $|\tau| < \tau_0$. Nunmehr werde eine Kurvenschar definiert durch

$$f: y = \begin{cases} \varphi_0(x), & x_1 \leq x \leq x_a, \\ y_a + \tilde{p}_a(x - x_a), & x_a \leq x \leq x_a + \sigma, \\ \psi(x, \sigma), & x_a + \sigma \leq x \leq X(\sigma, \tau), \\ \bar{\psi}(x, \tau), & X(\sigma, \tau) \leq x \leq x_b - \tau, \\ y_b + \tilde{p}_b(x - x_b), & x_b - \tau \leq x \leq x_b, \\ \bar{\varphi}_0(x), & x_b \leq x \leq x_2. \end{cases}$$

Eine Kurve von K von f liegt schlicht über der x -Achse, wenn $0 \leq \sigma < \sigma_0$, $0 \leq \tau < \tau_0$. Sie ist außerdem in einer beliebig engen Umgebung von C_0 gelegen und die ihr zugeordnete

Kurve K liegt in \mathfrak{G}_3 , falls σ_0 , $\tau_0 > 0$ genügend klein. Unter diesen Voraussetzungen sind also die Kurven K zulässig.

Das Grundintegral längs einer Kurve K ist

$$u(\sigma, \tau) = \int_{x_1}^{x_a} f(x, \varphi_0, \varphi'_0) dx + \int_{x_a}^{x_a + \sigma} f(x, y_a + \tilde{p}_a(x - x_a), \tilde{p}_a) dx +$$

$$+ \int_{x_a + \sigma}^{X(\sigma, \tau)} f(x, \psi, \psi_x) dx +$$

$$+ \int_{X(\sigma, \tau)}^{x_b - \tau} f(x, \bar{\psi}, \bar{\psi}_x) dx + \int_{x_b - \tau}^{x_b} f(x, y_b + \tilde{p}_b(x - x_b), \tilde{p}_b) dx +$$

$$+ \int_{x_b}^{x_2} f(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) dx.$$

Die Funktion $u(\sigma, \tau)$ ist für $|\sigma| < \sigma_0$, $|\tau| < \tau_0$ von der Klasse C' , und zwar ist

$$\begin{aligned}
u_\sigma(0, 0) &= f(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{p}_\sigma) - f(x_\sigma, y_\sigma, y'_\sigma) - \psi_\sigma(x_\sigma, 0) \frac{f(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{p}_\sigma) - f(x_\sigma, y_\sigma, p_0)}{\tilde{p}_\sigma - p_0} + \\
&\quad + \int_{x_\sigma}^{x_0} (f_y(x, \varphi_0, \varphi'_0) \psi_\sigma(x, 0) + f_{y'}(x, \varphi_0, \varphi'_0) \psi_{\sigma x}(x, 0)) dx, \\
u_\tau(0, 0) &= f(x_\tau, y_\tau, \tilde{p}_\tau) - f(x_\tau, y_\tau, y'_\tau) + \bar{\psi}_\tau(x_\tau, 0) \frac{f(x_\tau, y_\tau, \tilde{p}_\tau) - f(x_\tau, y_\tau, p_0)}{\tilde{p}_\tau - p_0} + \\
&\quad + \int_{x_\tau}^{x_0} (f_y(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \bar{\psi}_\tau(x, 0) + f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \bar{\psi}_{\tau x}(x, 0)) dx \text{ mit} \\
y'_\sigma &= \varphi'_0(x_\sigma), y'_\tau = \bar{\varphi}'_0(x_\tau).
\end{aligned}$$

Falls C_0 ein Minimum von $I(C)$ liefert, ist $u(0, 0) \leq u(\sigma, \tau)$ für $0 \leq \sigma < \sigma_0$, $0 \leq \tau < \tau_0$. Dafür ist notwendig, daß $u_\sigma(0, 0) \geq 0$, $u_\tau(0, 0) \geq 0$. Führt man an Stelle von σ und τ wieder α und β als Scharparameter ein und schreibt außerdem statt x_σ bzw. x_τ x , so führen die beiden letzten Ungleichungen zu den Relationen

$$\begin{aligned}
(E) \quad & f(x, \varphi_0(x), \tilde{p}) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) - \\
& - \frac{\tilde{p} - \varphi'_0(x)}{\varphi_\alpha(x, \alpha)} \left\{ \varphi_\alpha(x_0, \alpha_0) \frac{f(x_0, y_0, \tilde{p}_0) - f(x_0, y_0, p_0)}{\tilde{p}_0 - p_0} - \right. \\
& \left. - \int_{x_0}^x (f_y(\tau, \varphi_0, \varphi'_0) \varphi_\alpha(\tau, \alpha_0) + f_{y'}(\tau, \varphi_0, \varphi'_0) \varphi_{\alpha x}(\tau, \alpha_0)) d\tau \right\} \geq 0, \\
(\bar{E}) \quad & f(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) - f(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}'_0(x)) - \\
& - \frac{\tilde{p} - \bar{\varphi}'_0(x)}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \left\{ \bar{\varphi}_\beta(x_0, \beta_0) \frac{f(x_0, y_0, \tilde{p}_0) - f(x_0, y_0, p_0)}{\tilde{p}_0 - p_0} + \right. \\
& \left. + \int_{x_0}^x (f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \bar{\varphi}_\beta(\tau, \beta_0) + f_{y'}(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \bar{\varphi}_{\beta x}(\tau, \beta_0)) d\tau \right\} \geq 0.
\end{aligned}$$

(E) bzw. (\bar{E}) gilt zunächst nur in \mathfrak{B} : $x_1 \leq x < x_0$, $g(x, \varphi_0(x)) < \tilde{p} < G(x, \varphi_0(x))$ bzw. \mathfrak{B} : $x_0 < x \leq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) < \tilde{p} < G(x, \bar{\varphi}_0(x))$. Hieraus folgt aber durch Grenzübergang, entsprechend wie in 2.3., die Gültigkeit von (E) bzw. (\bar{E}) in der abgeschlossenen Hülle von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B} .

9.2. Durch die Scharen \mathfrak{b} und $\bar{\mathfrak{b}}$ ist C_0 bereits in ein Feld eingebettet, sofern man beide durch die Kurve $\hat{C}: x = x_0$, $y = \varphi(x_0, \alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, trennt, die hier als Eckenkurve dienen möge. Auf diesem Feld kann $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ gemäß 5.3. konstruiert werden, und es ist dann (E) bzw. (\bar{E}) äquivalent mit $\gamma(x, \varphi_0(x), \tilde{p}) \geq 0$, $x_1 \leq x \leq x_0$, $g(x, \varphi_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \varphi_0(x))$ bzw. $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) \geq 0$, $x_0 \leq x \leq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$. In üblicher Weise kann nun wieder (E) bzw. (\bar{E}) zu (E') bzw. (\bar{E}') verschärft werden.

In Analogie zu den Ausführungen in 7. kann man aus den so gedeuteten Relationen (E) und (\bar{E}) weitere notwendige Bedingungen herleiten, die im folgenden zusammengestellt seien:

$$\begin{aligned}
(E_1) \quad & \gamma_{\tilde{p}}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) = - \frac{\varphi_\alpha(x_0, \alpha_0)}{\varphi_\alpha(x, \alpha_0)} \cdot \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \tilde{p}_0)}{\tilde{p}_0 - p_0} + \\
& + \frac{1}{\varphi_\alpha(x, \alpha_0)} \int_{x_0}^x \varphi_\alpha(\tau, \alpha_0) \left(f_y(\tau, \varphi_0, \varphi'_0) - \frac{d}{dx} f_{y'}(\tau, \varphi_0, \varphi'_0) \right) d\tau \geq 0
\end{aligned}$$

in $x_1 \leq x \leq x_0$;

$$(E_1) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}_p(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}'_0(x)) &= \frac{\bar{\varphi}_p(x, \beta_0)}{\bar{\varphi}_p(x, \beta_0)} \cdot \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, \bar{p}_0, p_0)}{\bar{p}_0 - p_0} - \\ &- \frac{1}{\bar{\varphi}_p(x, \beta_0)} \int_{x_0}^x \bar{\varphi}_p(\tau, \beta_0) \left(f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) - \frac{d}{dx} f_y(\tau, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}'_0) \right) d\tau \leq 0 \end{aligned}$$

in $x_0 \leq x \leq x_2$;

$$(E_2) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dx} \gamma \{x, \varphi(x, \alpha), G(x, \varphi(x, \alpha))\} \Big|_{x=x_0}^{x=x_2} = \\ &= f_x(x_0, y_0, \bar{p}_0) - f_x(x_0, y_0, p_0) + p_0 f_y(x_0, y_0, \bar{p}_0) - \bar{p}_0 f_y(x_0, y_0, p_0) + \\ &+ \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, \bar{p}_0, p_0)}{\bar{p}_0 - p_0} (G_x(x_0, y_0) + p_0 G_y(x_0, y_0)) + \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0)}{\bar{p}_0 - p_0} \varphi''_0(x_0) + \\ &+ \mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) \frac{\varphi_{\alpha x}(x_0, \alpha_0)}{\varphi_{\alpha}(x_0, \alpha_0)} \leq 0; \end{aligned}$$

$$(E_3) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dx} \bar{\gamma} \{x, \bar{\varphi}(x, \beta), g(x, \bar{\varphi}(x, \beta))\} \Big|_{\beta=\beta_0}^{x=x_0} = \\ &= f_x(x_0, y_0, p_0) - f_x(x_0, y_0, \bar{p}_0) + \bar{p}_0 f_y(x_0, y_0, p_0) - p_0 f_y(x_0, y_0, \bar{p}_0) - \\ &- \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0)}{\bar{p}_0 - p_0} (g_x(x_0, y_0) + \bar{p}_0 g_y(x_0, y_0)) - \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, \bar{p}_0, p_0)}{\bar{p}_0 - p_0} \bar{\varphi}''_0(x_0) + \\ &+ \mathcal{L}(x_0, y_0, \bar{p}_0, p_0) \frac{\bar{\varphi}_{\beta x}(x_0, \beta_0)}{\bar{\varphi}_{\beta}(x_0, \beta_0)} \geq 0; \end{aligned}$$

$$(E_4) \quad \begin{aligned} \gamma_p(x_0, y_0, \bar{p}_0) &= \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, \bar{p}_0, p_0)}{\bar{p}_0 - p_0} \leq 0 \text{ oder} \\ \mathcal{L}(x_0, y_0, \bar{p}_0, p_0) &\leq 0; \end{aligned}$$

$$(E_5) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}_p(x_0, y_0, p_0) &= - \frac{\mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0)}{\bar{p}_0 - p_0} \geq 0 \text{ oder} \\ \mathcal{L}(x_0, y_0, p_0, \bar{p}_0) &\leq 0. \end{aligned}$$

Falls diese Ungleichungen durch Weglassen des Gleichheitszeichens verschärft werden, seien sie mit (E'_v) und (\bar{E}'_v) , $v = 1, 2, 3$, bezeichnet.

9.3. Entsprechend dem Beweis der hinreichenden Bedingung im Fall I kann nunmehr gezeigt werden: Erfüllt C_0 die Ungleichungen (E'_v) , (E'_v) , (\bar{E}'_v) und (E'_v) , $v = 1, 2, 3$, so liefert C_0 ein relatives starkes eigentliches Minimum von $I(C)$.

(Eingegangen am 30. März 1953.)



